АЛГЕБРА ОПЕРАТОРНЫХ УЗЛОВ

Э. М. Жмудь

В теории треугольных и жордановых представлений линейных операторов важную роль играет введенное М. С. Бродским и М. С. Лившицем понятие операторного узла [1, 2],

Операторный узел представляет собой агрегат $A \doteq \begin{pmatrix} \tau & \varphi & j \\ H & & E \end{pmatrix}$, в состав которого входят комплексные гильбертовы пространства H и E, линейный оператор τ, действующий в H, эрмитова инволюция j, действующая в E, и линейное отображение φ пространства H в E^*. Существуют два вида операторных узлов, которые мы в дальнейшем будем называть узлами I и II рода. В зависимости от рода операторного узла отображения τ, φ и j должны быть связаны между собой одним из следующих соотношений:

$$\varphi^* j \varphi = \begin{cases} \varepsilon - \tau^* & \text{(условие узла I рода)}^{**} \\ \frac{1}{2i}(\tau - \tau^*) & \text{(условие узла II рода).} \end{cases}$$

При этом в случае узла I рода оператор τ предполагается невырожденным.

В настоящей статье выясняется алгебраическая природа операторного узла. В связи с этим оказалось целесообразным рассматривать операторные узлы с точки зрения, несколько отличной от общепринятой (изложенной выше).

В новом понимании операторный узел является агрегатом не пяти, а лишь двух объектов. Прежде всего замечаем, что задание в гильбертовом пространстве E эрмитовой инволюции i равносильно заданию в E некоторой, вообще говоря, индефинитной невырожденной метрики. Поэтому, давая определение операторного узла, мы не указывая инволюции i, будем считать E линейным метрическим пространством (т. е. пространством, снабженным скалярным произведением, но не обязательно дефинитным).

Метрику в E всегда будем считать невырожденной. Таким образом, операторный узел становится агрегатом, состоящим из трех объектов: операторов τ, φ и линейного метрического пространства E (пространство H в дальнейшем фиксируется, и поэтому явно в обозначении узла не фигурирует). Следующий шаг заключается в том, что пара $D = \{E, \varphi\}$ рассматривается как самостоятельный объект. Основной функцией этого объекта, названного нами д и а д о й, является перенос метрики из пространства E в пространство H (последнее не обязательно предполагается метрическим): если $(\cdot, \cdot)_E$ — скалярное произведение в E и f_D — метрика (т. е. метрическая билинейная форма), наведенная в H диадой D, то

$$f_D(h_1, h_2) = (\varphi(h_1), \varphi(h_2))_E \quad (h_1, h_2 \in H).$$

Определяющий операторный узел агрегат A рассматривается теперь как пара $\{\tau, D\}$, где τ имеет прежний смысл, а D — некоторая диада. Условия (1) и (2), при которых агрегат A становится операторным узлом (I или II рода) теперь приобретает простой смысл: оператор τ можно рассматривать как фактор, искажающий естественную (гильбертову) метрику пространства H (характер этого искажения зависит от рода операторного

---

* В [1] и [2] действует из E в H, но это различие, очевидно, несущественно.

** ε — тождественный оператор в H; φ^* и τ^*, как обычно, обозначают отображения, сопряженные соответственно с φ и τ.

узла); соотношения (1) и (2) можно рассматривать, как условия согласования метрики f_D, наведенной в H диадой D, и метрики, определяемой в H оператором τ. В частности, соотношением (1) выражается просто факт совпадения метрики f_D с искажением естественной метрики пространства H вызванным оператором τ.

Под H и E будем понимать линейные метрические пространства над произвольным полем K характеристики $\neq 2$. Для простоты мы предполагаем, что все пространства конечномерны и метрика в каждом из них задается некоторой квадратичной формой *. Мы ограничиваемся в настоящей работе рассмотрением лишь операторных узлов I рода, операторные же узлы II рода являются предметом отдельной статьи. Основным объектом, изучаемым в работе, являются все же не столько сами узлы I рода, сколько некоторые их классы, названные нами ввиду их связи с так называемыми типами Витта метрических линейных пространств **типами операторных узлов I рода**.

Для операторных узлов I рода, а затем и для их типов определяется некоторым (и притом весьма естественным) образом закон композиции **, по отношению к которому совокупность типов узлов I рода оказывается группой. Один из основных результатов работы утверждает, что группа типов операторных узлов I рода над полем K изоморфна прямому произведению полной линейной группы $GL(H)$ и группы Витта $W(K)$ над полем K.

Следовательно, можно сделать заключение о существовании точного представления группы $GL(H)$ в группе типов операторных узлов I рода. Доказательство сформулированного выше основного результата использует некоторые (имеющие и самостоятельный интерес) факты о диадах, изложению которых посвящен первый параграф работы. Операторные узлы I рода рассматриваются во втором параграфе. В заключение отметим, что понятие типа определяется и для узлов II рода. При этом оказывается, что типы узлов II рода образуют некоторое кольцо Ли.

Будем пользоваться общепринятой в теории метрических линейных пространств терминологией (см., например, [2] или [3]) ***. Если E — метрическое линейное пространство, то ядро его метрической билинейной формы $f(x, y) = (x; y)_E$ называется **радикалом** E ($\mathrm{Rad}\,E$), Если $\mathrm{Rad}\,E = \{0\}$, метрическое пространство E называется **полупростым** (метрика в E невырождена). Вектор $x \neq 0$ называется **изотропным**, если $x \neq 0$ и $(x, x)_E = 0$. Пространство, не содержащее изотропных векторов, называется **анизотропным**, в противном случае — **изотропным**. Подпространство L метрического линейного пространства E называется **вполне изотропным**, если на нем индуцируется метрикой пространства E нулевая метрика.

Линейный изоморфизм σ метрического пространства E на метрическое пространство E' мы будем называть **изометрией** E на E' ****, если $(\forall x, y \in E)\,(\sigma(x), \sigma(y))_{E'} = (x, y)_E$. Для обозначения изометричности метрических пространств будет употребляться символ $\approxeq$. Линейный изоморфизм σ метрического пространства E на метрическое пространство E' мы назовем **антиизометрией**, если $(\forall x, y \in E)\,(\sigma(x), \sigma(y))_{E'} = -(x, y)_E$. Если E — метри-

---

* В случае, если поле K допускает инволютивный автоморфизм, аналогичный операции сопряжения в поле комплексных чисел, метрики могут задаваться эрмитовыми относительно этого автоморфизма формами. Излагаемая в настоящей статье теория переносится и на этот случай.

** Впервые он был введен в другой форме М. С. Лившицем для узлов неунитарности в статье [3].

*** Для удобства приводим ниже некоторые результаты теории линейных метрических пространств.

**** Более распространен термин «метрический изоморфизм».

ческое линейное пространство, то через E^- обозначается линейное пространство E, снабженное скалярным произведением $(x, y)_{E^-} = -(x, y)_E$. Очевидно, E^- антиизометрично E.

Полупростое метрическое линейное пространство E называется **нейтральным**, если оно разлагается в ортогональную сумму двух антиизометричных друг другу подпространств. Двумерные нейтральные метрические пространства называются **гиперболическими плоскостями**. Все гиперболические плоскости над полем K изометричны между собой *.

