ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ КОМБИНАЦИЯХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. Гольдберг, С. Б. Тушканов

Введем следующие обозначения: G — класс целых функций, C_1 — множество комплексных чисел, C_2 — множество рациональных функций, C_3 — множество мероморфных в конечной плоскости функций, порядки которых не превышают фиксированного числа ρ, $0 \leqslant \rho < \infty$. Пусть $P_j = C_j \cap G$, $j = 2, 3$, $P_1 = C_1$. Пусть задана система целых функций $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$, $2 \leqslant \nu < \infty$. Обозначим через r_j максимальное число функций $g_k(z)$, линейно независимых над полем C_j. Очевидно, что $\nu \geqslant r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$. Выражение $F = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_\nu g_\nu$, где $\alpha_k \in P_j$, будем называть j-линейной комбинацией; j-линейная комбинация F называется (i, j)-исключительной комбинацией, $3 \geqslant i \geqslant j \geqslant 1$, если:

1) при $i = 1$ функция $F(z)$ не имеет нулей, $r_1 \geqslant 2$;

2) при $i = 2$ функция $F(z)$ имеет не более конечного числа нулей, $r_2 \geqslant 2$;

3) при $i = 3$ предельный показатель сходимости нулей функции $F(z)$ не превосходит ρ, $r_3 \geqslant 2$.

Из известных теорем теории целых функций вытекает, что в случае 1) функция $F(z)$ имеет вид $F(z) = e^{q(z)}$, $q(z) \in G$; в случае 2) — вид $F(z) = p(z)\, e^{q(z)}$, $q(z) \in G$, $p(z) \in P_2$; в случае 3) — вид $F(z) = \varphi(z)\, e^{q(z)}$, где $\varphi(z)$ — целая функция порядка не выше ρ, а целая функция $q(z)$ имеет разложение вида

$$q(z) = \sum_{k=[\rho]+1}^{\infty} c_k z^k$$

($[x]$ — целая часть x).

Система j-линейных комбинаций

$$F_k = \sum_{m=1}^{\nu} \alpha_{km} g_m, \quad k = 1, 2, \ldots, \varkappa, \quad \infty > \varkappa \geqslant \nu,$$

называется допустимой, если в матрице $\| \alpha_{km} \|$, $1 \leqslant k \leqslant \varkappa$, $1 \leqslant m \leqslant \nu$, каждый минор порядка ν не равен тождественно нулю.

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть задана система целых функций* $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$ *с* $r_i \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. *Тогда допустимая система* (i, j)*-исключительных комбинаций* $(3 \geqslant i \geqslant j \geqslant 1)$ *не может состоять из более чем*

$$q = \nu + \left[\frac{\nu - r_j}{r_i - 1} \right] \tag{1}$$

комбинаций. Оценка (1) *не может быть улучшена.*

Пусть $\nu = 2$, тогда необходимо $r_i = r_j = 2$. Если $j = 1$, $i = 1$ или 2, то из теоремы 1 следует, что $q = 2$, т. е. классическая теорема Пикара об исключительных значениях мероморфных функций. Если $j = 1$, $i = 3$, то из теоремы 1 следует, что число (3, 1)-исключительных комбинаций не превышает двух, т. е. теорема Бореля.

Так как $r_j \geqslant r_i \geqslant 2$, то из (1) следует, что $q \leqslant 2\nu - 2$. Оценку $2\nu - 2$ для числа (i, j)-исключительных комбинаций получил Монтель ([1, §§ 127—128]); на самом деле Монтель рассматривал только (2, 1)-исключительные и только неоднородные (с $g_\nu(z) \equiv 1$) комбинации, но для его метода эти ограничения несущественны. Теорема 1 для случая (1, 1)-исключительных комбинаций была доказана в 1944 г. Дюфренуа [2], но его метод, по-видимому, на общий случай не переносится. Еще раньше в 1940 г. Германеску [3] предположил, что для числа (2, 1)-исключительных комбинаций справедлива оценка $\nu + \left[\frac{\nu - r_1}{r_1 - 1} \right]$. Как следует из приводимых ниже примеров, эта оценка в общем случае неверна (точной оценкой является, согласно (1), число $\nu + \left[\frac{\nu - r_1}{r_2 - 1} \right]$). Дюфренуа [2] утверждает, что им доказана справедливость гипотезы Германеску, но фактически им рассматривались (1, 1)-, а не (2, 1)-исключительные комбинации.

