О СОПРЯЖЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛАХ

Л. В. Идельс

В работе исследуются вопросы сходимости и суммируемости сопряженных тригонометрических интегралов.

Сопряженные тригонометрические интегралы к

$$\int_0^\infty \{\Phi(t)\cos xt + \psi(t)\sin xt\}\,dt \tag{1}$$

определяются как (см., напр., [1])

$$\int_0^\infty \{\psi(t)\cos xt - \Phi(t)\sin xt\}\,dt. \tag{2}$$

В частности, для тригонометрического интеграла Фурье (1) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)\,dt, \tag{3}$$

тогда сопряженный интеграл (2) примет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t)\sin u(t-x)\,dt \tag{4}$$

так называемого сопряженного интеграла Фурье.

Известны [1—5] системы тех или иных достаточных условий, налагаемых на $f(x)$, при выполнении которых (3) равен $f(x)$ и (4) равен $\tilde{f}(x)$, которая определена формулой

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt. \tag{5}$$

Относительно рассматриваемого интеграла (5) известно, например, что он существует почти всюду, если $f(t)$ принадлежит к $L(-\infty, \infty)$ (теорема Лузина — Привалова).

Теорема 1. *Пусть* $(i)\ f(t)\in V(-\infty, \infty)$ *и* $(ii)\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=0$. *Тогда*

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin u(t-x)\,dt \tag{6}$$

во всякой точке x, *где* $\tilde{f}(x)$ *существует.*

Доказательство базируется на следующей лемме.

Лемма 1 [2]. *Пусть* $f(t)\in V(a, b)$, *а* $g(t)$ *— непрерывна на интервале* $a\leqslant t\leqslant b$. *Тогда* $\left|\int_a^b fg\,dt\right|<\{V_f(a, b)+\inf\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|\}\sup\limits_{a\leqslant\xi,\ \eta\leqslant b}\left|\int_\xi^\eta g\,dt\right|$,

где $V_f(\alpha, \beta)$ *означает полную вариацию функции* f *на интервале* $[\alpha, \beta]$.

Представим интеграл справа в формуле (6) в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin u(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_0^\infty\{f(x+t)-f(x-t)\}\times$$

$$\times\sin ut\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_0^\infty \psi(t)\sin ut\,dt, \tag{7}$$

где $\psi(t)=f(x+t)-f(x-t)$.

С помощью леммы 1 убеждаемся, что в силу (i) и (ii) внутренний интеграл в формуле (6) сходится равномерно в любом конечном интервале $0<u\leqslant\lambda$ изменения u. Действительно, выберем произвольно некоторое конечное и фиксированное число $T>0$. Тогда, так как $\psi(t)$ имеет ограниченное изменение на $(0, \infty)$, то, применяя лемму 1, имеем

$$\left|\int_T^{T'}\psi(t)\sin ut\,dt\right|<\{V_\psi(T, T')+\inf_{T\leqslant t\leqslant T'}|\psi(t)|\}\times$$

$$\times\sup_{T\leqslant\xi,\ \eta\leqslant T'}\left|\int_\xi^\eta \sin ut\,dt\right|<\frac{V_\psi(T, T')+\inf\limits_{T\leqslant t\leqslant T'}|\psi(t)|}{u}. \tag{8}$$

Так как $\psi(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$, то из неравенства (8) следует требуемое утверждение. Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_0^\infty \psi(t)\sin ut\,dt=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(t)\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt.$$

Введем функцию

$$\tilde{f}_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt.$$

Тогда, так как $\tilde{f}_\lambda(x) \to \tilde{f}(x)$ при $\lambda \to \infty$, для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(t)\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt - \tilde{f}_\lambda(x)\right\} = 0.$$

Представим разность в фигурных скобках в виде

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(t)\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt - \tilde{f}_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(t)\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \psi(t)\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}\cos\lambda t\,dt = I_1 - I_2.$$

Имеем $|I_1| < 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{\lambda}} |\psi(t)| \left|\frac{\sin^2\frac{\lambda t}{2}}{t}\right| dt < 2\varepsilon_\lambda \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\,d\theta$, где $\varepsilon_\lambda = \max\limits_{0<t\leqslant\frac{\pi}{\lambda}} |\psi(t)|$.

Так как в точке скачка функции $f(x)$ интеграл (5) заведомо расходится, то естественно рассматривать функцию $f(x)$ в точках непрерывности. Мы можем поэтому взять столь большое $\lambda_0(\eta)$, что $\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \psi(t)\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt\right| < \eta$.