Необходимым и достаточным условием нейтральности полупростого метрическо пространства является его разложимость в ортогональную сумму некоторого числа гиперболических плоскостей. Произвольное полупростое метрического пространство E разложимо в ортогональную сумму нейтрального подпространства N (нейтральная компонента пространства E) и анизотропного подпространства G (главная компонента E). В силу известной теоремы Витта, главная и нейтральная компоненты метрического пространства E определяются им с точностью до изометрии однозначно.

Полупростые метрические пространства E_1 и E_2 относятся к одному и тому же типу Витта ($E_1 \approx E_2$) **, если главные компоненты пространств E_1 и E_2 изометричны. Легко видеть, что $E_1 \approx E_2$ тогда и только тогда, когда существуют такие нейтральные пространства N_i $(i = 1, 2)$, что $N_1 \dot{+} E_1 \cong \cong N_2 \dot{+} E_2$ ($\dot{+}$ символ внешней прямой суммы). На множестве типов метрических линейных пространств над полем K вводится операция сложения: если $\mathfrak{E}_i$ — тип пространства E_i $(i = 1, 2)$, то $\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$ — тип пространства $E_1 \dot{+} E_2$. Относительно операции сложения типы метрических линейных пространств над полем K образуют абелеву группу $W(K)$, называемую группой Витта над полем K. Нулевым элементом группы $W(K)$ является **нейтральный тип**, состоящий из нейтральных пространств над K. Тип $-\mathfrak{E}$ противоположный типу $\mathfrak{E}$ пространства E совпадает с типом пространства E^-.

§ 1. Диады

1. Пусть H — фиксированное конечномерное (не обязательно метрическое) линейное пространство над полем K ($\mathrm{Char}\, K \neq 2$).

Определение 1.1. *Диадой назовем пару $D = \{E, \varphi\}$, где E — конечномерное полупростое метрическое линейное пространство над полем K (пространство диады D), φ — линейное отображение пространства H в E.*

Размерностью $\dim D$ диады $D = \{E, \varphi\}$ будем называть размерность пространства E.

Диада D является объектом, переносящим метрику из пространства E в H: метрика, наведенная в H диадой D, задается симметрической билинейной формой f_D, определяющейся соотношением

$$f_D(h_1, h_2) = (\varphi(h_1), \varphi(h_2))_E \quad (h_1, h_2 \in H).$$

Обозначив через H_f пространство H, наделенное метрикой f, будем, очевидно, иметь $\mathrm{Rad}\, H_{f_D} \supseteq \mathrm{Ker}\, \varphi$. Поэтому метрика f_D, вообще говоря, оказывается вырожденной.

Теорема 1.1. *Для любой наперед заданной в H метрики f существует такая диада $D = \{E, \varphi\}$, что $f_D = f$. Пространство E диады D можно всегда выбрать среди подпространств пространства H.*

---

* В гиперболической плоскости всегда существует базис с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ [см. 4].

** Это обозначение не является общепринятым.

Доказательство. Пусть $R = \operatorname{Rad} H_f$, E — любое прямое дополнение к R в H. Очевидно, E является полупростым подпространством пространства H, причем имеет место ортогональное разложение

$$H_f = R \oplus E. \qquad (1.1)$$

Если φ — проектор H_f на E, отвечающий разложению (1.1), то, полагая $D = \{E, \varphi\}$, получим диаду, обладающую требуемым свойством.

Определение 1.2. *Диады $D_i = \{E_i, \varphi_i\}$ $(i = 1, 2)$ назовем изометричными (антиизометричными), если существует такая изометрия (антиизометрия) σ пространства E_1 и E_2, что диаграмма*
$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\sigma"] & E_2 \\ & H \arrow[ul, "\varphi_1"] \arrow[u, "\varphi_2"'] \end{tikzcd}$$
является коммутативной.

Для указания изометричности диад D_1 и D_2 будем пользоваться обозначением $D_1 \cong D_2$. Если $D_1 \cong D_2$, то, как легко видеть, $f_{D_1} = f_{D_2}$. Если же диады D_1 и D_2 антиизометричны, то $f_{D_1} = -f_{D_2}$.

Диаду $D^- = \{E^-, \varphi\}$ назовем противоположной диаде $D = \{E, \varphi\}$. Очевидно, диады D_1 и D_2 антиизометричны тогда и только тогда, когда $D_2 \cong D_1^-$.

Определение 1.3. *Внешней прямой суммой диад $D_i = \{E_i, \varphi_i\}$ $(i = 1, 2)$ назовем диаду*

$$D_1 \dotplus D_2 = \{E_1 \dotplus E_2, \ \varphi_1 \dotplus \varphi_2\},$$

где $E_1 \dotplus E_2$ — внешняя прямая сумма метрических пространств E_1 и E_2; $\varphi_1 \dotplus \varphi_2$ — линейное отображение H в $E_1 \dotplus E_2$, определяемое равенством $(\varphi_1 \dotplus \varphi_2)(h) = \{\varphi_1(h), \ \varphi_2(h)\}$.*

Без труда проверяется справедливость следующих утверждений:

1. Если D_i и D_i' $(i = 1, 2)$ — диады, причем $D_i \cong D_i'$ $(i = 1, 2)$, то $D_1 \dotplus D_2 \cong D_1' \dotplus D_2'$.

2. Для любых диад D_i $(i = 1, 2, 3)$

$$D_1 \dotplus D_2 \cong D_2 \dotplus D_1,$$
$$(D_1 \dotplus D_2) = \dotplus D_3 \cong D_1 \dotplus (D_2 \dotplus D_3).$$

3. Если D_i $(i = 1, 2)$ — диады, то

$$f_{D_1 \dotplus D_2} = f_{D_1} + f_{D_2}.$$

Пусть $D_i = \{E_i, \varphi_i\}$ $(i = 1, 2)$ — диады, пространства E_i $(i = 1, 2)$ которых являются подпространствами (полупростыми) некоторого метрического линейного пространства E. Тогда диаду $D = \{E_1 + E_2, \ \varphi_1 + \varphi_2\}$ будем называть суммой диад D_1 и D_2 (обозначение — $D_1 + D_2$). Если подпространства E_1 и E_2 взаимно ортогональны, сумму диад D_1 и D_2 будем называть ортогональной (обозначение — $D_1 \oplus D_2$). Очевидно, $D_1 \oplus D_2 \cong D_1 \dotplus D_2$.

Определение 1.4. *Будем считать диады $D_i = \{E_i, \varphi_i\}$ $(i = 1, 2)$ принадлежащими к одному и тому же типу или однотипными ($D_1 \approxeq D_2$), если*

---

* Элементами $E_1 \dotplus E_2$ являются пары $\{x_1, x_2\}$, где $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$. Метрика в $E_1 \dotplus E_2$ определяется следующим образом: если $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\} \in E_1 \dotplus E_2$, то $(\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\})_{E_1 \dotplus E_2} = (x_1, y_1)_{E_1} + (x_2, y_2)_{E_2}$.

1°. $E_1 \cong E_2$;

2°. $f_{D_1} = f_{D_2}$.