Из теоремы 1 легко следует теорема об исключительных значениях алгеброидных функций. Пусть $F(w, z)$ — многочлен степени $\nu - 1$ $(\nu \geqslant 2)$ относительно w и целая функция относительно z:

$$F(w, z) = w^{\nu-1} g_1(z) + \cdots + w g_{\nu-1}(z) + g_\nu(z), \quad g_1(z) \not\equiv 0, \tag{2}$$

причем хотя бы одно отношение $g_m(z)/g_1(z)$ не является рациональной функцией. Алгеброидной функцией называется $(\nu - 1)$-значная аналитическая функция $w = w(z)$, определяемая уравнением $F(w, z) = 0$. Комплексное число a называется пикаровским исключительным значением $w(z)$, если $w(z) = a$ имеет конечное число корней, сильным пикаровским — если $w(z) = a$ не имеет корней. Если максимальный порядок отношений $g_2/g_1, \ldots, g_\nu/g_1$ равен ρ', а предельний показатель сходимости корней $w(z) = a$ не превышает ρ, причем $0 \leqslant \rho < \rho' \leqslant \infty$, то a называется борелевским исключительным значением алгеброидной функции $w(z)$. Очевидно, вместо корней уравнения $w(z) = a$ можно рассматривать нули целой функции $F(a, z)$. При $a = \infty$ рассматриваем уравнение $1/w(z) = 0$ или $w^{\nu-1} F\left(\frac{1}{w}, z\right)\Big|_{w=0} = 0$. Для системы целых функций $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$ числа r_1, r_2, r_3 имеют тот же смысл, что и выше.

Теорема 2. *Пусть алгеброидная функция $w(z)$ определена уравнением $(w, z) = 0$, где функция $F(w, z)$ имеет вид (2). Тогда $w(z)$ может иметь не более $\nu + \left[\frac{\nu - r_1}{r_1 - 1}\right]$ сильных пикаровских исключительных значений, не более $\nu + \left[\frac{\nu - r_1}{r_2 - 1}\right]$ пикаровских исключительных значений и не более $\nu + \left[\frac{\nu - r_1}{r_3 - 1}\right]$ борелевских исключительных значений. Эти оценки не могут быть улучшены.*

Теорема 2 сразу следует из теоремы 1, если учесть, что для любого множества различных комплексных чисел $a_1, \ldots, a_\varkappa$, $\varkappa \geqslant \nu$, выражения $F(a_j, z)$, $1 \leqslant j \leqslant \varkappa$, образуют допустимую систему 1-линейных комбинаций, так как в матрице $\|\alpha_{km}\|$ $\alpha_{km} = a_k^{m-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \varkappa$, $1 \leqslant m \leqslant \nu$, и каждый минор порядка ν является детерминантом Вандермонда. Если $a_k = \infty$, то $\alpha_{k\nu} = 1$, $\alpha_{km} = 0$, $1 \leqslant m \leqslant \nu - 1$.

