ОПЕРАТОРЫ, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ С ОПЕРАТОРАМИ УМНОЖЕНИЯ НА АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ КВАЗИСТЕПЕННЫЕ БАЗИСЫ

Н. И. Нагнибида

Через $\mathfrak{A}_R$ мы обозначаем пространство функций, аналитических в круге $|z| < R$, $0 < R \leqslant \infty$, с топологией компактной сходимости [1].

Обозначим через P оператор умножения на независимую переменную в $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, т. е. $Pf(z) = zf(z)$, $f(z) \in \mathfrak{A}_R$. В нашей заметке [2], посвященной описанию всех линейных непрерывных операторов в $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочных с операторами обобщенного интегрирования, доказано, в частности, следующее утверждение (см. теорему 1 [2] для $a_k = 1$):

Для того, чтобы оператор B был линейным непрерывным оператором в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочным с P^n, $n \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы

1)

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} b_{k,\,l} P^{k-l} A_l, \tag{1}$$

где $P^{-1}f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$ и $A_l f(z) = \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{-lq} f(\omega^q z)$, $\omega = \exp\frac{2\pi i}{n}$, *для любой функции* $f(z) \in \mathfrak{A}_R$;

2) *для всякого* $\rho < R$ *существуют такие* $r = r(\rho) < R$ *и* $C = C(\rho) > 0$, *что*

$$|b_{sn+i,\,l}| \leqslant C \frac{r^{mn+l}}{\rho^{(m+s)n+i}}, \quad 0 \leqslant m, \ s < \infty; \ 0 \leqslant l, \ i \leqslant n-1. \tag{2}$$

Целью этой заметки является описание полной группы изоморфизмов пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочных с P^n, и нахождение критерия квазистепенности в смысле М. Г. Хапланова [3] одного базиса в $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$. Рассматривается также один вопрос К. М. Фишмана, связанный с операторами умножения на фиксированные функции в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$.

1. Предварительно мы легко убеждаемся в том, что справедлива следующая

Лемма. Условие (2) *выполняется тогда и только тогда, когда при всех* l, $0 \leqslant l \leqslant n-1$,

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|b_{k,l}|} \leqslant \frac{1}{R}. \tag{3}$$

Необходимость этого утверждения следует из (2) при $m=0$, а для доказательства его *достаточности* следует положить $r(\rho)=\rho$.

Следовательно, условие (2) (оно, как известно [4, 5], является необходимым и достаточным условием непрерывности оператора B в $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$) равносильно тому, что функции $\varphi_l(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{k,l} z^k$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, принадлежат пространству $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$. Функции $\varphi_l(z)$ мы будем в дальнейшем называть характеристическими для оператора B.

Замечание 1. Если учесть, что $Bz^l = \varphi_l(z)$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, то требование принадлежности характеристических функций пространству $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, является естественным в рассматриваемом случае. Другими словами, если только область значений оператора B, перестановочного с P^n, $n \geqslant 1$, принадлежит $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, то он является в этом пространстве непрерывным оператором.

Введем, далее, в рассмотрение функции (также, очевидно, принадлежащие $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$)

$$\Phi_{q,l}(z) = \frac{1}{z^q} A_q \varphi_l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn+q,l} z^{kn}, \quad 0 \leqslant q, \ l \leqslant n-1,$$

и напомним (см. [2]), что элементы матрицы $[b_{i,k}]_{i,k=0}^{\infty}$ оператора B в степенном базисе $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, связаны следующими соотношениями:

$$b_{sn+l,\, mn+p} = \begin{cases} 0, & s < m \\ b_{(s-m)n+l,\, p}, & 0 \leqslant m \leqslant s < \infty; \quad 0 \leqslant l, \quad p \leqslant n-1. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *Для того чтобы линейный оператор* B *был изоморфизмом пространства* $\mathfrak{A}_R$, $0 \leqslant R \leqslant \infty$, *перестановочным с* P^n, $n \geqslant 1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{n-1} b_{k,l} P^{k-l} A_l$, *где* $A_l f(z) = \frac{1}{n} \sum\limits_{q=0}^{n-1} \omega^{-lq} f(\omega^q z)$, $\omega = \exp \frac{2\pi i}{n}$;

2) $\varphi_l(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{k,l} z^k \in \mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$ $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$;

3) $\det \| \Phi_{q,l}(z) \|_{q,l=0}^{n-1}$ *не имеет нулей в круге* $|z| < R$, $0 < R \leqslant \infty$.

