ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ $H^{s,p}$ БЕССЕЛЕВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В. С. Рабинович

В статье рассматриваются корректные задачи в $H^{s,p}$, $1 < p < \infty$, для псевдодифференциальных уравнений

$$P_G A(x, D) u_+ = f \tag{1}$$

в неограниченной области G с гладкой границей ∂G, являющейся коническим множеством вне шара достаточно большого радиуса. Символ $A(x, \zeta)$ псевдодифференциального оператора $A(x, D)$ удовлетворяет естественным условиям гладкости по x, непрерывен по ζ и имеет степенной характер роста или убывания при $|\zeta| \to \infty$. Рассматриваемый класс уравнений, в частности, включает в себя интегральные уравнения Винера — Хопфа I-ого рода с символом, имеющим степенное убывание на бесконечности.

Постановка корректных задач для уравнения (1) сходна с постановкой корректных задач для однородных эллиптических псевдодифференциальных уравнений для ограниченных областей, рассмотренных в работах М. И. Вишика и Г. И. Эскина [1], [4] и др.

В том случае, когда G — гладкий конус, уравнения типа (1) в пространствах $L_p(G)$ рассматривались И. Б. Симоненко [3] методами теории операторов локального типа [2]. Уравнения типа (1) в пространствах H^s Соболева — Слободецкого были изучены в [18] также методами теории операторов локального типа, модифицированными в [18] применительно к банаховым пространствам обобщенных функций.

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия нетеровости корректных задач для уравнения (1) в пространствах $H^{s,p}$, $1 < p < \infty$ бесселевых потенциалов.

§ 1. Функциональные пространства $H^{s,p}$ и некоторые классы псевдодифференциальных операторов с постоянным символом

1°. Напомним некоторые свойства пространств $H^{s,p}(R^n)$, называемых пространствами потенциалов Бесселя или пространствами Лебега и обозначаемых часто через $L_p^s(R^n)$ [10], [12], [13].

Пространство $H^{s,p}(R^n) = H^{s,p}$ для любого действительного s есть пространство обобщенных функций $u(x) \in S'(R^n)$ ($S'(R^n)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций Л. Шварца) с нормой

$$\|u\|_{s,p} = \|F^{-1}(1+|\zeta|^2)^{s/2}Fu\|_{L_p}, \tag{1.1}$$

где F — оператор преобразования Фурье обобщенной функции $u(x)$, $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ — переменная, двойственная к $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n_x$.

Если s — целое положительное число, то норма (1.1) эквивалентна норме

$$\|u\|'_{s,p} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant s} \|D^\alpha u\|_{L_p}, \tag{1.2}$$

следовательно, в этом случае $H^{s,p} \equiv W^{s,p}$, где $W^{s,p}$ — пространство Соболева.

Сопряженным к $H^{s,p}$ пространством является пространство $H^{-s,p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$. Отметим, что пространства $S(R^n)$, а также $D(R^n) = C_0^\infty(R^n)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями плотно в $H^{s,p}$ при всех s, $1 < p < \infty$.

2°. Пусть $R^n_\pm$ — полупространство $x_n \gtrless 0$. Обозначим через $\overset{0}{H}{}^{s,p}(R^n_\pm)$ подпространство пространства $H^{s,p}$, состоящее из обобщенных функций, носители которых лежат в $R^n_\pm$, а через $H^{s,p}(R^n_\pm)$ — пространство сужений на $R^n_\pm$ обобщенных функций из $H^{s,p}$.

Норма в $H^{s,p}(R^n_\pm)$ вводится как

$$\|u\|^\pm_{s,p} = \inf \|lu\|_{s,p},$$

где inf берется по всем продолжениям $lu \in H^{s,p}$.

Оператор, сопоставляющий функции $u(x) \in D(R^n)$ ее след на гиперплоскости $x_n = 0$, обозначается через $\gamma: \gamma u(x) = u(x', 0)$.

Если $x > \frac{1}{p}$, то оператор γ продолжается по непрерывности на все пространство $H^{s,p}$. Через $B^{s,p}(R^{n-1}_{x'})$ обозначается пространство, состоящее из следов элементов $H^{s+\frac{1}{p},p}$, $s > 0$ на гиперплоскости $x_n = 0$ с нормой

$$\|u\|_{B^{s,p}(R^{n-1}_{x'})} = \inf \|lu\|_{s+1/p,\,p},$$

где inf берется по всем продолжениям $lu \in H^{s+\frac{1}{p},p}$, $s > 0$.

Пространство $B^{s,p}(R_{x'}^{n-1})$ с точностью до эквивалентных норм есть пространство Бесова [11]. Если $s<0$, то $B^{s,p}(R_{x'}^{n-1})$ определим как пространство, сопряженное к $B^{-s,p'}(R_{x'}^{n-1})$.

Таким образом, оператор γ является непрерывным оператором из $H^{s,p}(R^n)$ в $B^{s-\frac{1}{p},p}(R_{x'}^{n-1})$, если $s>\frac{1}{p}$.

Положим $\gamma_{(j)}=\gamma\frac{\partial^j}{\partial x_n^j}$, тогда оператор $\gamma_{(j)}$ непрерывен из $H^{s,p}(R^n)$ в $B^{s-j-\frac{1}{p},p}(R_{x'}^{n-1})$ при $s>j+\frac{1}{p}$ [10]. Используя соображения двойственности, легко показать, что оператор умножения на функцию $\delta^{(j)}(x_n)$ является непрерывным оператором из $B^{s+j+1-1/p,p}(R_{x'}^{n-1})$ в $H^{s,p}(R^n)$, если $s<-j-1+\frac{1}{p}$.

3°. Обозначим через $P_\pm$ оператор сужения обобщенной функции $u(x)$ на полупространство $R_\pm^n$. Оператор $P_\pm$ непрерывен из $H^{s,p}$ в $H^{s,p}(R_\pm^n)$ при любом s. Пусть функция $\theta(x)$ равна единице при $x_n>0$ и нулю при $x_n<0$, тогда через θ^+ обозначим оператор умножения на $\theta(x)$, а через θ^- — оператор умножения на функцию $1-\theta(x)$.