Очевидно, что

$$\nu + \left[\frac{\nu - r_1}{r_2 - 1}\right] \leqslant 2\nu - r_1 \leqslant 2(\nu - 1).$$

Оценку $2(\nu - 1)$ для числа пикаровских исключительных значений $(\nu - 1)$-значной алгеброидной функции установил Ремундос [4], [5]. Германеску [3], [6] нашел для числа пикаровских исключительных значений ошибочную оценку $\nu + \left[\frac{\nu - r_1}{r_1 - 1}\right]$, однако эта оценка верна для сильных пикаровских исключительных значений, причем в этом случае доказательство Германеску корректно. Для числа пикаровских исключительных значений оценку $2\nu - r_1$ установил впервые Варопулос [7]. Можно было бы рассматривать для алгеброидных функций не только исключительные значения, но и исключительные функции и с помощью теоремы 1 получить усиления некоторых результатов Ремундоса [5], но мы этим здесь заниматься не будем.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Пусть ν, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — натуральные числа, $r \geqslant 2$, $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = R \leqslant \nu$. Обозначим через S системы натуральных чисел $x = \{x_1, \ldots, x_r\}$, удовлетворяющих неравенствам*

$$x_j \geqslant \lambda_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant r, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_k - x_j \leqslant \nu - \lambda_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant r. \tag{4}$$

Тогда множество S непусто и

$$\max_{x \in S} \sum_{k=1}^{r} x_k = \nu + \left[\frac{\nu - R}{r - 1}\right]. \tag{5}$$

Очевидно, что для всех $x \in S$ выполняется

$$\sum_{k=1}^{r} x_k \leqslant \nu + \left[\frac{\nu - R}{r - 1}\right]. \tag{6}$$

Действительно, сложив неравенства (4), получим

$$(r-1)\sum_{k=1}^{r} x_k \leqslant \nu r - R,$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_k \leqslant \nu + \frac{\nu - R}{r-1}.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{r} x_k$ — целое число, получаем (6).

Укажем теперь точку $x^0 = \{x_1^0, \ldots, x_r^0\} \in S$, на которой в (6) имеет место равенство. Обозначим

$$t = \nu - R + \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right], \quad s = t - r\left[\frac{t}{r}\right], \quad \theta = \frac{\nu - R}{r-1} - \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right].$$

Очевидно, что $0 \leqslant s < r$ и $0 \leqslant \theta < 1$. Положим

$$x_k^0 = \begin{cases} 1 + \left[\frac{t}{r}\right] + \lambda_k, & 1 \leqslant k \leqslant s, \\ \left[\frac{t}{r}\right] + \lambda_k, & s+1 \leqslant k \leqslant r. \end{cases} \tag{7}$$

Мы имеем

$$\sum_{k=1}^{r} x_k^0 = s + r\left[\frac{t}{r}\right] + R = t + R = \nu + \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right]. \tag{8}$$

Покажем, что точка $x^0 = \{x_1^0, \ldots, x_r^0\} \in S$. Выполнение неравенств $x_j^0 \geqslant \lambda_j$, т. е. (3), очевидно. Покажем, что выполняются неравенства (4). Учитывая (8), получаем

$$\sum_{k=1}^{r} x_k^0 - x_j^0 = \nu + \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right] - x_j^0 \leqslant \nu + \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right] - \left[\frac{t}{r}\right] - \lambda_j = \nu + \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right] -$$

$$- \left[\frac{\nu - R + \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right]}{r}\right] - \lambda_j = \nu + \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right] - \left[\frac{\nu - R + \frac{\nu - R}{r-1} - \theta}{r}\right] - \lambda =$$

$$= \nu + \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right] - \left[\frac{\nu - R}{r-1} - \frac{\theta}{r}\right] - \lambda_j \leqslant \nu + \left[\frac{\nu - R}{r-1}\right] -$$

$$- \left[\frac{\nu - R}{r-1} - \theta\right] - \lambda_j = \nu - \lambda_j.$$

Замечание. Легко видеть, что $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(\sum\limits_{k=1}^{r} x_k^0 - x_j^0 + \lambda_j\right) = \nu$.

Действительно, если бы для всех j выполнялось $\sum\limits_{k=1}^{r} x_k^0 - x_j^0 \leqslant \nu - \lambda_j - 1$, то $x' = \{x_1^0 + 1, x_2^0, \ldots, x_r^0\} \in S$ и

$$\max_S \sum_{k=1}^{r} x_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)\Big|_{x=x'} = \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)\Big|_{x=x^0} + 1,$$

что невозможно.