Доказательство. Если B — изоморфизм $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочный с P^n, $n \geqslant 1$, то таким же свойством обладает и оператор B^{-1} ($BB^{-1} = B^{-1}B = E$, E — оператор тождественного преобразования). Учитывая, что элементы матриц операторов B и B^{-1} связаны соответствующими соотношениями (4), и записывая условие $BB^{-1} = E$ в матричной форме, мы легко получим

$$\sum_{s=0}^{i} \sum_{l=0}^{n-1} b_{(i-s)n+q,\, l} b^{(-1)}_{sn+l,\, p} = \delta_{in+p,\, q}, \quad i = 0, 1, \ldots; \ 0 \leqslant p, \ q \leqslant n-1.$$

Эти же соотношения, как легко видеть, равносильны тому, что

$$\sum_{l=0}^{n-1} \Phi_{q,l}(z) \Phi^{(-1)}_{l,p}(z) = \delta_{p,q}, \qquad 0 \leqslant p, \qquad q \leqslant n-1. \tag{5}$$

Из (5) уже следует, что функция $\det \| \Phi_{q,l}(z) \|_{q,l=0}^{n-1}$ не имеет в круге $|z| < R$ нулей и, тем самым, *необходимость* условий теоремы.

Их *достаточность* легко получить, проведя аналогичные рассуждения в обратном порядке.

Замечание 2. Если оператор B перестановочен в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, с оператором P, то он сам является оператором умножения на некоторую функцию $\varphi(z)$, $\varphi(z) \in \mathfrak{A}_R$.

Теорема 2. *Пусть функции* $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)$ *из пространства* $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, *таковы, что*

$$\Delta(z) = \det \left\| \frac{1}{z^q} A_q \varphi_l(z) \right\|_{q,l=0}^{n-1}$$

не имеет в круге $|z| < R$ *нулей. Тогда система*

$$\{z^{kn}(\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)\}_{k=0}^{\infty}$$

образует в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, *квазистепенный в смысле М. Г. Хапланова* [3] *базис.*

Если квазистепенность базиса понимать в более узком смысле (*см.* § 2 [2]), *то приведенное выше условие является также необходимым.*

Доказательство. Построим изоморфизм B пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочный с P^n, $n \geqslant 1$, беря функции $\varphi_l(z)$ $l=0, 1, \ldots, n-1$, в качестве характеристических. Учитывая далее, что система

$$\{z^{kn}(1, z, \ldots, z^{n-1})\}_{k=0}^{\infty}$$

образует в $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, степенной базис и что

$$Bz^l = \varphi_l(z), \quad l = 0, 1, \ldots, n-1,$$

мы легко убеждаемся в справедливости теоремы.

Пример. В случае $n = 2$ функция

$$\Delta(z) = \frac{1}{2z}[\varphi_0(-z)\varphi_1(z) - \varphi_0(z)\varphi_1(-z)].$$

Следовательно, система

$$\varphi_0(z), \ \varphi_1(z), \ z^2\varphi_0(z), \ z^2\varphi_1(z), \ \ldots .$$

образует в $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, базис, если только $\Delta(z)$ не имеет нулей в круге $|z| < R$. В частности, система

$$\sin z, \ \cos z, \ z^2 \sin z, \ z^2 \cos z, \ \ldots$$

образует квазистепенной базис в каждом из пространств $\mathfrak{A}_R$, для которых $0 < R \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. Принимая во внимание замечание 2, весьма любопытным представляется вопрос К. М. Фишмана об описании множества M всех функций $\varphi(z)$, $\varphi(z) \in \mathfrak{A}_R$, обладающих тем свойством, что каждый линейный непрерывный в $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, оператор T, перестановочный с оператором умножения U_φ на фиксированную функцию $\varphi(z)$ из M, сам является в этом пространстве оператором умножения на некоторую функцию из $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$.

Определенную характеристику класса M дает следующая

Теорема 3. *Пусть функция* $\psi(z)=\frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z}$ *не имеет нулей в круге* $|z|<R$, $0<R\leqslant\infty$. *Тогда функция* $\varphi(z)$ *принадлежит классу* M *в пространстве* $\mathfrak{A}_R$.