Из $D_1 \cong D_2$, очевидно, следует $D_1 \cong D_2$. Кроме того, очевидно, $D_1 \cong D_2$ влечет $D_1^- \cong D_2^-$.

Определение 1.5. *Диаду $D = \{E, \varphi\}$ назовем нейтральной, если*

1°. *Пространство E нейтрально;*

2°. $f_D = 0$.

Все нейтральные диады, очевидно, принадлежат к одному и тому же типу, который мы будем называть нейтральным (обозначение — O).

Отметим два очевидных предложения.

Теорема 1.2. *Если D — произвольная и D' — нейтральная диада, то $D \dotplus D' \cong D$.*

Теорема 1.3. *Если D_i и D_i' $(i = 1, 2)$ — диады, причем $D_i' \cong D_i$ $(i=1, 2)$, то $D_1' \dotplus D_2' \cong D_1 \dotplus D_2$.*

Выясним строение нейтральных диад.

Определение 1.6. *Диаду D назовем гиперболической, если она нейтральна и* $\dim D = 2$.

Пространство E гиперболической диады является гиперболической плоскостью.

Теорема 1.4. *Диада D тогда и только тогда является гиперболической, когда она разлагается в ортогональную сумму двух одномерных антиизометричных между собой диад.*

Доказательство. 1. Допустим, что

$$D = D_1 \oplus D_2,$$

где D_i — одномерные антиизометричные между собой диады. Полагая $D = \{E, \varphi\}$, $D_i = \{E_i, \varphi_i\}$ $(i = 1, 2)$, будем иметь *

$$\begin{cases} E = E_1 \oplus E_2, \ \dim E_1 = \dim E_2 = 1, \ E_2 \cong E_1^-, \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \end{cases}$$

Пространство E, очевидно, нейтрально. Так как, кроме того, $f_D = f_{D_1} + f_{D_2} = f_{D_1} - f_{D_1} = 0$, то D — нейтральная и, следовательно, гиперболическая диада.

2. Пусть $D = \{E, \varphi\}$ — гиперболическая диада. Тогда E — гиперболическая плоскость, и поэтому в E можно выбрать ортогональный базис $\{u_1, u_2\}$ с матрицей Грама $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$:

$$(u_1, u_1)_E = -(u_2, u_2)_E = 1, \quad (u_1, u_2)_E = 0. \tag{1.2}$$

Полагая $U_i = \langle u_i \rangle$ ** $(i = 1, 2)$, получим ортогональное разложение

$$E = U_1 \oplus U_2.$$

В силу (1.2) подпространства U_1 и U_2 антиизометричны. Если $h \in H$, то $\varphi(h) = x_1 + x_2$, где $x_i \in U_i$ $(i = 1, 2)$. Определяем линейное отображение пространства H в U_i, полагая $\varphi_i(h) = x_i$ $(i = 1, 2)$. Так как $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, то

$$D = D_1 \oplus D_2, \tag{1.3}$$

где $D_i = \{U_i, \varphi_i\}$ $(i = 1, 2)$. Так как $f_D = 0$, то $(\forall h_1, h_2 \in H)$ $(\varphi(h_1), \varphi(h_2))_E = 0$, откуда легко вытекает, что

$$(\varphi_1(h_1), \varphi_1(h_2))_E = -(\varphi_2(h_1), \varphi_2(h_2))_E. \tag{1.4}$$

* Символ $\oplus$ используется также для обозначения ортогональной суммы подпространств.

** $\langle M \rangle$ — линейная оболочка множества векторов M.

Так как $\operatorname{Im}\varphi_i \in U_i$ и $\dim U_i = 1$ $(i = 1, 2)$, то

$$(\forall h \in H)\ \ \varphi_i(h) = \lambda_i(h)\, u_i\ \ (i = 1, 2), \tag{1.5}$$

где $\{\lambda_i(h)\}_{i=1,\,2}$ — линейные формы на H.

Из (1.4) и (1.5), (1.2) вытекает

$$(\forall h_1, h_2 \in H)\ \ \lambda_1(h_1)\lambda_1(h_2) = \lambda_2(h_1)\lambda_2(h_2). \tag{1.6}$$

Из (1.6), в частности, следует, что $[\lambda_1(h)]^2 = [\lambda_2(h)]^2$, откуда

$$\lambda_1(h) = \pm\lambda_2(h). \tag{1.7}$$

Из (1.7) вытекает, что $\operatorname{Ker}\lambda_1 = \operatorname{Ker}\lambda_2$ и, следовательно,

$$\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2. \tag{1.8}$$

Рассмотрим два случая.

I. $\varphi_1 = 0$. Тогда в силу (1.8) и $\varphi_2 = 0$. Поэтому $D_i = \{U_i, 0\}$ $(i=1, 2)$, и. следовательно,

$$D = \{U_1 \oplus U_2, 0\} = D_1 \oplus D_2.$$

Так как $U_2 \cong U_1^-$, то и $D_2 \cong D_1^-$. Для этого случая теорема, таким образом, доказана.

II. $\varphi_1 \neq 0$. В этом случае $\lambda_1 \neq 0$, и поэтому $(\exists h_0 \in H)$ $\lambda_1(h_0) \neq 0$. В соответствии с (1.7) $\lambda_1(h_0) = \pm\lambda_2(h_0)$. Если $\lambda_1(h_0) = \lambda_2(h_0)$, то в силу (1.6) $(\forall h \in H)$ $\lambda_1(h) = \lambda_2(h)$. Если же $\lambda_1(h_0) = -\lambda_2(h_0)$, то $(\forall h \in H)$ $\lambda_1(h) = -\lambda_2(h)$.

Определим теперь антиизометрию σ подпространства U_1 на U_2, полагая

$$\sigma(u_1) = \begin{cases} u_2, & \text{если } \lambda_1(h_0) = \lambda_2(h_0), \\ -u_2, & \text{если } \lambda_1(h_0) = -\lambda_2(h_0). \end{cases}$$

Тогда на основании (1.5) в любом случае

$$(\sigma\varphi_1)(h) = \lambda_1(h)\,\sigma(u_1) = \lambda_2(h)\, u_2 = \varphi_2(h).$$

Следовательно, $\varphi_2 = \sigma\varphi_1$.

Таким образом, $D_1 = \{U_1, \varphi_1\}$ и $D_2 = \{U_2, \varphi_2\}$—антиизометричные диады. Так как $D = D_1 \oplus D_2$, то утверждение теоремы доказано и в случае II.

Определение 1.7. *Диаду $D = \{E, \varphi\}$ назовем тривиальной, если* $\varphi = 0$.

Теорема 1.5. *Если D — такая нетривиальная диада, что $f_D = 0$, то*

$$D = D_1 \oplus D',$$

где D_1 — гиперболическая диада и $f_{D'} = 0$.