Лемма 2 (Борель [8]). *Система функций*

$$\{p_j(z)\, e^{q_j(z)}\}, \; j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

где $p_j(z)$ — многочлены $\not\equiv 0$, а $q_j(z)$ — попарно неравные целые функции, $q_j(0)=0$, является линейно независимой над полем C_2, а следовательно, и над полем C_1. Система функций (9), где $p_j(z)$ — целые функции порядка не выше ρ, а $q_j(z)$ — попарно неравные целые функции, имеющие разложения вида

$$q_j(z)=\sum_{k=[\rho]+1}^{\infty} c_{kj}z^k, \tag{10}$$

является линейно независимой над полем C_3, а следовательно, и над полями C_2 и C_1.

Равносильная лемма доказана Борелем [8]. Мы приведем здесь простое доказательство, использующее теорию целых кривых (см., например, [9]).

Рассмотрим сначала случай, когда у функций (9) $p_j(z)$ — многочлены, а $q_j(z)$ — попарно неравные целые функции, $q_j(0)=0$. Предположим, что среди функций (9) линейно независимы над полем C_1 функции $p_je^{q_j}$, $1\leqslant j\leqslant l<n$, а остальные от них линейно зависят. Очевидно, $l\geqslant 2$. Не уменьшая общности, можно считать, что существуют такие не равные нулю постоянные $c_1,\ldots,c_m$, c_{m+1}, $2\leqslant m\leqslant l$, что

$$\sum_{k=1}^{m} c_kp_k(z)\,e^{q_k(z)}+c_{m+1}p_{l+1}(z)\,e^{q_{l+1}(z)}\equiv 0,$$

причем многочлены $p_1(z),\ldots,p_m(z)$, $p_{l+1}(z)$ не имеют общих нулей (в случае надобности перенумеровываем функции и делим их на некоторый многочлен). Рассмотрим целую кривую $\mathfrak{G}=\{p_1e^{q_1},\ldots,p_me^{q_m}\}$ и допустимую систему векторов $\mathfrak{a}_1=\{1,0,\ldots,0\},\ldots,\mathfrak{a}_m=\{0,\ldots,0,1\}$, $\mathfrak{a}_{m+1}=\{\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_m\}$. Так как функции $q_1(z),\ldots,q_m(z)$ попарно не равны, то $\ln r=o(T(r,\mathfrak{G}))$, с другой стороны, $N(r,\mathfrak{a}_j)=N(r,0,p_je^{q_j})=O(\ln r)$, $1\leqslant j\leqslant m$, $N(r,\mathfrak{a}_{m+1})=N(r,0,-c_{m+1}p_{l+1}e^{q_{l+1}})=O(\ln r)$, что противоречит второй основной теореме теории целых кривых:

$$(1+o(1))\,T(r,\mathfrak{G})\leqslant\sum_{k=1}^{m+1}N(r,\mathfrak{a}_k)$$

вне множества r конечной меры. Следовательно, предположение, что $l<n$, неверно.

Покажем теперь, что функции (9) линейно независимые над полем C_2. Предположив противное, получим, что существуют многочлены $\pi_1(z),\ldots,\pi_n(z)$, которые, не уменьшая общности, можно считать все не равными тождественно нулю, такие, что $\sum_{k=1}^{n}\pi_k(z)\,p_k(z)\,e^{q_k(z)}\equiv 0$,

где $R_k(z)=\pi_k(z)\,p_k(z)\not\equiv 0$. Мы получаем, что функции $R_1(z)\,e^{q_1(z)},\ldots,R_n(z)\,e^{q_n(z)}$ линейно зависимы над полем C_1, что противоречит уже доказанному.

Второе утверждение леммы доказывается аналогично. При этом надо учесть, что для целой кривой $\mathfrak{G}=\{p_1e^{q_1},\ldots,p_me^{q_m}\}$, где $q_j(z)$ имеют вид (10), выполняется $r^{[\rho]+1}=O(T(r,\mathfrak{G}))$, что следует из известных фактов теории целых функций ([10, гл. 7, § 1.5]).