В [10] показано, что пространства $H^{s,p}(R_\pm^n)$ и $\overset{0}{H}{}^{s,p}(R_\pm^n)$ совпадают при $-1+\frac{1}{p}<s<\frac{1}{p}$ а, следовательно, оператор $l_\pm$ продолжения нулем функции $u\in H^{s,p}(R_\pm^n)$ на все пространство R^n непрерывен из $H^{s,p}(R_\pm^n)$ в $H^{s,p}(R^n)$ при $-1+\frac{1}{p}<s<\frac{1}{p}$.

Из соображений двойственности теперь получаем, что оператор $\theta^\pm$ непрерывен из $H^{s,p}(R^n)$ в $\overset{0}{H}{}^{s,p}(R_\pm^n)$ при $-1+\frac{1}{p}<s<\frac{1}{p}$, причем, единичный оператор $I=\theta^++\theta^-$.

4°. Если $A(\zeta)$ функция, определенная на R_ζ^n, то через $A(D)$ будем обозначать оператор, действующий по правилу

$$\widehat{A(D)\,u}(\zeta)=A(\zeta)\,\hat{u}(\zeta), \tag{1.3}$$

где $\hat{u}(\zeta)$ — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций от $u(x)$.

Будем говорить, что оператор $A(D)\in L_p^p$, если имеют место оценки

$$\|A(D)\,u\|_p\leqslant c_p\|u\|_p,\quad 1\leqslant p<\infty,\quad u\in S(R^n)\ . \tag{1.4}$$

Оператору $A(D)$ естественным образом сопоставляется функция $A(\zeta)$ называемая символом оператора $A(D)$. Если $A(D)\in L_p^p$, то говорят, что $A(\zeta)\in M_p^p\subset S'(R^n)$ (6).

Во множестве M_p^p вводится норма

$$\|A(\zeta)\|_{M_p^p}=\|A(D)\|_{L_p^p}, \tag{1.5}$$

с которой M_p^p есть коммутативное нормированное кольцо. Кольцо $\mathrm{R}(R_\zeta^n)$ преобразований Фурье функций из $L_1(R^n)$, расширенное константами, вложено в M_p^p. Если $A(\zeta) \in \mathrm{R}(R_\zeta^n)$, то будем говорить, что $A(D) \in \mathrm{R}$. Замыкание множества операторов $A(D) \in \mathrm{R}$ по норме L_p^p обозначим, следуя [6], через l_p^p, а через $m_p^p(R_\zeta^n)$ — множество символов операторов $A(D) \in l_p^p$.

Предложение 1.1. *Оператор $A(D) \in L_p^p$ ограничен в пространствах $H^{s,p}(R^n)$, $B^{s,p}(R^n)$ при любом s.*

Предложение очевидно для пространств $H^{s,p}$. Пространство $B^{s,p}(R^n)$ является интерполяционным пространством по методу следов Лионса между пространствами $H^{s-\varepsilon,p}(R^n)$, $H^{s+\varepsilon,p}(R^n)$, т. е.

$$T\left(H^{s-\varepsilon,p},\ H^{s+\varepsilon,p};\ p,\ \frac{1}{2}\right) = B^{s,p}(R^n) \tag{1.6}$$

см. [10]. Из интерполяционной теоремы Лионса [10] предложение **1.1** следует для пространств $B^{s,p}$.

Предложение 1.2. (см. [3]). *Для того чтобы оператор $A(D) \in l_p^p$ имел обратный $A^{-1}(D) \in l_p^p$, необходимо и достаточно, чтобы $A(\zeta) \neq 0$ ни при каких $\zeta \in \dot{R}_\zeta^n$ — расширении пространства R_ζ^n одной бесконечно удаленной точкой.*

Предложение 1.3. *Пусть $A(\zeta) \in R(\mathbf{R}_\zeta^n)$ и не обращается в нуль ни при каких $\zeta \in \dot{R}_\zeta^n$, тогда оператор $A(D)$ допускает факторизацию $A(D) = A_+(D)A_-(D)$, где* операторы $A_\pm(D)$ обратимы в пространствах $\overset{0}{H}{}_\pm^{s,p}$ соответственно.

Предложение 1.3. доказано в [5] для пространств L_p, однако оно сохраняет силу и для пространств $H^{s,p}$.

5°. Если символ оператора $A(D)$ является бесконечно дифференцируемой функцией на R_ζ^n и

$$|D^\alpha A(\zeta)| < C_\alpha (1 + |\zeta|)^{r-|\alpha|}, \quad -\infty < r < \infty, \tag{1.7}$$

то будем говорить, что $A(D) \in \sigma^{(r)}$.

Предложение 1.4. *Оператор $A(D) \in \sigma^{(r)}$ является непрерывным оператором из $H^{s,p}(R^n)$ в $H^{s-r,p}(R^n)$ $(B^{s,p}(R^n) \to B^{s-r,p}(R^n))$, $-\infty < s < \infty$.*

Проведем оценку для пространств

$$\|A(D)u\|_{s-r,p} = \|(1 + |D|^2)^{\frac{s-r}{2}} A(D)u\|_{L_p} =$$
$$= \|(1 + |D|^2)^{-r/2} A(D)(1 + |D|^2)^{s/2} u\|_{L_p}.$$

Легко проверить, используя (1.7), что для любого мультииндекса α выполняются оценки

$$|D^\alpha((1 + |\zeta|^2)^{-r/2} A(\zeta))| \leqslant C_\alpha (1 + |\zeta|)^{-|\alpha|}. \tag{1.8}$$

В силу оценок (1.8) из теоремы Михлина [6], [7] о мультипликаторах интегралов Фурье будет следовать, что

$$\|A(D)u\|_{s-r,p} \leqslant \mathrm{const}\, \|u\|_{s,p}.$$

Для пространств $B^{s,p}(R^n)$ предложение 1.4. следует из интерполяционной теоремы Лионса [10].