при $\lambda > \lambda_0(\eta)$.

Оценим теперь I_2, предварительно разбив его на три части P, Q и R, распространенные, соответственно, по интервалам $\left(\frac{\pi}{\lambda},\ \delta\right)$, $(\delta,\ T)$ и $(T,\ \infty)$, где T — любое конечное фиксированное число, δ — фиксировано и подчинено условию $\frac{\pi}{\lambda} < \delta < T$. Тогда, применяя лемму 1, имеем

$$\left|\int\limits_T^{T'} \psi(t)\frac{\cos\lambda t}{t}\,dt\right| < \{V_\psi(T,T') + \inf_{T\leqslant t\leqslant T'} |\psi(t)|\} \times$$

$$\times \sup_{T\leqslant T_1,\ T_2\leqslant T'} \left|\int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{\cos\lambda t}{t}\,dt\right|. \tag{9}$$

Так как

$$\sup_{T\leqslant T_1,\ T_2\leqslant T'} \left|\int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{\cos\lambda t}{t}\,dt\right|$$

равномерно ограничен относительно $\lambda > 0$, а выражение в фигурных скобках в неравенстве (9) в силу (*i*) и (*ii*) стремится к нулю при $T \to \infty$, то для $T > T_0(\varepsilon)$ имеем

$$|R|=\left|\int\limits_T^\infty \psi(t)\frac{\cos\lambda t}{t}\,dt\right|<\varepsilon$$

равномерно относительно $\lambda>0$. Но при фиксированных T и δ функция $\psi(t)/t$ интегрируема на интервале $(\delta_1 T)$, так что по теореме Римана — Лебега

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q=\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_\delta^T\frac{\psi(t)}{t}\cos\lambda t\,dt=0.$$

К интегралу P применим лемму 1

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\psi(t)\frac{\cos\lambda t}{t}\,dt\right|<\left\{V_\psi\left(\frac{\pi}{\lambda},\delta\right)+\inf_{\frac{\pi}{\lambda}\leqslant t\leqslant\delta}|\psi(t)|\right\}\times$$

$$\times\sup_{\frac{\pi}{\lambda}\leqslant\xi_1,\,\eta_1\leqslant\delta}\left|\int\limits_{\xi_1}^{\eta_1}\frac{\cos\lambda t}{t}\,dt\right|<\frac{2}{\pi}\left\{V_\psi\left(\frac{\pi}{\lambda},\delta\right)+\inf_{\frac{\pi}{\lambda}\leqslant t\leqslant\delta}|\psi(t)|\right\}. \qquad (10)$$

Из неравенства (10) в силу непрерывности функции $f(t)$ следует, что существует столь малое $\delta_0(\xi)$, что

$$|P|=\left|\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\psi(t)\frac{\cos\lambda t}{t}\,dt\right|<\xi$$

для $\delta<\delta_0(\xi)$ равномерно относительно $\lambda>0$.

Из полученных оценок и соотношений приходим к утверждению теоремы.

Пусть теперь $f(t)$ представима в виде

$$f(t)=g(t)\,{}^{\cos}_{\sin}\,at\quad(a>0),$$

где $g(t)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 1. Тогда, применяя лемму 1, получим, что внутренний интеграл в формуле (6) сходится равномерно в любом конечном интервале изменения u, не содержащем ни внутри, ни на конце точку $u=a$. Устанавливается

Теорема 2. *Пусть $f(t)=g(t)\cos at\; at\,(a>0)$, где $g(t)$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 1. Тогда*

$$\tilde f(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to0}\left(\int\limits_0^{a-\delta}+\int\limits_{a+\delta}^{\infty}\right)du\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin u(t-x)\,dt \qquad (11)$$

почти всюду.

Формула (11) устанавливается на базе леммы 1, если использовать методы доказательства, близкие к методам из [3].

Отметим, что для функций, содержащих периодический множитель указанного типа, нет необходимости требовать существование функции $\tilde f(x)$, так как условия (i) и (ii) обеспечивают ее существование почти всюду. Действительно,

$$\int\limits_T^\infty\frac{\psi(t)}{t}\,dt=\cos ax\int\limits_T^\infty\frac{\varphi(t)}{t}\cos at\,dt\;-\sin ax\int\limits_T^\infty\frac{k(t)}{t}\sin dt\,dt=I_1^*+I_2^*,$$

где $\varphi(t)=g(x+t)-g(x-t)$ и $k(t)=g(x-t)+g(x+t)$. Тогда, применяя лемму 1 к каждому из интегралов I_1^* и I_2^*, получим

$$I_1^*=0\{\varphi(T)\},\qquad I_2^*=0\{k(T)\}$$

равномерно относительно $a>0$. Отсюда в силу (ii) следует, что интеграл

$$\int_b^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt=\int_b^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt \quad (b>0)$$

сходится равномерно относительно $a>0$.