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Обозначим через L_j линейное пространство над полем C_j $(j=1,2,3)$ с образующими $g_1(z),\ldots,g_N(z)$. Тогда r_j — размерность пространства L_j. Рассмотрим для определенности случай (2,1)-исключительных комбинаций. Предположим, что у нас имеется допустимая система $\varkappa\,(\geqslant \nu)$ (2,1)-исключительных комбинаций

$$F_k(z)=\sum_{m=1}^{\nu}\alpha_{km}g_m(z)=p_k(z)\,e^{q_k(z)},\quad 1\leqslant k\leqslant\varkappa, \tag{11}$$

где $p_k(z)\in P_2$, $p_k(z)\not\equiv 0$, $q_k(z)\in G$, $q_k(0)=0$. Так как система (11) допустимая, то функции $p_k(z)\,e^{q_k(z)}$, $1\leqslant k\leqslant\nu$, также являются образующими в пространстве L_j. В силу леммы 2 среди функций $q_1(z),\ldots,q_\nu(z)$ имеется ровно r_2 различных, обозначим их через $Q_1(z),\ldots,Q_{r_2}(z)$. Каждая из функций $q_1(z),\ldots,q_\varkappa(z)$ совпадает с одной из функций $Q_1(z),\ldots,Q_{r_2}(z)$. Разобьем функции $\{p_k e^{q_k}\}$, $1\leqslant k\leqslant\varkappa$, на r_2 множеств:

$$M_1=\{P_{11}e^{Q_1},\ldots,P_{1x_1}e^{Q_1}\};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_{r_2}=\{P_{r_21}e^{Q_{r_2}},\ldots,P_{r_2x_{r_2}}e^{Q_{r_2}}\},$$

где P_{ij}, $1\leqslant i\leqslant r_2$, $1\leqslant j\leqslant x_i$, равны одному из многочленов p_k,

$$x_1+x_2+\cdots+x_{r_2}=\varkappa. \tag{12}$$

Предположим, что максимальное число линейно независимых над полем C_1 среди функций из M_k равно λ_k,

$$1\leqslant\lambda_k\leqslant x_k,\quad 1\leqslant k\leqslant r_2. \tag{13}$$

Тогда, учитывая лемму 2, легко видеть, что максимальное число линейно независимых над полем C_1 среди функций $p_1e^{q_1},\ldots,p_\varkappa e^{q_\varkappa}$ равно $\lambda_1+\cdots+\lambda_{r_2}$. С другой стороны, учитывая, что система (11) допустимая, получаем, что это число равно r_1. Таким образом,

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_{r_2}=r_1. \tag{14}$$

Мы можем считать, что в M_j первые λ_j функций линейно независимы над полем C_1.

Покажем, что справедливы неравенства

$$\varkappa-x_j\leqslant\nu-\lambda_j,\quad 1\leqslant j\leqslant r_2. \tag{15}$$

Предположим, что при некотором фиксированном j неравенство (15) не выполняется, т. е. $\varkappa-x_j+\lambda_j-1\geqslant\nu$. Тогда в объединении множества $\bigcup\limits_{k\neq j}M_k$ и множества $\{P_{j1}e^{Q_j},\ldots,P_{j\lambda_j-1}e^{Q_j}\}$ содержится не менее ν функций, причем функция $P_{j\lambda_j}e^{Q_j}$ от них не зависит линейно над полем C_1. Но в силу допустимости системы (11) любые ν из указанных функций образуют систему образующих в L_1 и функция $P_{j\lambda_j}e^{Q_j}$ должна линейно зависеть от них над полем C_1. Полученное противоречие доказывает неравенство (15).

Учитывая (12)—(15), видим, что числа $x_1,\ldots,x_{r_2}$ удовлетворяют условиям леммы 1 с $R=r_1$, $r=r_2$. Следовательно, $\varkappa\leqslant\nu+\left[\dfrac{\nu-r_1}{r_2-1}\right]$, что и требовалось.