Предложение 1.5. *Множество операторов $A(D) \in l_p^p \cap \sigma^{(0)}$ плотно в кольце l_p^p по норме последнего.*

Предложение 1.5. следует из того, что множество $S(R^n)$ плотно в пространстве $L_1(R^n)$.

6°. Ясно, что оператор $(1+|D|^2)^l \in \sigma^{(2l)}$ и представляется в виде $(1+|D|^2)^l = D_+^l D_-^l$, где $D_\pm^l = (D_n \pm i(|D'|^2+1)^{\frac{1}{2}})^l \in \sigma^{(l)}$. Операторы $D_\pm^l$ являются непрерывными обратимыми операторами из $\overset{0}{H}{}^{s,p}(R_\pm^n)$ в $\overset{0}{H}{}^{s-l,p}(R_\pm^n)$.

§ 2. Псевдодифференциальное уравнение с постоянным символом в полупространстве

Рассмотрим уравнение

$$P_+ A(D) u_+ = f, \quad f \in H^{s-l,p}(R_\pm^n), \tag{2.1}$$

где

$$A(\zeta) = (1+|\zeta|^2)^l \tilde{A}(\zeta), \quad \tilde{A}(\zeta) \in \mathrm{R}(R^n), \quad \tilde{A}(\zeta) \neq 0, \ \forall \zeta \in \dot{R}_\zeta^n. \tag{2.2}$$

Решение уравнения (2.1) ищется в классе $\overset{0}{H}{}^{s+l,p}(R_+^n)$, где $s = m + \delta$, m — целое число, а $-1 + \frac{1}{p} < \delta < \frac{1}{p}$, $1 < p < \infty$. В зависимости от знака m для уравнения (2.1) ставится, либо граничная задача, либо рассматривается уравнение с дополнительными потенциалами. Если $m = 0$, то уравнение (2.1) разрешимо единственным образом без всяких дополнительных условий.

1°. $s = -m + \delta$, $m \geqslant 0$, $-1 + \frac{1}{p} < \delta < \frac{1}{p}$, $1 < p < \infty$.

Уравнение (2.1) эквивалентно следующему:

$$A(D) u_+ = lf + u_-, \tag{2.3}$$

где $lf\,(\in H^{s-l,p})$ — некоторое фиксированное продолжение функции f на все R^n, а $u_- = (A(D)u_+ - lf)$. Оператор $A(D) = A_+(D) A_-(D)$ где $A_\pm(D) = D_\pm^l A_\pm(D)$. Воспользовавшись тем, что $I = \theta^+ + \theta^-$ при $-1 + \frac{1}{p} < \delta < \frac{1}{p}$, найдем, что функция

$$u_+ = A_+^{-1}(D) D_-^m \theta^+ D_-^{-m} A_-^{-1}(D)\, lf + \sum_{k=1}^{m} A_+^{-1}(D)\, c_k(x')\, \delta^{(k-1)}(x_n) \tag{2.4}$$

является решением уравнения (2.1), где $A_+^{-1}(D)\ c_k(x')\,\delta^{(k-1)}(x_n)$ есть решения однородного уравнения, отвечающего (2.1).

Для того чтобы обеспечить принадлежность u_+ пространству $\overset{0}{H}{}^{s+l,p}(R_+^n)$, потребуем, чтобы $c_k(x') \in B^{s+k-1/p,\,p}(R_{x'}^{n-1})$.

Теорема 2.1. *Пусть $\tilde{A}(\zeta) \neq 0$, $\forall \zeta \in \dot{R}_\zeta^n$, тогда уравнение (2.1) имеет бесконечное множество решений, принадлежащих пространству $\overset{0}{H}{}^{s+l,p}(R_+^n)$, которые даются формулой (2.4). В случае $m = 0$ уравнение (2.1) имеет единственное решение, которое можно получить по формуле (2.4), положив в ней $m = 0$.*

Замечание. Можно доказать, что при $m = 0$ уравнение имеет единственное решение, если $\tilde{A}(\zeta) \in m_p^p$ и не обращается в нуль на $\dot{R}_\zeta^n$

2°. $s = m + \delta$, $m > 0$, $-1 + \frac{1}{p} < \delta < \frac{1}{p}$, $1 < p < \infty$.

Используя разложение интеграла типа Коши [1], оператор θ^+ на функциях из C_0^∞ можно представить в виде

$$\theta^+ f = \sum_{j=1}^{m} iD_+^{-j}\gamma D_+^{j-1} f + D_+^{-m}\theta^+ D_+^m f. \tag{2.5}$$

Операторы, стоящие в правой части равенства (2.5), определены на функциях $f \in H^{s,p}$ при $s - m > -1 + \frac{1}{p}$ а, следовательно, равенство (2.5) по непрерывности распространяется на любую функцию

$$f \in H^{s,p}, \quad s = m + \delta, \quad m > 0, \quad -1 + \frac{1}{p} < \delta < \frac{1}{p}.$$

Решение уравнения (2.1) можно получить из формулы

$$u_+ = A_+^{-1}(D)\,\theta^+ A_-^{-1}(D)\, lf, \tag{2.6}$$

однако, не для любой правой части f решение u_+ будет принадлежать $\overset{0}{H}{}^{s+l,p}(R_+^n)$.

Выясним условия, которые необходимо наложить на f, чтобы $u_+ \in \overset{0}{H}{}^{s+l,p}(R_+^n)$. Для этого подставим выражение (2.5) для θ^+ в формулу (2.6), тогда получим

$$u_+ = \sum_{j=1}^{m} iA_+^{-1}(D)\, D_+^{-j}\gamma D_+^{j-1} A_-^{-1}(D)\, lf + A_+^{-1}(D)\, D_+^{-m}\theta^+ D_+^m A_-^{-1}(D)\, lf. \tag{2.7}$$

Так как оператор θ^+ ограничен из $H^{\delta,p}$ в $\overset{0}{H}{}^{\delta,p}(R_+^n)$ при $-1 + \frac{1}{p} < \delta < \frac{1}{p}$, то для того чтобы $u_+ \in \overset{0}{H}{}^{s+l,p}(R_+^n)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_{(k)} A_-^{-1}(D)\, lf = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m - 1. \tag{2.8}$$

Условия (2.8) можно записать в форме

$$\int \overline{A_+^{*-1}(D)\, c_j(x_n)\, \delta^{(j-1)}(x_n)}\, lf(x', x_n)\, dx' dx_n = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.9}$$

«ортогональности» правой части f решением сопряженного однородного уравнения

$$P_+ A^*(D)\, v_+ = 0,$$

где оператор $A^*(D)$ отвечает символу $\overline{A(\zeta)}$. Функции $c_j(x')\,(\in B^{-s+j-1/p,p'} \times (R^{n-1}))$ произвольны.