Доказательство. Пусть в прежних обозначениях $D = \{E, \varphi\}$, где $\varphi \neq 0$. Так как $f_D = 0$, то

$$(\forall h \in H)\ \ (\varphi(h),\ \varphi(h))_E = 0. \tag{1.9}$$

Так как $\varphi \neq 0$, то

$$(\exists h_0 \in H)\ \ u = \varphi(h_0) \neq 0.$$

Из (1.9) вытекает, что $(u, u) = 0$. Следовательно, u — изотропный вектор пространства E. Из полупростоты пространства E вытекает, что

$$(\exists v \in E)\ \ (u, v)_E = 1.$$

Положим $E_1 = \langle u, v\rangle$. Так как матрица Грама $\Gamma\{u, v\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ невырождена, то E_1 — полупростое подпространство. Так как E_1 содержит изотропный вектор u, то E_1 — гиперболическая плоскость *. Из полупростоты E_1 вытекает существование для E_1 ортогонального дополнения E'.

Исходя из ортогонального разложения $E = E_1 \oplus E'$, как и в п. 1 доказательства теоремы 1.7, мы получим ортогональное разложение диады D:

$$D = D_1 \oplus D',$$

где $D_1 = \{E_1, \varphi_1\}$, $D' = \{E', \varphi'\}$; линейные отображения φ_1 и φ' определяются условиями $\varphi = \varphi_1 + \varphi'$, $\operatorname{Im}\varphi_1 \subseteq E_1$, $\operatorname{Im}\varphi' \subseteq E'$. Докажем, что D_1 — нейтральная (и следовательно, гиперболическая) диада. Так как E_1 нейтрально, то достаточно показать, что $f_{D_1} = 0$. Заметим прежде всего, что $\operatorname{Im}\varphi_1 = \langle u\rangle$. Действительно, из $\operatorname{Im}\varphi_1 = E_1$ следовало бы, в частности, что $v = \varphi_1(h_1)$, где $h_1 \in H$. Таким образом, $\varphi(h_1) = (\varphi_1 + \varphi')(h_1) = v + w$, где $w = \varphi'(h_1) \in E'$. С другой стороны, $\varphi(h_0) = u$. Так как $f_D = 0$, $u \in E_1$, $w \in E'$, то $0 = (\varphi(h_0), \varphi(h_1))_E = (u, v + w)_E = (u, v)_E = 1$. Противоречие показывает, что $\operatorname{Im}\varphi_1 \neq E_1$, и, следовательно, $\dim\{\operatorname{Im}\varphi_1\} = 1$. Так как $\varphi(h_0) = u \in E_1$, то $\varphi_1(h_0) = 0$. Поэтому $\operatorname{Im}\varphi_1 = \langle u\rangle$.

Так как u — изотропный вектор, отсюда вытекает, что $(\forall h_1, h_2 \in H)$ $f_{D_1}(h_1, h_2) = (\varphi_1(h_1), \varphi_1(h_2))_E = 0$. Следовательно, $f_{D_1} = 0$. Итак, D_1 — гиперболическая диада. То обстоятельство, что $f_{D'} = 0$, вытекает из соотношений $f_D = f_{D_1} + f_{D'}$, $f_D = f_{D_1} = 0$.

Теорема доказана.

Определение 1.8. *Тривиальную диаду $\{E, 0\}$ назовем несократимой, если пространство E анизотропно (т. е. сводится к одной лишь своей главной компоненте).*

Из теоремы 1.5 вытекает

Теорема 1.6. *Если D такая диада, что $f_D = 0$, то*

$$D = D_1 \oplus \cdots \oplus D_k = D_T,$$

где $\{D_i\}_{1 \leqslant i \leqslant k}$ — гиперболические диады (некоторые из них могут быть тривиальными) и D_T — несократимая тривиальная диада.

Доказательство. Последовательно применяя теорему 1.5, после конечного числа шагов представим диаду D в виде $D = D_1 \oplus \cdots \oplus D_l \oplus D''$, где D'' — тривиальная диада, $\{D_i\}_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — гиперболические диады. Пусть $D'' = \{E'', 0\}$. Исходя из виттовского разложения $E'' = E''_N \oplus E''_G$ пространства E'' на нейтральную и главную компоненты E''_N и E''_G, получим разложение $D'' = D''_N \oplus D''_G$, где $D''_N = \{E''_N, 0\}$ — тривиальная нейтральная диада, $D''_G = D_T$ — тривиальная несократимая диада. Представив нейтральное пространство E''_N в виде ортогональной суммы $E_{l+1} \oplus \cdots \oplus E_k$ гиперболических плоскостей, разложим диаду D''_N в ортогональную сумму гиперболических тривиальных диад: $D''_N = D_{l+1} \oplus \cdots \oplus D_k$. В результате для диады получается требуемое разложение.

Теорема 1.7. *Необходимым и достаточным условием нейтральности диады является ее разложимость в ортогональную сумму гиперболических диад.*

Доказательство. Ортогональная сумма гиперболических диад, очевидно, является нейтральной диадой. Если, обратно, диада D нейтральна, представим ее на основании теоремы 1.6 в виде $D_N + D_T$, где D_N — ортогональная сумма гиперболических диад, D_T — несократимая тривиальная

* Полупростое метрическое пространство тогда и только тогда является гиперболической плоскостью, когда оно двумерно и изотропно [4].

диада. Пространством диады D_T является главная компонента E_G пространства E диады D; так как последнее нейтрально, то $E_G = \{0\}$, и, следовательно, $D = \{\{0\}, 0\}$ и $D = D_N \oplus \{\{0\}, 0\} = D_N$.

Теорема 1.8. *Диада D тогда и только тогда является нейтральной когда $D = D_1 \oplus D_2$, где D_1 и D_2 — антиизометричные диады.*

Доказательство. 1. Пусть $D = D_1 \oplus D_2$, $D_2 \cong D_1^-$. Полагая $D = \{E, \varphi\}$, $D_i = \{E_i, \varphi_i\}$ $(i = 1, 2)$, будем иметь $E_2 \cong E_1^-$, $E = E_1 \dotplus E_2 \cong E_1 \dotplus E_1^-$. Следовательно, пространство E нейтрально. Далее, $f_{D_2} = f_{D_1^-} = -f_{D_1}$, откуда $f_D = f_{D_1} + f_{D_2} = 0$. Таким образом, D — нейтральная диада.

2. Допустим, что D — нейтральная диада. Тогда — в силу теоремы 1.7 $D = D^{(1)} \oplus \cdots \oplus D^{(k)}$, где $\{D^{(i)}\}_{1 \leqslant i \leqslant k}$ — гиперболические диады. Каждая из этих диад $D^{(i)}$, на основании теоремы 1.4, разлагается в ортогональную сумму двух одномерных антиизометричных между собой диад D_i' и D_i'' : $D^{(i)} = D_i' \oplus D_i''$, $D_i'' \cong D_i'^-$. Поэтому $D = D_1 \oplus D_2$, где $D_1 = D_1' \oplus \cdots \oplus D_k'$, $D_2 = D_1'' \oplus \cdots \oplus D_k''$. Очевидно, $D_2 \cong D_1^-$.

Теорема 1.9. *Диады D_1 и D_2 однотипны тогда и только тогда когда существуют такие нейтральные диады D_N' и D_N'', что $D_1 \dotplus D_N' \cong D_2 \dotplus D_N''$.*

Доказательство. 1. Если $D_1 \simeq D_2$, то $D_1 \dotplus D_2^- = D_N''$ — нейтральная диада. Остается заметить, что

$$D_2 \dotplus D_N'' \cong D_N'' \dotplus D_2 \cong D_1 \dotplus (D_2^- \dotplus D_2) = D_1 \dotplus D_N',$$

где $D_N' = D_2^- \dotplus D_2$ — нейтральная диада.