При рассмотрении (1,1)-исключительных комбинаций имеем $p_k(z)\equiv\equiv\mathrm{const}\neq 0$, все $\lambda_k=1$ и необходимо $r_2=r_1$. В этом случае $\varkappa\leqslant\nu+\left[\dfrac{\nu-r_1}{r_1-1}\right]$. Если будем рассматривать (2,2)-исключительные комбинации, то через λ_k обозначим максимальное число функций из M_k, линейно независимых над полем C_2, т. е. снова $\lambda_k=1$ при $1\leqslant k\leqslant r_2$. Не изменяя прежних рассуждений, получим $\varkappa\leqslant\nu+\left[\dfrac{\nu-r_2}{r_2-1}\right]$.

Случай $(3, j)$-исключительных комбинаций, $j = 1, 2, 3$, рассматривается аналогично, но в (11) $q_k(z)$ — целые функции, имеющие разложения вида (10), а $p_k(z)$ — целые функции порядка не выше ρ. Через λ_k будем обозначать максимальное число линейно независимых над полем C_j функций из M_k (очевидно, при $j = 3$ все $\lambda_k = 1$). В остальном прежние рассуждения остаются в силе.

Покажем теперь, что оценки в теоремах 1 и 2 достигаются. Мы построим здесь пример только для случая (2,1)-исключительных комбинаций или пикаровских исключительных значений для алгеброидных функций. Примеры, относящиеся к другим случаям, можно без труда построить по тому же образцу.

Пусть заданы натуральные числа r, R, ν, $2 \leqslant r \leqslant R \leqslant \nu$. Выберем произвольным образом натуральные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ так, чтобы $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = R$. Пусть $x_1^0, \ldots, x_r^0$ — числа, определенные по формулам (7). Выберем произвольным образом попарно неравные комплексные числа $w_{11}, \ldots, w_{1x_1^0}$, $w_{21}, \ldots, w_{2x_2^0}, \ldots, w_{r1}, \ldots, w_{rx_r^0}$. Пусть $(1 \leqslant j \leqslant r)$

$$\mu_j(w) = \prod_{k=1}^{x_j^0} (w - w_{jk}), \quad \psi_j(w) = \prod_{k=1}^{\lambda_j} (w - w_{jk}),$$

$$\tau_j(w) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r} \mu_k(w), \quad \varphi_j(w, z) = \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{z^{k-1}\psi_j(w)}{(w - w_{jk})\,\psi_j'(w_{jk})}.$$

Здесь $\varphi_j(w, z)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $\lambda_j - 1$ относительно w, такой, что $\varphi_j(w_{jk}, z) = z^{k-1}$, $1 \leqslant k \leqslant \lambda_j$. Степень многочлена $\tau_j(w)$ равна $q - x_j^0$, где

$$q = \sum_{k=1}^{r} x_k^0 = \nu + \left[\frac{\nu - R}{r - 1}\right].$$

Пусть

$$F(w, z) = \sum_{j=1}^{r} \tau_j(w)\, \varphi_j(w, z)\, e^{jz}.$$

Степень $F(w, z)$ как многочлена от w равна $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} (q - x_j^0 + \lambda_j - 1) = \nu - 1$ в силу замечания к лемме 1. Поэтому

$$F(w, z) = w^{\nu-1} g_1(z) + \cdots + w g_{\nu-1}(z) + g_\nu(z),$$

где $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$ — некоторые целые функции, $g_1(z) \not\equiv 0$. Алгеброидная функция $w = w(z)$, определяемая равенством $F(w, z) = 0$, имеет в качестве пикаровских исключительных значений числа w_{jk}, $1 \leqslant j \leqslant r$, $1 \leqslant k \leqslant x_j^0$, всего $\sum_{j=1}^{r} x_j^0 = q$ исключительных значений. Действительно,

$$F(w_{jk}, z) = \tau_j(w_{jk})\, \varphi_j(w_{jk}, z)\, e^{jz} = B_{jk}(z)\, e^{jz}, \tag{16}$$