Доказательство. Пусть T — линейный непрерывный в $\mathfrak{A}_R$, $0<R\leqslant\infty$, оператор, перестановочный с оператором U_φ, $U_\varphi f(z)=\varphi(z)f(z)$ для любой функции $f(z)\in\mathfrak{A}_R$, и $[t_{i,k}]_{i,k=0}^{\infty}$ — его матрица в степенном базисе $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$. Нетрудно видеть, что матрица $[u_{i,k}]_{i,k=0}^{\infty}$ оператора U_φ имеет такой вид:

$$u_{j,k}=\begin{cases}0, & j<k\\ \varphi_{j-k}, & j\geqslant k,\end{cases}\tag{6}$$

где $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ — тейлоровские коэффициенты функции $\varphi(z)$, т. е. $\varphi(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\varphi_i z^i$. Записывая условие $TU_\varphi=U_\varphi T$ в матричной форме и учитывая (6), легко получим, что элементы матрицы оператора T связаны между собой соотношениями

$$\sum_{j=0}^{\infty}t_{i,j+k}\varphi_j=\sum_{j=0}^{i}t_{i-j,k}\varphi_j,\quad i,\ k=0,\ 1,\ \ldots .\tag{7}$$

Отметим, что в силу непрерывности оператора T последовательности $\{t_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ определяют при каждом фиксированном j, $j=0,\ 1,\ \ldots$, линейные непрерывные функционалы в $\mathfrak{A}_R$, $0<R\leqslant\infty$, (см. [6]). Так как, кроме того, функция $\psi(z)$ не имеет по условию нулей в круге $|z|<R$, то система $\{z^k\psi(z)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0<R\leqslant\infty$. Получающиеся из (7) при $i=0$ соотношения

$$\sum_{j=1}^{\infty}t_{0,j+k}\varphi_j=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots ,$$

можно, очевидно, записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}z^k\psi(z)\gamma_0(z)\,dz=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots ,\tag{8}$$

где $\gamma_0(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{t_{0,j+1}}{z^{j+1}}$ и спрямляемый контур C_0 лежит в общей области аналитичности функций $\psi(z)$ и $\gamma_0(z)$.

Учитывая вышесказанное, мы должны из (8) заключить, что $t_{0,j+1}=0$, $j=0,\ 1,\ \ldots$.

Перейдем теперь к соотношениям (7) при $i\geqslant 1$, записав их в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty}t_{i,j+k+1}\varphi_{j+1}=\sum_{j=0}^{i-1}t_{i-j-1,k}\varphi_{j+1}\quad (k=0,\ 1,\ \ldots).\tag{9}$$

В случае $i=1$ из соотношений (9) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}z^k\psi(z)\gamma_1(z)\,dz=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots ,$$

где $\gamma_1(z)=\frac{t_{1,1}-t_{0,0}}{z}+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{t_{1,j+1}}{z^{j+1}}$.

Поэтому $t_{1,1} = t_{0,0}$ и $t_{1,\, j+1} = 0$ при $j > 1$. Продолжая этот процесс дальше записывая соответствующим образом функционалы, аннулирующиеся на функциях $z^k \psi(z)$, $k = 0, 1, \ldots$, убеждаемся, что элементы матрицы оператора T также связаны между собой соотношениями, аналогичными соотношениям (6), т. е. $Tf(z) = f(z)\, T1$ для любой функции $f(z)$, $f(z) \in \mathfrak{A}_R$. Теорема доказана.

В заключение выражаю искреннюю благодарность К. М. Фишману за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Köthe. Dualität in der Funktionentheorie, Journ. f. reine und angew Math., 191, (1953).

2. Н. И. Нагнибида. О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве. Сибирск. матем. журн., т. 7, № 6 1966.

3. М. Г. Хапланов. Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций. ДАН СССР, 80, № 2 1951.

4. К. М. Фишман. К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств. ДАН СССР, 127, № 1 1959.

5. М. Г. Хапланов. Линейные преобразования аналитических пространств. ДАН СССР, 80, № 1 1951.

6. А. И. Маркушевич. О базисах в пространстве аналитических функций. «Матем. сб.», 17, № 2 1945.

Поступила 8 октября 1969 г.