Теорема 2.2. *Пусть* $\tilde{A}(\zeta) \neq 0$, $\forall \zeta \in \dot{R}_\zeta^n$, *тогда уравнение (2.1) имеет единственное решение в пространстве* $\overset{0}{H}{}^{s+l,p}(R_+^n)$ $S = m + \delta$, $m > 0$, $-1 + {}^1/_p < \delta < \frac{1}{p}$ *для любой правой части* f, *удовлетворяющей условиям (2.9), а следовательно, оператор* $P_+ A(D)\, u_+$ *нормально разрешим из* $\overset{0}{H}{}^{s+l,p}(R_+^n)$ *в* $H^{s-l,p}(R_+^n)$, *и его d-характеристика* [14] *полубесконечна.*

3°. Для того чтобы выделить единственное решение уравнения (2.1) для $s=-m+\delta$, $-1+\frac{1}{p}<\delta<\frac{1}{p}$, $m>0$, зададим m граничных условий

$$\gamma_{(p_j)}B^{(j)}(D)\,u_+=f_j,\ f_j\in B^{s+l-r_j-1/p,\,p}(R_{x'}^{n-1}),\quad j=1,\,2,\,\dots,\,m, \tag{2.10}$$

где $B^{(j)}(\zeta)$ имеют вид

$$B^{(j)}(\zeta)=(1+|\zeta|^2)^{q_j}\tilde{B}^{(j)}(\zeta),\quad \tilde{B}^{(j)}(\zeta)\in m_p^p(R_\zeta^n), \tag{2.11}$$

а $r_j=p_j+2q_j$ при этом

$$r_j<s+l-\frac{1}{p},\ j=1,\,2,\,\dots,\,m. \tag{2.12}$$

Подставляя u_+ из (2.4) в граничные условия (2.10), получим систему псевдодифференциальных уравнений на $R_{x'}^{n-1}$ относительно функций $C_k(x')$

$$\sum_{k=1}^{m}\gamma_{(p_j)}B^{(j)}(D)\,A_+^{-1}(D)\,\delta^{(k-1)}(x_n)\,c_k(x')=f_j(x')-\psi_j(x'),\quad j=1,2,\,\dots,\,m, \tag{2.13}$$

где

$$\psi_j(x')=\gamma_{(p_j)}B^{(j)}(D)\,A_+^{-1}(D)\,D_-^m\theta^+D_-^{-m}A_-^{-1}(D)\,lf\in B^{s+l-r_j-1/p,p}(R_{x'}^{n-1}).$$

Найдем символическую матрицу $\|b_{jk}(\zeta')\|_{j,\,k=1}^m$ системы (2.13), используя то, что

$$\widehat{\gamma f}(\zeta')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\zeta',\,\zeta_n)\,d\zeta_n.$$

Элементы $b_{jk}(\zeta')$ этой матрицы определяются формулами

$$b_{jk}(\zeta')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B^{(j)}(\zeta',\,\zeta_n)\,\zeta_n^{p_j+k-1}d\zeta_n}{A_+(\zeta',\,\zeta_n)},\quad j,\,k=1,\,2,\,\dots,\,m, \tag{2.14}$$

причем функции $b_{jk}(\zeta')$ допускают следующее представление:

$$b_{jk}(\zeta')=(1+|\zeta'|^2)^{\frac{r_j-l+k}{2}}d_{jk}(\zeta'), \tag{2.15}$$

где

$$d_{jk}(\zeta')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B^{(j)}(\zeta',\,\zeta_n)\,A_+^{-1}(\zeta',\,\zeta_n)\left(1+\frac{\zeta_n^2}{(1+|\zeta'|^2)}\right)^{q_j}\times$$

$$\times\left(i+\frac{\zeta_n}{(1+|\zeta'|^2)^{1/2}}\right)^{-l}\cdot\frac{\zeta_n^{p_j+k-1}}{(1+|\zeta'|^2)^{\frac{p_j+k-1}{2}}}\cdot\frac{d\zeta_n}{(1+|\zeta'|^2)^{1/2}}. \tag{2.16}$$

Из неравенств (2.12) следует, что интеграл (2.16) абсолютно сходится и определяет непрерывную на R_ζ^n функцию.

В интеграле (2.16) сделаем замену $t=\frac{\zeta_n}{(1+|\zeta'|^2)^{1/2}}$, тогда

$$d_{jk}(\zeta')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{B}^{(j)}(\zeta',(1+|\zeta'|^2)^{\frac{1}{2}}t)\,(1+t^2)^{q_j}\,(t+i)^{-l}\cdot t^{p_j+k-1}dt}{\tilde{A}_+(\zeta',(1+|\zeta'|^2)^{1/2}t)}.$$

Покажем теперь, что

$$d_{jk}(\zeta') \in m_p^p(R_{\zeta'}^{n-1}).$$

Легко проверяется следующая оценка:

$$|D_{\zeta'}^{\alpha} c_{jk}(\zeta', \zeta_n)| \leqslant c_\alpha \left(1 + \frac{\zeta_n}{(1+|\zeta'|^2)^{1/2}}\right)^{r_j - l + k - 1 - |\alpha|} \cdot \frac{1}{(1+|\zeta'|^2)^{1/2}} \tag{2.17}$$