2. Если $D_1 \dotplus D_N' \cong D_2 \dotplus D_N''$, где D_N' и D_N'' — нейтральные диады, то $D_1 \simeq D_1 \dotplus D_N' \simeq D_2 \dotplus D_N'' \simeq D_2$, откуда и следует, что $D_1 \simeq D_2$.

Примечание. Если операцию прямого сложения диады с нейтральной диадой мы назовем операцией удлинения, то однотипность диад D_1 и D_2 равносильна возможности их удлинения до изометричных между собой диад.

3. На множестве $\boldsymbol{D}(H)$ типов диад, отвечающих заданному пространству H, может быть определена структура группы. Пусть $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ — заданные типы диад. Суммой $\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$ типов $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ назовем тип диады $D_1 \dotplus D_2$, где D_i — диада типа $\mathbf{D}_i$ $(i = 1, 2)$. Так как в силу теоремы 1.3 тип диады $D_1 \dotplus D_2$ не зависит от выбора диад D_i $(i = 1, 2)$, то данное нами определение операции сложения типов диад корректно. Из приведенных в начале параграфа свойств диад следует, что операция сложения коммутативна и ассоциативна и, таким образом, $\boldsymbol{D}(H)$ является полугруппой. Из определения 1.5 следует, что нулевым элементом полугруппы $\boldsymbol{D}(H)$ является нейтральный тип $\mathbf{O}$. Наконец, если $\mathbf{D}$ — тип диады D, $\mathbf{D}^-$ — тип диады D^- (он, очевидно, вполне определяется типом диады D), то в силу теоремы 1.11 $\mathbf{D} + \mathbf{D}^- = \mathbf{O}$. Следовательно, $\mathbf{D}^-$ — элемент полугруппы $\boldsymbol{D}(H)$, противоположный к $\mathbf{D}$. Тем самым доказано, что $\boldsymbol{D}(H)$ — абелева группа.

С целью выяснения строения группы $\boldsymbol{D}(H)$ докажем сначала одно утверждение, существенно дополняющее доказанную выше теорему 1.1.

Теорема 1.10. *Для любого наперед заданного виттовского типа $\mathbf{E}$ линейных метрических пространств и любой метрики f пространства H существует такая диада $D = \{E, \varphi\}$, что тип $E = \mathbf{E}$ и $f_D = f$.*

Доказательство. На основании теоремы 1.1 существует такая диада $D_0 = \{E_0, \varphi_0\}$, что $f_{D_0} = f$. Пусть тип $E_0 = \mathbf{E}_0$. Положим $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0$ и обозначим через E' любое метрическое пространство типа $\mathbf{E}'$. Тогда диада $D = D_0 \dotplus D'$, где $D' = \{E', 0\}$, обладает требуемыми свойствами. Действительно, тип $(E_0 \dotplus E') =$ тип E_0 + тип $E' = \mathbf{E} + (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) = \mathbf{E}$, кроме того, так как $f_{D'} = 0$, то $f_D = f_{D_0} + f_{D'} = f$.

Теорема 1.11. *Группа типов диад $\boldsymbol{D}(H)$ изоморфна прямой сумме группы Витта $\boldsymbol{W}(K)$ и группы $\boldsymbol{F}(H)$ метрик пространства H* *:

$$\boldsymbol{D}(H) \cong \boldsymbol{W}(K) \dotplus \boldsymbol{F}(H).$$

Доказательство. Сопоставим с типом диад $\mathbf{D}$ пару $\{\mathbf{E}_D, f_D\}$, где $\mathbf{E}_D$ — тип пространства E любой диады $D = \{E, \varphi\}$ типа $\mathbf{D}$, $f_{\mathbf{D}} = f_D$.

Если $\mathbf{D}_i$ $(i = 1, 2)$ типы диад, то $\mathbf{E}_{\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2} = \mathbf{E}_{\mathbf{D}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{D}_2}$, $f_{\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_2} = f_{\mathbf{D}_1} + f_{\mathbf{D}_2}$. Так как в силу определения 4 тип $\mathbf{D}$ в свою очередь однозначно определяется парой $\{\mathbf{E}_{\mathbf{D}}, f_{\mathbf{D}}\}$, то отображение $\mathbf{D} \to \{\mathbf{E}_{\mathbf{D}}, f_{\mathbf{D}}\}$ является изоморфизмом группы $\boldsymbol{D}(H)$ в группу $\boldsymbol{W}(K) \dotplus \boldsymbol{F}(H)$. Наконец, «теорема независимости» 1.10 показывает, что это отображение эпиморфно и, следовательно, является изоморфизмом группы $\boldsymbol{D}(H)$ на группу $\boldsymbol{W}(K) \dotplus \boldsymbol{F}(H)$.

4. В заключение выясним строение произвольных (не обязательно нейтральных) диад.

Определение 1.9. *Назовем диаду D несократимой, если ее невозможно представить в виде $D = D_1 \oplus D'$, где D_1 такая нейтральная диада, что $\dim D_1 \geqslant 2$. Диаду D назовем абсолютно несократимой, если ее невозможно представить в виде $D = D_1 \oplus D'$, где $f_{D_1} = 0$, $\dim D_1 > 0$.*

(Очевидно, абсолютно несократимая диада является вместе с тем несократимой).

Теорема 1.12. *Однотипные несократимые диады изометричны.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{D}$ — тип диад, $f_{\mathbf{D}}$ — метрика, наведенная в H диадами типа $\mathbf{D}$. Если $R = \operatorname{Rad} H_{f_D}$ и H_0 — прямое дополнение R в H, то имеет место ортогональное разложение

$$H_{f_{\mathbf{D}}} = H_0 \oplus R. \tag{1.10}$$

Подпространство H_0 является, очевидно, полупростым. Пусть $D = \{E, \varphi\}$ — диада типа $\mathbf{D}$. Положим

$$E_0 = \varphi(H_0). \tag{1.11}$$

Ограничение $\varphi \downarrow H_0$ отображения φ на подпространстве H_0 является изометрией H_0 на E_0. Действительно, если $\varphi(h_0) = 0$, $h_0 \in H_0$, то $(\forall h \in H) f_D(h_0, h) = (\varphi(h_0), \varphi(h))_E = 0$, откуда вытекает, что $h_0 \in R$. Поэтому, $h_0 = 0$. Таким образом, $E_0 \cong H_0$ и, следовательно, E_0 — полупростое метрическое пространство. Отсюда вытекает, что E_0 обладает в E ортогональным дополнением E_1:

$$E = E_0 \oplus E_1.$$

Если $h \in H$, то $\varphi(h) = x_0 + x_1$, где $x_i \in E_i$ $(i = 0, 1)$. Определим линейные отображения φ_0 и φ_1 пространства H в E_0 и E_1, полагая $\varphi_i(h) = x_i$ $(i = 0, 1)$. Тогда $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, и поэтому

$$D = D_0 \oplus D_1, \tag{1.12}$$

где $D_i = \{E_i, \varphi_i\}$, $(i = 0, 1)$. Из (1.11) и (1.12) вытекает, что

$$\varphi_1(H_0) = \{0\}. \tag{1.13}$$

Далее, если $h \in R$, то $(\forall h_0 \in H_0)$ $(\varphi(h), \varphi(h_0))_E = f_D(h, h_0) = 0$. Поэтому $\varphi(h) \perp E_0$ и, следовательно, $\varphi(h) \in E_1$. Таким образом, $\varphi(R) \subseteq E_1$, откуда вытекает, что

$$\varphi_0(R) = \{0\}, \tag{1.14}$$

$$(\forall h \in R) \ \varphi_1(h) = \varphi(h). \tag{1.15}$$

* Имеется ввиду аддитивная группа симметричных билинейных форм на H.