Так как, с другой стороны, для любой суммируемой функции по теореме Лузина — Привалова

$$\int_0^b \frac{\psi(t)}{t}\,dt=\int_0^b \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt$$

существует почти всюду, то из полученных соотношений следует существование $\tilde{f}(x)$ почти всюду.

Аналогичная теорема имеет место для множителя $\sin at\,(a>0)$. Доказывается так же.

Следующую теорему можно рассматривать как общую теорему для линейных методов суммирования сопряженного интеграла Фурье.

Теорема 3. *Пусть ядро $K(t,\lambda)$ нечетно по первому аргументу и* (α) $K(t,\lambda)=o(\lambda)$ *при* $|t|\leqslant\frac{\pi}{\lambda}$ (β) $K(t,\lambda)-\frac{1}{t}=O\left\{\frac{1}{\lambda^\alpha|t|^{\alpha+1}}\right\}$ *при* $|t|>\frac{\pi}{\lambda}$ *для любого данного фиксированного* $\alpha>0$. *Пусть далее* $\frac{f(t)}{1+|t|^{\alpha+1}}$ *принадлежит к* $L(-\infty,\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)K(t-x,\lambda)\,dt=f(x)$$

почти всюду.

Доказательство. Положим

$$Q(x,\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)K(t-x,\lambda)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\{f(x+t)-f(x-t)\}\times$$

$$\times K(t,\lambda)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(t)K(t,\lambda)\,dt$$

и рассмотрим разность $Q(x,\lambda)-\tilde{f}_\lambda(x)$, которую представим в виде

$$Q(x,\lambda)-\tilde{f}_\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}}\psi(t)K(t,\lambda)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty \psi(t)\left[K(t,\lambda)-\frac{1}{t}\right]dt=K_1+K_2.$$

Введем

$$\eta(t) = \int_0^t |\psi(z)|\, dz.$$

Тогда в силу (α)

$$K_1 = O\left\{\lambda \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} |\psi(t)|\, dt\right\} = O\left\{\lambda\eta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\right\}. \tag{12}$$

Так как почти всюду $\eta(t) = 0\,(t)$, то из (12) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \psi(t) K(t,\ \lambda)\, dt = 0\,(1) \quad \text{при } \lambda \to \infty.$$

Далее, в силу (β)

$$|K_2| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} |\psi(t)|\left|K(t,\ \lambda) - \frac{1}{t}\right| dt < \frac{1}{\pi\lambda^\alpha}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} \frac{|\psi(t)|}{t^{\alpha+1}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi\lambda^\alpha}\left\{-\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\alpha+1}\eta\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) + (\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} \frac{\eta(t)}{t^{\alpha+2}}\, dt\right\} =$$

$$= 0\,(1) + \frac{\alpha+1}{\pi\lambda^\alpha}\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} \frac{0\,(t)}{t^{\alpha+2}}\, dt = 0\,(1).$$

Следовательно, почти всюду

$$\lim_{\lambda\to\infty}\{Q(x,\ \lambda) - \tilde{f}_\lambda(x)\} = 0.$$

Так как $\tilde{f}(x)$ существует почти всюду, то $\tilde{f}_\lambda(x) \to \tilde{f}(x)$ при $\lambda \to \infty$. Это и завершает доказательство теоремы.

Э. Титчмарш [1] показал, что если $f(t) \in L(-\infty,\ \infty)$, то сопряженный интеграл Фурье суммируем $(C,\ \alpha)$ $(\alpha > 0)$ к $\tilde{f}(x)$ почти всюду.