для функции

$$c_{jk}(\zeta', \zeta_n) = \left(1 + \frac{\zeta_n^2}{1+|\zeta'|^2}\right)^{q_j} \cdot \left(i + \frac{\zeta_n}{1+|\zeta'|^2}\right)^{-l} \times$$
$$\times \frac{\zeta_n^{p_j+k-1}}{(1+|\zeta'|^2)^{\frac{p_j+k-1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1+|\zeta'|^2)^{1/2}}.$$

Из свойств интегралов от функций со значениями в банаховом пространстве и теории Михлина [6] следует, что

$$\|d_{jk}(\zeta')\|_{m_p^p(R_{\zeta'}^{n-1})} \leqslant \text{const} \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant n} \int_{-\infty}^{\infty} \|\tilde{B}^{(j)}(\zeta', \zeta_n)\, \tilde{A}_{+}^{-1}(\zeta', \zeta_n)\|_{m_p^p(R_{\zeta'}^{n-1})} \times$$
$$\times \|\zeta'^{|\alpha|} D^{\alpha} c_{jk}(\zeta', \zeta_n)|\, d\zeta_n. \tag{2.18}$$

Пусть a — вложение гиперплоскости $R_{\zeta', \zeta_n}^{n-1}(\zeta_n = \text{const})$ в R_ζ^n. Отображение a индуцирует отображение a^* пространства $m_p^p(R_\zeta^n)$ в пространство $m_p^p(R_{\zeta'}^{n-1})$, которое согласно [6, стр. 26] является изометрическим. Следовательно,

$$\|d_{jk}(\zeta')\|_{m_p^p(R_{\zeta'}^{n-1})} \leqslant \text{const} \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant n} \int_{-\infty}^{\infty} \|\zeta'|^{|\alpha|} D^{\alpha} c_{jk}(\zeta', \zeta_n)|\, d\zeta_n. \tag{2.19}$$

В силу оценок (2.17) и (2.12) интеграл (2.19) существует.

Систему уравнений (2.13) теперь можно записать в виде

$$D_1 D D_2 c(x') = f(x') - \psi(x'), \quad x' \in R_{x'}^{n-1}, \tag{2.20}$$

где D_1, D_2 — диагональные операторы с символами $\|(1+|\zeta'|^2)^{r_j/2}\delta_{jk}\|$ и $\|1+|\zeta'|^2)^{\frac{k-l}{2}}\delta_{jk}|_{j,k=1}^m$ соответственно. Оператор D имеет символ $\|d_{jk}(\zeta')\|_{j,k=1}^m$, где $d_{jk}(\zeta')$ определяются формулами (2.16) и, как показано выше, принадлежат $m_p^p(R_{\zeta'}^{n-1})$, $(c(x') = (c_1(x'), \ldots, c_m(x'))$,

$$f(x') = (f_1(x'), \ldots, f_m(x')), \quad \psi(x') = (\psi_1(x'), \ldots, \psi_m(x')).$$

Легко показать, что система (2.20) имеет единственное решение в $\bigoplus_{k=1}^{m} B^{s+k-1/p,\,p}(R_{x'}^{n-1})$ тогда и только тогда, когда

$$\det\|d_{jk}(\zeta')\| \neq 0, \quad \forall\, \zeta' \in \dot{R}_{\zeta'}^{n-1}. \tag{2.21}$$

Условие (2.21) есть аналог условия Шапиро — Лопатинского для эллиптических граничных задач [1].

Итак, доказана

Теорема 2.3. *Для того чтобы уравнение (2.1) с граничными условиями (2.10) имело единственное решение в пространстве* $\overset{0}{H}{}^{s+l,\,p}(R^n_+)$ при $s=-m+\delta,\ -1+\frac{1}{p}<\delta<\frac{1}{p}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.21).*

Отметим, что условие $A(\zeta)\neq 0,\ \ \forall\zeta\in\dot{R}^n_\zeta$ также и необходимо для разрешимости задачи (2.1), (2.10) (см. [18]).

4°. Пусть $s=m+\delta,\quad -1+\frac{1}{p}<\delta<\frac{1}{p},\ m>0.$

В этом случае для того чтобы не налагать на правую часть (2.1) дополнительных условий, введем в (2.1) операторы типа потенциала с неизвестными плотностями, т. е. рассмотрим следующее уравнение:

$$P_+A(D)\,u_+=\sum_{j=1}^{m}P_+B^{(j)}(D)\,\delta^{(p_j)}(x_n)\,v_j(x')=f(x),\tag{2.22}$$

где символы операторов $A(D)$, $B^{(j)}(D)$ имеют вид (2.2), (2.11) соответственно, $f(x)\in H^{s-l,\,p}(R^n_+)$, решение отыскивается в пространстве $\overset{0}{H}{}^{s+l,\,p}\times(R^n_+)\bigoplus_{j=1}^{m}B^{s-l+r_j-1/p+1,\,p}(R^{n-1}_{x'})$, где $r_j=2q_j+p_j$, причем

$$s-l+r_j-\frac{1}{p}<-1.\tag{2.23}$$

Используя формулу (2.6), решение уравнения (2.1) найдем в виде

$$u_+=A_+^{-1}(D)\,\theta^+A_-^{-1}(D)\,lf-A_+^{-1}(D)\,\theta^+A_-^{-1}(D)\,\delta^{(p_j)}(x_n)\,v_j(x)'.\tag{2.24}$$

Но для того чтобы $u_+\in\overset{0}{H}{}^{s+l,\,p}(R^n_+)$, необходимо и достаточно выполнять условия разрешимости (2.8). Таким образом, функции $v_j(x')$ должны удовлетворять системе уравнений на $R^{n-1}_{x'}$,

$$\gamma_{(k-1)}A_-^{-1}(D)\,B^{(j)}(D)\,\delta^{(p_j)}(x_n)\,v_j(x')=\varphi_k(x'),\quad k=1,2,\ldots,m,\tag{2.25}$$

где $\varphi_k(x')=\gamma_{k-1}A_-^{-1}(D)\,lf\in B^{s-k-\frac{1}{p},\,p}(R^{n-1})$, решение которой отыскивается в $\bigoplus_{j=1}^{m}B^{s-l+r_j+1-\frac{1}{p},\,p}(R^{n-1}_x)$.