Пусть h', $h'' \in H$. Тогда

$$f_{D_1}(h', h'') = (\varphi_1(h'), \varphi_1(h''))_E.$$

Полагая $h' = h'_0 + h'_R$, $h'' = h''_0 + h''_R$, где h'_0, $h''_0 \in H_0$, h'_R, $h''_R \in R$, будем иметь в силу (1.13) и (1.15)

$$\varphi_1(h') = \varphi_1(h'_R) = \varphi(h'_R),$$
$$\varphi_1(h'') = \varphi_1(h''_R) = \varphi(h''_R).$$

Поэтому $f_{D_1}(h', h'') = (\varphi(h'_R), \varphi(h''_R))_E = f_D(h'_R, h''_R)$.

Следовательно,

$$f_{D_0} = 0. \tag{1.16}$$

Докажем теперь, что диада D_0 определена типом диады D с точностью до изометрии однозначно. Заметим, прежде всего, что в силу (1.13) $\varphi_0 \downarrow H_0 \doteq \varphi \downarrow H_0$. Поэтому $\sigma = \varphi_0 \downarrow H_0$ — изометрия H_0 на E_0.

Рассмотрим диаду

$$D_H = \{H_0, \eta\}, \tag{1.17}$$

где η — линейное отображение H на H_0, действующее тождественно на H_0 и аннулирующее $R : \eta(R) = \{0\}$. Так как $E_0 = \sigma(H_0)$, $\varphi_0 = \sigma_0\eta$, то $D_0 = \{E_0, \varphi_0\} \cong D_H$. Так как диада D_H не зависит от выбора диады D и для заданного типа может быть зафиксирована, то диада D_0 определяется типом **D** однозначно с точностью до изометрии.

Диада D_H, а потому и D_0, абсолютно несократима. Действительно, допустим, что

$$D_H = D^{(1)} \oplus D^{(2)},$$

где

$$\begin{cases} D^{(i)} = \{H_i, \eta_i\} \quad (i = 1, 2) \\ \eta_i \text{ — линейное отображение } H \text{ в } H_i \\ f_{D^{(1)}} = 0, \ \dim D^{(1)} > 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

Тогда $H_0 = H_1 \oplus H_2$, $\eta = \eta_1 + \eta_2$. Если $h_0 \in H_0$, то $\eta(h_0) = h_0$ и, следовательно, $\eta_1(h_0) + \eta_2(h_0) = h_0$. Поэтому $\eta_1 \downarrow H_0$ и $\eta_2 \downarrow H_0$ — проекторы H_0 на H_1 и H_2, отвечающие прямому разложению $H_0 = H_1 \oplus H_2$. Заметим теперь, что в силу (1.18)

$$(\forall h', h'' \in H_0) \ (\eta_1(h'), \eta_1(h''))_{H_0} = f_{D^{(1)}}(h', h'') = 0.$$

В частности, если h', $h'' \in H_1$, отсюда вытекает (так как $\eta_1(h') = h'$, $\eta_1(h'') = h''$): $(h', h'')_{H_0} = 0$. Это, однако, противоречит полупростоте подпространства H_1. Этим доказывается абсолютная несократимость диады D_H.

Допустим теперь, что диада D несократима. Тогда, очевидно, несократима не только компонента D_0, но и компонента D_1 разложения (1.12). Так как $f_{D_1} = 0$, то на основании теоремы 1.9 диада D_1 должна быть тривиальной, т. е. $\varphi_1 = 0$ и $D_1 = \{E_1, 0\}$. При этом пространство E_1 должно быть анизотропным (в противном случае E_1 имело бы нейтральную компоненту и диада D_1 была бы сократимой). Обозначив через **E**, $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}_1$ соответственно типы пространств E, E_0 и E_1, в силу $E = E_0 \oplus E_1$ будем иметь $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$. Следовательно, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0$. Так как **E** вполне определяется типом **D**, а тип **E** пространства E_0 совпадает с типом пространства H_0, то $\mathbf{E}_1$ однозначно определяется типом **D**. Заметим теперь, что в силу теоремы Витта все анизотропные пространства типа $\mathbf{E}_1$ изометричны между собой. Поэтому пространство E_1 определяется типом $\mathbf{E}_1$, а потому и типом **D** однозначно с точностью до изометрии. Но в таком случае и тривиальная диада $D_1 = \{E_1, 0\}$ определяется типом $\mathbf{D}$ однозначно с точностью до изометрии. Итак, если D — несократимая диада типа $\mathbf{D}$, то обе компоненты D_0 и D_1 в разложении (1.12) определяются с точностью до изометрии однозначно. Поэтому и диада D определяется с точностью до изометрии однозначно. Теорема тем самым доказана полностью.

Из теоремы 1.12 вытекает для диад следующий аналог теоремы о виттовском разложении метрических пространств.

Теорема 1.13. *Всякая диада допускает ортогональное разложение вида*

$$D = D_N \bigoplus D_G,$$

где D_N — нейтральная, D_G — несократимая диада. Последняя определяется диадой D однозначно с точностью до изометрии.

Диады D_N и D_G мы назовем соответственно нейтральной и главной компонентами диады D *.

§ 2. Операторные узлы I рода

В дальнейшем H предполагается полупростым метрическим линейным пространством. Метрическую билинейную форму в H обозначим через m (таким образом, $m(h_1, h_2) = (h_1, h_2)_H$, $h_i \in H$, $i = 1, 2$). Через $F(H)$ обозначим пространство всех симметрических билинейных форм на H. Через $GL(H)$ обозначим полную операторную линейную группу пространства H.

Определение 2.1. *Пару $\{\tau, D\}$, где τ — линейный оператор, действующий в H, и D — произвольная диада, назовем агрегатом. Агрегат $\{\tau, D\}$ будем называть невырожденным, если $\tau \in GL(H)$.*

Определение 2.2. *Агрегаты $A_i = \{\tau_i, D_i\}$ $(i = 1, 2)$ будем считать принадлежащими к одному и тому же типу или однотипными $(A_1 \cong A_2)$, если $\tau_1 = \tau_2$ и $D_1 \cong D_2$.*

Тип $\boldsymbol{A}$ агрегата $A = \{\tau, D\}$ можно, таким образом, рассматривать как пару $\{\tau, \boldsymbol{D}\}$, где $\mathbf{D}$ — тип диады D.

В дальнейшем мы будем рассматривать только невырожденные агрегаты.