Эту теорему можно рассматривать как частный пример к теореме 3. Из определения метода суммирования $(C,\ \alpha)$ сопряженных интегралов Фурье следует, что необходимо показать, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^\alpha du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(t-x)\, dt = \tilde{f}(x). \tag{13}$$

По теореме включения для C-метода достаточно показать, что для любого положительного произвольно малого $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ имеет место формула (13). Имеем

$$\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^\alpha du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(t-x)\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty}\{f(x+t) - f(x-t)\}\, dt \int_0^{\lambda}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^\alpha \sin ut\, du.$$

Положим

$$K_C(t, \lambda) = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^\alpha \sin ut\, du = \lambda \int_0^1 (1-s)^\alpha \sin \lambda ts\, ds =$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{\alpha}{\lambda^\alpha t^{\alpha+1}} \int_0^{\lambda t} \frac{\cos(\lambda t - v)}{v^{1-\alpha}}\, dv. \qquad (14)$$

Тогда второе из равенств (14) показывает, что

$$K_c(t, \lambda) = O\{\lambda\},$$

а третье — , что для $|t| > \frac{\pi}{\lambda}$

$$\left| K_C(t, \lambda) - \frac{1}{t} \right| = \frac{\alpha}{\lambda^\alpha |t|^{\alpha+1}} \left| \int_0^{\lambda t} \frac{\cos(\lambda t - v)}{v^{1-\alpha}}\, dv \right| < \frac{Q'(\alpha)}{\lambda^\alpha |t|^{\alpha+1}},$$

т. е.

$$K_C(t, \lambda) - \frac{1}{t} = O\left\{\frac{1}{\lambda^\alpha |t|^{\alpha+1}}\right\},$$

и упомянутая теорема Титчмарша следует теперь из теоремы 3.

Можно показать, что сопряженные ядра Абеля и Вейерштрасса также удовлетворяют условиям теоремы 3. Имеем

Следствие 1. *Пусть* $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ *Тогда сопряженный интеграл Фурье суммируем А-методом к* $\tilde{f}(x)$ *почти всюду.*

Следствие 2. *Пусть* $f(t) \in L(-\infty, \infty)$. *Тогда сопряженный интеграл Фурье суммируем методом Вейерштрасса к* $\tilde{f}(x)$ *почти всюду.*

Рассмотрим еще одно следствие из теоремы 3. Будем говорить, что сопряженный интеграл Фурье суммируется к $\tilde{f}(x)$, если

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \cos \frac{p\pi}{2\lambda} u\, du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt = \tilde{f}(x),$$

где p — целое нечетное число.

Это определение доставляет нам метод суммирования сопряженного интеграла Фурье, который называется методом Бернштейна — Рогозинского $\left(BR, \frac{p\pi}{2\lambda}\right)$ (см., например, [4]).

Имеем

$$\int_0^\lambda \cos \frac{p\pi}{2\lambda} u\, du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \{f(x+t) - f(x-t)\}\, dt \int_0^\lambda \cos \frac{p\pi}{2\lambda} u \sin ut\, du.$$

Обозначим

$$K_{BR}(t, \lambda) = \int_0^\lambda \cos \frac{p\pi}{2\lambda} u \sin tu\, du = \lambda \int_0^1 \cos \frac{p\pi}{2} v \sin \lambda tv\, dv =$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{p\pi}{2t} \int_0^1 \sin \frac{p\pi}{2} v \cos \lambda tv\, dv. \qquad (15)$$

Но из второго равенства (15) следует, что

$$K_{BR}(t, \lambda) = O\{\lambda\}.$$

Так как при $|t| > \frac{\pi}{\lambda}$

$$\left|\int_0^1 \sin\frac{p\pi}{2} v \cos\lambda t v\, dv\right| < \frac{2}{\lambda|t|},$$

то из третьего равенства получим

$$K_{BR}(t, \lambda) - \frac{1}{t} = O\left\{\frac{1}{\lambda t^2}\right\}.$$

Следовательно, ядро $K_{BR}(t, \lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3 с $\alpha = 1$. Таким образом установлена следующая

Теорема 4. *Пусть* $f(t) \in L(-\infty, \infty)$. *Тогда сопряженный интеграл Фурье суммируем методом* $\left(BR, \frac{p\pi}{2\lambda}\right)$ *к* $\tilde{f}(x)$ *почти всюду* (p — *целое нечётное число).*

Приношу благодарность проф. П. Л. Ульянову и доц. И. И. Огиевецкому за внимание к работе и ряд указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. C. Titchmarsh. Conjugate trigonometrical integrals, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 24, 1924.
2. M. Riesz, A. Livingston. A short proof of a classical theor em in the theory of Fourier integrals, Amer. Math. Monthly, 62, 1965.
3. Э. Ч. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Физматгиз, М., 1948.
4. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1, 2. «Наука», М., 1965.
5. J. Cossar. The Cesaro Summability of Fourier integrals, Proc. Edinburgh Math. Soc., (2), 7, 1945.

Поступила 10 ноября 1969 г.