Поступая как и в предыдущем пункте, найдем, что система (2.25), а вместе с ней и уравнение (2.22) разрешимы в $\overset{0}{H}{}^{s+l,\,p}(R^n_+)\bigoplus_{j=1}^{m}$ $\bigoplus_{j=1}^{m}B^{s-l+r_j+1-\frac{1}{p},p}(R^{n-1}_{x'})$ единственным образом тогда и только тогда, когда

$$\|\det c_{jk}(\zeta')\|_{j,k=1}^{m}\neq 0,\quad \forall\zeta'\in\dot{R}^{n-1}_{\zeta'},$$

где

$$c_{jk}(\zeta')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{B}^{(j)}(\zeta',(1+|\zeta'|^2)^{\frac{1}{2}}t)(1+t^2)^{q_j}(t-i)^{-l}\,t^{q_j+k-1}dt}{\tilde{A}_-^{-1}(\zeta',(1+|\zeta'|^2)^{1/2}t)}$$

принадлежат $m^p_p(R^{n-1}_{\zeta'})$.

§ 3. Псевдодифференциальные операторы с переменными символами в пространствах $H^{sp}(\tilde{R}^n)$

Расширим, как и в [3], пространство R^n добавлением бесконечно удаленной сферы $\mathfrak{M}$ и обозначим это расширение через R^n. В $\tilde{R}^n$ естественным образом (см. [3]) вводится топология, превращающая его в бикомпактное хаусдорфово пространство.

Введем класс $W^{(s,p)}$ псевдодифференциальных операторов, имеющих переменный символ, ограниченных в $H^{s,p}$ и эквивалентных* в каждой точке пространства $\tilde{R}^n$ оператору с постоянным символом.

Определение 3.1. *Будем говорить, что функция* $a(x) \in B^{(m)}(\tilde{R}^n)$, *если* $a(x) \in C^{(m)}(R^n)$, *и существует функция* $a\left(\frac{x}{|x|}\right)$ *такая, что* $a'(x) = a(x) - a\left(\frac{x}{|x|}\right)$ *стремится к нулю при* $|x| \to \infty$ *вместе со всеми своими производными до порядка* m *равномерно по* $\omega = \frac{x}{|x|}$.

Рассмотрим операторы $a^{(N)}(x, D)$ следующего вида:

$$a^{(N)}(x, D) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) A_i(D), \tag{3.1}$$

где $a_i(x) \in B^{(m)}(\tilde{R}^n)$, $A_i(D) \in l_p^p$.

Определение 3.2. *Пополнение множества операторов вида (3.1) по существенной норме пространства* $(H^{s,p} \to H^{s,p})$, $|s| \leqslant m$, *обозначим через* $W^{(s,p)}$.

Это определение корректно, так как оператор (3.1) ограничен в $H^{s,p}$.

Предложение 3.1. *Оператор* $a(x, D) \in W^{(s,p)}$ *есть оператор локального типа в пространстве* $H^{s,p}(\tilde{R}^n)$, *эквивалентный в конечной точке* x_0 *пространства* $\tilde{R}^n$ *оператору* $a(x_0, \infty) I$, *где* I — *единичный в* $H^{s,p}$ *оператор, а*

$$a(x_0, \infty) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x_0) A_i(\infty), \tag{3.2}$$

причем числовой ряд (3.2) сходится.

В бесконечно удаленной точке, отвечающей направлению ω_0, *оператор* $a(x, D)$ *эквивалентен оператору*

$$a(\omega_0, D) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\omega_0) A_i(D), \tag{3.3}$$

причем ряд (3.3) сходится по равномерной операторной топологии пространства $(H^{s,p} \to H^{s,p})$ *и определяет оператор* $a(\omega_0, D) \in l_p^p$.

Предложение 3.1 доказывается так же, как и предложение 4.2 из [18]

Таким образом, в каждой точке $x_0 \in \tilde{R}^n$ у оператора $a(x, D) \in W^{(s,p)}$ существует локальный представитель — оператор из l_p^p, а, следовательно, имеет смысл

---

*Определения и утверждения из теории операторов локального типа, необходимые здесь, приведены в [3]. Модификация этих утверждений для банаховых пространств обобщенных функций содержится в [18].

Определение 3.3. *Символом оператора назовем функцию*

$$\tilde{a}(x, \xi) = \begin{cases} a(x, \infty), & (x, \xi) \in \tilde{R}^n_\xi \times \infty, \\ a(\omega, \xi), & x \in \mathfrak{M} \times \dot{R}^n_\xi. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Так же, как и в [18], можно доказать, что справедлива

Теорема 3.1. *Оператор $a(x, D) \in W^{(s, p)}$ есть оператор Нетера в пространстве $H^{s, p}(\tilde{R}^n)$ тогда и только тогда, когда его символ $\tilde{a}(x, \xi)$ отличен от нуля на множестве $\Delta = (R^n \times \infty) \cup (\mathfrak{M} \times \dot{R}^n_\xi)$.*

Определение 3.3. *Будем говорить, что оператор $a(x, D) \in \mathrm{R}^{(m, p)}$, если*

$$a(x, D) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x) A_i(D), \qquad (3.5)$$

где $a_i(x) \in B^{(m)}(\tilde{R}^n)$, $A_i(D) \in \mathrm{R}$, а ряд (3.5) сходится по равномерной операторной топологии пространства $(H^{s, p} \to H^{s, p})$, $|s| \leqslant m$.

Очевидно, что $\mathrm{R}^{(m, p)} \subset W^{(s, p)}$, $|s| \leqslant m$, и в каждой точке $x \in \tilde{R}^n$ оператор $a(x, D)$ эквивалентен оператору из R.

Отметим, что в пространствах $H^{s, p}$ теоремы о квазиэквивалентности операторов формулируются и доказываются так же, как и в случае пространств Соболева — Слободецкого H^s (см. [18]).