Пусть $\tau \in GL(H)$ и $f \in \boldsymbol{F}(H)$. Определим новую симметрическую билинейную форму τf, полагая

$$(\tau f)(h_1, h_2) = (\tau^*(h_1), \tau^*(h_2))_H,$$

где τ^* — оператор, сопряженный с τ по метрике m.

Если $\tau_1, \tau_2 \in GL(H)$, то, очевидно,

$$(\tau_1\tau_2) f = \tau_1 (\tau_2 f). \tag{2.1}$$

Отображение $f \to \tau f$ является автоморфизмом пространства $\boldsymbol{F}(H)$.

Если $D = \{E, \varphi\}$ — диада, $\tau \in GL(H)$, положим $\tau D = \{E, \varphi\tau^*\}$. Легко проверяется, что для любых операторов $\tau, \tau_1, \tau_2 \in GL(H)$ и любых диад D, D_1, D_2

$$\tau(D_1 \dotplus D_2) = \tau D_1 \dotplus \tau D_2, \tag{2.2}$$

$$(\tau_1\tau_2) D = \tau_1(\tau_2 D), \tag{2.3}$$

$$f_{\tau D} = \tau f_D. \tag{2.4}$$

---

* Вопрос о том, в какой мере определяется диадой ее нейтральная компонента, остается пока открытым.

Из (2.4) вытекает, что при фиксированном τ тип диады τD вполне определяется типом $\mathbf{D}$ диады D. Из (2.2) и (2.3) вытекает, что для любых операторов τ, τ_1, $\tau_2 \in GL(H)$ и любых типов диад $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$

$$\tau(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) = \tau\mathbf{D}_1 + \tau\mathbf{D}_2, \tag{2.5}$$

$$(\tau_1\tau_2)\mathbf{D} = \tau_1(\tau_2\mathbf{D}). \tag{2.6}$$

Из $\tau\mathbf{D} = \mathbf{O}$, где $\mathbf{O}$ — нейтральный тип диад, в силу (2.6) и невырожденности τ следует $\mathbf{D} = \mathbf{O}$. Следовательно, отображение $\mathbf{D} \to \tau\mathbf{D}$ является автоморфизмом $\alpha(\tau)$ группы $\boldsymbol{D}(H)$ типов диад. Из (2.6), кроме того, вытекает, что α является гомоморфизмом группы $GL(H)$ в группу автоморфизмов группы $\boldsymbol{D}(H)$.

Образуем теперь полупрямое произведение $A(H)$ группы $\boldsymbol{D}(H)$ и $GL(H)$, отвечающее гомоморфизму α. Элементами группы $A(H)$ являются пары $\{\tau, \mathbf{D}\}$, где $\tau \in GL(H)$, $\mathbf{D} \in \boldsymbol{D}(H)$. Следовательно, (см. замечание после определения 2.2) $\boldsymbol{A}(H)$ есть группа типов агрегатов. Произведение типов агрегатов $\{\tau_i, \mathbf{D}_i\}$ $(i = 1, 2)$ определяется следующим образом:

$$\{\tau_1, \mathbf{D}_1\}\{\tau_2, \mathbf{D}_2\} = \{\tau_1\tau_2, \mathbf{D}_1 + \tau_1\mathbf{D}_2\}. \tag{2.7}$$

Единицей группы $\boldsymbol{A}(H)$ является нейтральный тип агрегатов $I = \{\varepsilon, \mathbf{O}\}$ (ε — тождественный оператор в H, $\mathbf{O}$ — нейтральный тип диад). Тип состоит из нейтральных агрегатов $\{\varepsilon, D\}$, где D — нейтральная диада. Если $\{\tau, \mathbf{D}\} \in \boldsymbol{A}(H)$, то

$$\{\tau, \mathbf{D}\}^{-1} = \{\tau^{-1}, -\tau^{-1}\mathbf{D}\}. \tag{2.8}$$

Пары $\{\varepsilon, \mathbf{D}\}$, где $\mathbf{D} \in \boldsymbol{D}(H)$, образуют в $\boldsymbol{A}(H)$ нормальный делитель N, изоморфный $\boldsymbol{D}(H)$. Пары $\{\tau, \mathbf{O}\}$ образуют в $\boldsymbol{A}(H)$ подгруппу $\boldsymbol{L}$, изоморфную $GL(H)$. При этом

$$\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{L} = \{\boldsymbol{I}\}, \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{A}(H) = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{L}. \tag{2.10}$$

Группа $\boldsymbol{L}$ действует на $\boldsymbol{N}$ следующим образом:

$$\{\tau, \mathbf{O}\} \cdot \{\varepsilon, \mathbf{D}\} \cdot \{\tau, \mathbf{O}\}^{-1} = \{\varepsilon, \tau\mathbf{D}\}. \tag{2.11}$$

Выше была (с помощью (2.7)) определена операция умножения типов агрегатов. Естественно теперь определить операцию умножения самих агрегатов следующим образом: если $A_i = \{\tau_i, D_i\}$ $(i = 1, 2)$ — агрегаты, то

$$A_1A_2 = \{\tau_1\tau_2, D_1 \dotplus \tau_1D_2\}. \tag{2.12}$$

В соответствии с (2.8) агрегат $\{\tau^{-1}, \tau^{-1}D^{-}\}$ будем называть обратным агрегату $A = \{\tau, D\}$. (Обозначение — $\{\tau^{-1}, \tau^{-1}D^{-}\} = A^{(-1)}$). Если $\mathbf{A}$ — тип агрегата A, то $\mathbf{A}^{-1}$ — тип агрегата $A^{(-1)}$.

2. Оператор $\tau \in GL(H)$ искажает естественную метрику m пространства H, переводя ее в метрику (также невырожденную) τm. Искажение характеризуется метрикой $m - \tau m = \partial_\tau m$, где $\partial_\tau = \varepsilon - \tau$.

Будем говорить, что для оператора $\tau \in GL(H)$ и диады D выполнено условие согласования I рода, если

$$f_D = \partial_\tau m. \tag{2.13}$$

Пусть $D = \{E, \varphi\}$. Так как $f_D(h_1, h_2) = (\varphi(h_1), \varphi(h_2))_E = (\varphi^*\varphi(h_1), h_2)_H$, $(\partial_\tau m)(h_1h_2) = ((\varepsilon - \tau\tau^*)h_1h_2)_H$, то условие (2.13) равносильно следующему:

$$\varepsilon - \tau\tau^* = \varphi^*\varphi. \tag{2.14}$$

Определение 2.3. *Операторным узлом I рода назовем всякий невырожденный агрегат* $\{\tau, D\}$, *оператор* τ *и диада* D *которого удовлетворяют условию согласования I рода.*

Теорема 2.1. *Любой оператор* $\tau \in GL(H)$ *можно включить в операторный узел I рода. Более того, каков бы ни был тип* $\mathbf{E}$ *метрических линейных пространств, всегда существует операторный узел I рода* $\{\tau, D\}$, *для которого* $\mathbf{E}$ *совпадает с типом пространства* E *диады* D.

Доказательство. На основании теоремы 1.10 существует такая диада $D = \{E, \varphi\}$, что $f_D = \partial_\tau m$, тип $E = \mathbf{E}$. Агрегат $\{\tau, D\}$ является операторным узлом I рода, удовлетворяющий поставленным требованиям.