где $B_{jk}(z) \not\equiv 0$ — многочлены степени не выше $\lambda_j - 1$. Одновременно показано, что система целых функций $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$ имеет допустимую систему из q (2,1)-исключительных комбинаций

$$F(w_{jk}, z) = w_{jk}^{\nu-1} g_1(z) + \cdots + w_{jk} g_{\nu-1}(z) + g_\nu(z),$$

$1 \leqslant j \leqslant r$, $1 \leqslant k \leqslant x_j^0$. Среди $F(\omega_{jk}, z)$ имеется r линейно независимых над полем C_2 функций: $F(\omega_{j1}, z) = \tau_j(\omega_{j1}) e^{jz}$, $1 \leqslant j \leqslant r$, а остальные $F(\omega_{jk}, z)$ от них линейно зависят над полем C_2. Отсюда легко следует, что среди функций $g_1(z), \ldots g_\nu(z)$ максимальное число линейно независимых над полем C_2 равно r, т. е. $r_2 = r$. Аналогично среди $F(\omega_{jk}, z)$ имеется R линейно независимых над полем C_1 функций: $F(\omega_{jk}, z) = \tau_j(\omega_{jk}) z^{k-1} e^{jz}$, $1 \leqslant j \leqslant r$, $1 \leqslant k \leqslant \lambda_j$. Остальные $F(\omega_{jk}, z)$ от них линейно зависят над полем C_1, поскольку в (16) степени многочленов $P_{jk}(z)$ не превышают $\lambda_j - 1$. Поэтому среди функций $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$ максимальное число линейно независимых над полем C_1 равно R, т. е. $r_1 = r$. Таким образом, у построенной нами алгеброидной функции $\omega = \omega(z)$ достигается даваемая теоремой 2 оценка числа пикаровских исключительных значений, а для функций $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$ достигается даваемая теоремой 1 оценка числа (2,1)-исключительных комбинаций, образующих допустимую систему.

Примечание при корректуре. После того, как эта статья поступила в редакцию, Н. Тода опубликовал статью (Toda N., Tohoku Math. J., 22 (1970), 290—319; поступила в редакцию в марте 1970 года), содержание которой пересекается с содержанием нашей статьи. В частности, он получил точные оценки для числа (2,2) — и (3,3) — исключительных комбинаций. Полученные Тодой оценки числа (i, j) — исключительных комбинаций при $j < i$, в отличие от наших, могут быть уточнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Монтель. Нормальные семейства аналитических функций, ОНТИ, М.— Л., 1936.

2. J. Dufresnoy. Théorie nouvelle des familles complexes normales. Applications à l'étude des fonctions algébroïdes, Ann. sci. École norm. sup., 61 (1944), 1—44.

3. M. Ghermanescu. Les combinaisons exceptionnelles des fonctions entières et les fonctions algébroïdes, Actualités sci. ind., № 889, Paris, 1940.

4. G. Rémoundos. Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes, Ann. Fac. Sci. Toulouse, 8 (1906).

5. G. Rémoundos. Extension aux fonctions algébroïdes multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations, Mém. sci. math., fasc. 23, Paris, 1927.

6. M. Ghermanescu. Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions algébroïdes, Bull. de math. et de phys. pures et appl. École polytechnique roi Carol II Bucarest, 7 (1935/36), 34—42.

7. T. Varopoulos. Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions algébroïdes et de leurs dérivées, Bull. Soc. math. France, 53 (1925), 23—34.

8. E. Borel. Sur les zéros des fonctions entières, Acta math., 20 (1897), 357—396.

9. А. А. Гольдберг. Некоторые вопросы теории распределения значений, дополнение к книге Г. Виттих «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям». Физматгиз, М., 1960.

10. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. II. Изд-во «Наука». М., 1968.

Поступила 18 октября 1969 г.