§ 4. Псевдодифференциальные уравнения в неограниченных областях, конических на бесконечности

1°. Пусть G — область в пространстве R^n с бесконечно дифференцируемой границей ∂G. Через $\overset{\circ}{H}{}^{s, p}(G)$ обозначается множество функций из $H^{s, p}$, носители которых лежат в G, а через $H^{s, p}(G)$ — пространство, состоящее из сужений на G обобщенных функций, принадлежащих $H^{s, p}$ с естественной нормой фактор-пространства $H^{s, p}/H^{s, p}(CG)$. Оператор сужения, действующий из $H^{s, p}$ в $H^{s, p}(G)$ обозначается через P_G.

Через $\gamma_{\partial G}$ обозначается оператор, сопоставляющий функции $u \in H^{s, p}(G)$, $s > \frac{1}{p}$, ее сужение на границу ∂G области G. Оператор $\gamma_{\partial G}$ непрерывен из $H^{s, p}(G)$ в $B^{s-1/p, p}(\partial G)$, где $B^{s-1/p, p}(\partial G)$ — пространство Бесова на многообразии ∂G [11]. Через $\gamma^{(k)}_{\partial G}$ обозначается оператор $\gamma \frac{\partial^k}{\partial \nu^k}$, где $\frac{\partial^k}{\partial \nu^k}$ — оператор дифференцирования по направлению внутренней нормали к ∂G. Оператор $\gamma^{(k)}_{\partial G}$ непрерывен из $H^{s, p}(G)$ в $B^{s-k-1/p, p}(\partial G)$ при $s > k + \frac{1}{p}$ [10].

2°. Пусть G — замкнутая область в $\tilde{R}^n$, имеющая на бесконечности коническую структуру, с бесконечно дифференцируемой границей ∂G.

Рассмотрим уравнение

$$P_G A(x, D) u_+ + T u_+ = f, \quad f \in H^{s-l, p}(G), \qquad (4.1)$$

где T — вполне непрерывный оператор из $\overset{\circ}{H}{}^{s+l, p}(G)$ в $H^{s-l}, p(G)$, а

$$A(x, D) = (1 + |D|^2)^l) a(x, D), \; a(x, D) \in \mathrm{R}^{(r, p)}, \; r \geqslant |s + l|, \qquad (4.2)$$

где l — целое число, положительное или отрицательное. Решение уравнения (4.1) отыскивается в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{s+l, p}(G)$.

Постановка корректных задач для уравнения (4.1) зависит от s. При $s < -1 + \frac{1}{p}$ для уравнения (4.1) корректна граничная задача, при $s > \frac{1}{p}$ — задача с дополнительными потенциалами. Если $-1 + \frac{1}{p} < s < \frac{1}{p}$, то уравнение (4.1) не требует дополнительных условий и ведет себя как интегральное.

$$1°.\ s = -m + \delta,\quad -1 + \frac{1}{p} < \delta < \frac{1}{p},\quad m > 0.$$

Уравнение (4.1) будем рассматривать при граничных условиях

$$\gamma_{\partial G}^{(p_j)} B^{(j)}(x, D) u_+ = f_j,\quad f_j \in B^{s+l-r_j-\frac{1}{p}, p}(\partial G),\quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.3}$$

где

$$B^{(j)}(x, D) = (1 + |D|^2)^{q_j} b^{(j)}(x, D),\quad b^{(j)}(x, D) \in W^{(s+l, p)}, \tag{4.4}$$

а $r_j = p_j + 2q_j$, при этом

$$r_j < s + l - \frac{1}{p},\quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.5}$$

Положим

$$d_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 + t^2)^{q_j} t^{p_j + k - 1} dt}{(t + i)^l},\quad j, k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.6}$$

Далее, обозначим через $\nu(x)$ единичный вектор внутренней нормали к границе ∂G в бесконечно удаленной точке x, отвечающей направлению ω, $\zeta_{\nu(x)}$ — проекция вектора $\zeta \in R_\zeta^n$ на направление, двойственное к $\nu(x)$ относительно $(x, \zeta) = x_1\zeta_1 + \cdots + x_n\zeta_n$, $R_{\zeta'_{\nu(x)}}^{n-1}$ — ортогональное дополнение к пространству, натянутому на $\zeta_{\nu(x)}$.

Определим

$$d_{jk}(\omega, \zeta'_{\nu(x)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^{(j)}(\omega, \zeta'_{\nu(x)}, (1 + |\zeta'_{\nu(x)}|^2)^{1/2} t)(t^2 + 1)^{q_j} t^{p_j + k - 1} dt}{(t + i)^l a_+(\omega, \zeta'_{\nu(x)}, (1 + |\zeta'_{\nu(x)}|^2)^{\frac{1}{2}} t)}, \tag{4.7}$$

где $a_+(\omega, \zeta'_{\nu(x)}, \zeta_{\nu(x)})$ находится из факторизации $a(\omega, \zeta)$ вдоль направления $\zeta_{\nu(x)}$.

Так же, как и в § 2, можно показать, что интеграл (5.7) при фиксированном ω определяет по $\zeta'_{\nu(x)}$ функцию из $m_p^p(R_{\zeta'_{\nu(x)}}^{n-1})$.

Граничную задачу (4.1), (4.3) запишем в операторной форме

$$U(x, D) u_+ = \{P_G A(x, D) u_+, \gamma_{\partial G}^{(p_1)} B^{(1)}(x, D) u_+, \ldots, \gamma_{\partial G}^{(p_m)} B^m \times \\ \times (x, D) u_+\} = (f, f, \ldots, f_m). \tag{4.8}$$

Оператор $U(x, D)$ рассматривается из $\overset{\circ}{H}{}^{s+l, p}(G)$ в пространство. $H_p(G) = H^{s-l, p}(G) \bigoplus_{j=1}^{m} B^{s+l-r_j-1/p, p}(\partial G)$.