Теорема 2.2. *Произведение двух операторных узлов I рода есть операторный узел I рода.*

Доказательство. Пусть $M_i = \{\tau_i, D_i\}$ $(i = 1, 2)$ — операторные узлы I рода и $M = M_1 M_2$. Так как $M = \{\tau_1\tau_2, D_1 \dotplus \tau_1 D_2\}$ и $f_{D_i} = m - \tau_i m$ $(i = 1, 2)$, то на основании (2.4)

$$f_{D_1 \dotplus \tau_1 D_2} = f_{D_1} + f_{\tau_1 D_2} = f_{D_1} + \tau_1 f_{D_2} = m - \tau_1 m + \tau_1 (m - \tau_2 m) = m - \tau_1\tau_2 m.$$

Следовательно, диада $D_1 \dotplus \tau_1 D_2$ и оператор $\tau_1\tau_2$ удовлетворяют условию согласования I рода и, таким образом, M — операторный узел I рода.

Теорема 2.3. *Нейтральные агрегаты являются операторными узлами I рода.*

Доказательство. Если M — нейтральный агрегат, то $M = \{\varepsilon, D\}$, где D — нейтральная диада. Так как $f_D = 0$, $\partial_\varepsilon m = 0$, то M — операторный узел I рода.

Теорема 2.4. *Если* M — *операторный узел I рода, то и* $M^{(-1)}$ *является операторным узлом I рода.*

Доказательство. Пусть $M = \{\tau, D\}$. Тогда $M^{(-1)} = \{\tau^{-1}, \tau^{-1}D^{-}\}$. В силу (2.13) и (2.4) $f_{\tau^{-1}D^{-}} = \tau^{-1} f_{D^{-}} = -\tau^{-1} f_D = -\tau^{-1}(m - \tau m) = m - \tau^{-1} m$. Следовательно, для диады $\tau^{-1}D^{-}$ и оператора τ^{-1} выполнено условие согласования I рода. Поэтому $M^{(-1)}$ — операторный узел I рода.

Из определения 2.3 вытекает, что если M — операторный узел I рода, то любой агрегат однотипный M также является операторным узлом I рода. Поэтому можно говорить о типах операторных узлов I рода.

Из теорем 2.2 — 2.4 вытекает, что типы операторных узлов I рода образуют подгруппу группы типов агрегатов. Мы обозначим эту подгруппу через $\boldsymbol{M}(H)$.

Теорема 2.5. *Группа* $\boldsymbol{M}(H)$ *типов операторных узлов I рода изоморфна внешнему прямому произведению полной линейной группы* $GL(H)$ *и группы Витта* $\mathbf{W}(K)$.

Доказательство. В силу определения 2.2 типом операторного узла $M = \{\tau, D\}$ вполне определяются линейный оператор $\tau = \tau_{\mathbf{M}}$ и тип $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\mathbf{M}}$ диады D. Типом $\mathbf{D}_{\mathbf{M}}$ диады $D = \{E, \varphi\}$, в свою очередь, определяется тип $\mathbf{E}$ пространства E. Поэтому можно положить $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathbf{M}}$. Таким образом, с типом $\mathbf{M}$ однозначно сопоставляется пара $\{\tau_{\mathbf{M}}, \mathbf{E}_{\mathbf{M}}\}$. Этой парой, в свою очередь, однозначно определяется тип $\mathbf{M}$. Действительно, если $\mathbf{M}' \in \boldsymbol{M}(H)$ $\tau_{\mathbf{M}'} = \tau_{\mathbf{M}}$, $\mathbf{E}_{\mathbf{M}'} = \mathbf{E}_{\mathbf{M}}$, то $f_{\mathbf{D}_{\mathbf{M}}} = \partial_{\tau_{\mathbf{M}}} m = \partial_{\tau_{\mathbf{M}'}} m = f_{\mathbf{D}_{\mathbf{M}'}}$. Из $f_{\mathbf{D}_{\mathbf{M}'}} = f_{\mathbf{D}_{\mathbf{M}}}$, $\mathbf{E}_{\mathbf{M}'} = \mathbf{E}_{\mathbf{M}}$ в силу определения 1.4 вытекает $\mathbf{D}_{\mathbf{M}'} = \mathbf{D}_{\mathbf{M}}$. Следовательно, $\mathbf{M}' = \{\tau_{\mathbf{M}'}, \mathbf{D}_{\mathbf{M}'}\} = \{\tau_{\mathbf{M}}, \mathbf{D}_{\mathbf{M}}\} = \mathbf{M}$.

Если $\mathbf{M}_i \in \boldsymbol{M}(H)$ $(i = 1, 2)$, то $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = \{\tau_{\mathbf{M}_1}\tau_{\mathbf{M}_2}, \mathbf{D}_{\mathbf{M}_1} + \tau_{\mathbf{M}_1}\mathbf{D}_{\mathbf{M}_2}\}$. Следовательно, $\tau_{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2} = \tau_{\mathbf{M}_1} \tau_{\mathbf{M}_2}$. Далее, так как типу диад $\mathbf{D}_{\mathbf{M}_1} + \tau_{\mathbf{M}_1}\mathbf{D}_{\mathbf{M}_2}$ отвечает тип метрических пространств $\mathbf{E}_{\mathbf{M}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{M}_2}$, то $\mathbf{E}_{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2} = \mathbf{E}_{\mathbf{M}_1} + \mathbf{E}_{\mathbf{M}_2}$.

Поэтому отображение $M \to \{\tau_M, E_M\}$ является изоморфизмом группы $M(H)$ во внешнее прямое произведение полной линейной группы $GL(H)$ и группы Витта $W(K)$.

Теорема 2.1 показывает, что на самом деле это отображение является изоморфизмом $M(H)$ на $GL(H) \times W(K)$.

Следствие. *Группа $M(H)$ содержит нормальный делитель изоморфный $GL(H)$.*

Это означает, в частности, что полная линейная группа $GL(H)$ допускает точное представление в группе $M(H)$ типов операторных узлов I рода. Это представление легко получается в явном виде. Назовем диаду $D=\{E, \varphi\}$ полунейтральной, если пространство E нейтрально. Типы полунейтральных диад образуют подгруппу группы $D(H)$ типов диад (эта подгруппа, как легко видеть, изоморфна аддитивной группе $F(H)$ метрик в H).

Любой оператор $\tau \in GL(H)$ можно включить в операторный узел 1-го рода $M=\{\tau, D\}$, так чтобы диада $D=\{E, \varphi\}$ была полунейтральной. Тип $M=M\tau$ узла M определяется этим требованием однозначно. Отображение $\tau \to M\tau$ является изоморфизмом группы $GL(H)$ в $M(H)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский. Треугольные и жордановые представления линейных операторов. Изд-во «Наука», 1969.

2. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. Изд-во «Наука», 1966.

3. М. С. Лившиц. О неунитарных представлениях групп. «Функциональный анализ и его приложения», т. 3, вып. 1, 1969.

4. M. Eichler. Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin — Göttingen — Heidelbevg, 1952.

5. Н. Бурбаки. Алгебра (модули, кольца, формы). Физматгиз, 1966.

Поступила 10 ноября 1969 г.