Теорема 4.1. *Оператор $U(x, D)$, отвечающий граничной задаче (4.1), (4.3), является оператором Нетера из $\overset{\circ}{H}{}^{s+l, p}(G)$ в $H_p(G)$ тогда и только тогда, когда*

1) $\tilde{a}(x, \zeta) \neq 0$, $\forall (x, \zeta) \in \Delta_G = (G \times \{\infty\}) \cup ((\mathfrak{M} \cap G) \times \dot{R}_\zeta^n)$.

2) $\det \| d_{jk} \|_{j, k=1}^m \neq 0$, $\det \| d_{jk}(\omega, \zeta'_{\nu(x)}) \|_{j, k=1}^m \neq 0$,
$\forall (x, \zeta'_{\nu(x)}) \in (\mathfrak{M} \cap \partial G) \times \dot{R}_{\zeta'_{\nu(x)}}^{n-1}$.

Доказательство теоремы 4.1 аналогично доказательству соответствующей теоремы из [18].

3°. Уравнение

$$P_G A(x, D) u_+ = f, \ f \in H^{s-l, p}(G), \qquad (4.9)$$

где $a(x, D) \in W^{(s+l, p)}$ в том случае, когда $-1+\frac{1}{p} < s < \frac{1}{p}$ не требует дополнительных условий и справедлива

Теорема 4.2. *Оператор (4.9) в случае, когда* $-1+\frac{1}{p} < s < \frac{1}{p}$ и $a(x, D) \in W^{(s+l, p)}$, является оператором Нетера из $\overset{\circ}{H}{}^{s+l, p}(G)$ в $H^{s-l, p}(G)$ тогда и только тогда, когда символ $\tilde{a}(x, \zeta) \neq 0$, $\forall (x, \zeta) \in \Delta_G$.

4°. Пусть $s = m + \delta$, $-1+\frac{1}{p} < \delta < \frac{1}{p}$, $m > 0$.

В этом случае для уравнения (4.1) рассматривается задача с дополнительными потенциалами

$$V(v_+, v_1, \ldots, v_m) = P_G A(x, D) v_+ + \sum_{j=1}^{m} P_G B^{(j)}(x, D) v_j(x') + T v_+ = f, \qquad (4.10)$$

где оператор $A(x, D)$ имеет вид (4.2), а операторы $B^{(j)}(x, D)$ имеют вид (4.4), причем

$$s - l + r_j + \frac{1}{p'} < 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (4.11)$$

Так же, как и в 2°, вводятся матрицы $\| d_{jk} \|_{j, k=1}^{m}$, $\| d_{jk}(\omega, \zeta'_{\nu(x)}) \|_{j, k=1}^{m}$ элементы которых определяются формулами (4.6) и (4.7), в которых вместо $(t+i)$ стоит $(t-i)$, а вместо $a_+(\omega, \zeta'_{\nu(x)}, \zeta_{\nu(x)})$ стоит $a(\omega, \zeta'_{\nu(x)}, \zeta_{\nu(x)})$.

Теорема о нетеровости оператора V из пространства $\overset{\circ}{H}{}^{s+l, p}(G) \bigoplus_{j+1}^{m} \times$ $\times B^{s-l+r_j+\frac{1}{p'}, p}(\partial G)$ в пространство $H^{s-l, p}(G)$ формулируется так же, как и теорема 4.1.

Результаты работы без существенных изменений переносятся на более широкий, чем $W^{(s, p)}$ класс операторов, полученный замыканием по существенной норме пространства $(H^{s, p} \to H^{s, p})$ операторов вида $\sum_{j=1}^{N} a_j(x)(1 + |D|^2)^{l/2} A_j(D)$, где $a_j(x)$, $A_j(\xi)$ непрерывны на $\tilde{R}^n$ и удовлетворяют оценкам

$$|D^\alpha a_j(x)| \leqslant C_\alpha^j (1 + |x|)^{-|\alpha|}, \ |D^\alpha A_j(\xi)| \leqslant C_\alpha^j (1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$$

для всех мультииндексов α. Символом оператора этого класса является непрерывная функция, определенная на границе множества $\tilde{R}^n_x \times \tilde{R}^n_\xi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Вишик и Г. И. Эскин. Уравнения в свертках в ограниченной области. УМН, 20, вып. 3 (123), 1965.
2. И. Б. Симоненко. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I. Изв. АН СССР, серия матем. 29, 1965.
3. И. Б. Симоненко. Операторы типа свертки в конусах. «Матем. сб.». т. 74 (116), 2, 1967.
4. М. И. Вишик и Г. И. Эскин. Уравнения в свертках переменного порядка. Тр. Моск. матем. об-ва, т. 16, 1967.
5. Л. С. Гольденштейн, И. И. Гохберг. О многомерном интегральном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов и его дискретном аналоге. ДАН СССР, 131, № 1.

6. Л. Хермандер. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига ИЛ, 1962.

7. С. Г. Михлин. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.

8. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1959.

9. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1960.

10. Э. Мадженес. Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных. УМН, т. XXI, вып. 2 (128), 1966.

11. О. В. Бесов. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. «Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова», 60, 1961, 42—81.

12. N. Aranszajn, K. T. Smith. Theory of Bessel potentuals. 1. Ann. Inst. Fourier, 11, 1961, 11, 1964.

13. П. И. Лизоркин. Обобщенное Луивилевское дифференцирование и пространства $L_p^{(r)}$. Теоремы вложения. «Матем. сб.», 60 (102), 1962.

14. И. И. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. УМН, XII, вып. 2, 1957.

15. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, в. 5 (83), 1958.

16. Д. Кон и Л. Ниренберг. Алгебра псевдодифференциальных операторов. Сб. «Псевдодифференциальные операторы», Изд-во «Мир», М., 1967.

17. Л. Хермандер. Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения. Сб. «Псевдодифференциальные операторы». Изд-во «Мир», М., 1967.

18. В. С. Рабинович. Псевдодифференциальные уравнения в неограниченных областях с конической структурой на бесконечности. «Матем. сб.», т. 80 (122), № 1 (9) 1969.

Поступила 20 января 1970 г.