ИЗОМОРФИЗМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СО СТЕПЕНЬЮ ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

М. Ю. Царьков

Рассмотрим пространство $\mathfrak{A}_R$, $0 < R < \infty$, всех однозначных аналитических в круге $|z| < R$ функций с топологией компактной сходимости [1].

Пусть $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — некоторая последовательность отличных от нуля комплексных чисел, удовлетворяющая следующему условию:

для любого $q > 1$ существуют такие положительные постоянные $C_1(q)$ и $C_2(q)$, что

$$\frac{C_2(q)}{q^k} \leqslant \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leqslant C_1(q)\, q^k, \tag{1}$$

т. е.

$$\lim_k \sqrt[k]{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} = 1.$$

Через I и D обозначим операторы в $\mathfrak{A}_R$, определенные на базисных элементах $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$, соответственно соотношениями

$$Iz^k = \frac{a_{k+1}}{a_k} z^{k+1}$$

и

$$D1 = 0, \ Dz^{k+1} = \frac{a_k}{a_{k+1}} z^k, \ k \geqslant 0.$$

Тогда, как известно [2], в силу правого неравенства в условии (1), оператор I может быть расширен до линейного непрерывного оператора, отображающего $\mathfrak{A}_R$ в себя.

Аналогично в силу левого неравенства в (1) оператор D расширяется до линейного непрерывного оператора в $\mathfrak{A}_R$.

Для любой функции $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, принадлежащей $\mathfrak{A}_R$, имеем

$$IF(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{a_{k+1}}{a_k} z^{k+1},$$

$$DF(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} \frac{a_k}{a_{k+1}} z^k.$$

Заметим, что при $a_k = \frac{1}{k!}$, $k \geqslant 0$,

$$IF(z) = \int_0^z F(\zeta)\, d\zeta$$

и

$$DF(z) = \frac{dF(z)}{dz}.$$

Естественно, что операторы I и D называют соответственно операторами обобщенного интегрирования и обобщенного дифференцирования.

В настоящей заметке доказаны для довольно широкого класса операторов обобщенного интегрирования теоремы, ранее известные только для частного случая оператора интегрирования $\left(a_k = \frac{1}{k!}\right)$ [3, 4].

Кроме того, одноклеточность оператора I получается при более слабых предположениях, чем в [5].

§ 1. Вспомогательные построения и утверждения

Зададим на $\mathfrak{A}_R$ преобразование B, которое каждой функции $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, принадлежащей $\mathfrak{A}_R$, ставит в соответствие числовую последовательность $\left\{\frac{b_k}{a_k}\right\}_{k=0}^{\infty}$.

Пространство последовательностей $B\mathfrak{A}_R$, наделенное топологией, перенесенной преобразованием B, будем обозначать L_R.

Из определения L_R следует, что L_R — пространство последовательностей $x = \{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$, суммируемых с весом $\{|a_k| r^k\}_{k=0}^{\infty}$ при любом r, $0 < r < R$, в котором топология задается системой полунорм

$$\|x\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k |\xi_k|, \quad 0 < r < R. \tag{2}$$

Условие принадлежности $x = \{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ к L_R можно записать, учитывая формулу Коши — Адамара,

$$\overline{\lim_k} \sqrt[k]{|\xi_k a_k|} \leqslant \frac{1}{R}. \tag{3}$$

Совокупность элементов $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ из L_R, где $e_k = \{\delta_{ks}\}_{s=0}^{\infty}$, δ_{ks} — символы Кронекера, есть образ базиса $\{a_k z^k\}_{k=0}^{\infty}$ пространства $\mathfrak{A}_R$ и потому является базисом в L_R.

Операторы I и D определяют в L_R соответственно операторы $S = BIB^{-1}$ и $S^* = BDB^{-1}$, которые в действии на базисные элементы дают

$$Se_k = e_{k+1},$$
$$S^* e_0 = 0, \quad S^* e_{k+1} = e_k, \quad k \geqslant 0.$$

Введем в рассмотрение банаховы пространства $l(r)$, $0 < r < R$, последовательностей $x = \{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$, суммируемых с весом $\{|a_k| r^k\}_{k=0}^{\infty}$ и нормой (2).

Нетрудно видеть, что пространство L_R является проективным пределом банаховых пространств $l(r)$ при $r \to R$.

Предположим теперь относительно последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, что при некотором положительном C

$$|a_{k+\nu}| \leqslant C |a_k a_\nu|, \quad k, \nu \geqslant 0. \tag{4}$$

Из неравенства (4) следует выполнение правого неравенства в условии (1).

Как обычно, сверткой двух последовательностей $x = \{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $y = \{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$ будем называть последовательность $xy = \{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$\zeta_k = \sum_{s=0}^{k} \xi_s \eta_{k-s}.$$

Вследствие условия (4) выполняется неравенство

$$\|xy\|_r \leqslant C \|x\|_r \|y\|_r, \quad 0 < r < R, \tag{5}$$

и значит, банаховы пространства $l(r)$, $0 < r < R$, со сверткой в качестве умножения становятся коммутативными нормированными кольцами с единицей e_0 [6]. Неравенство (5) позволяет также заключить, что L_R является топологическим кольцом [7].

Элемент x называется регулярным, если в кольце найдется элемент y такой, что произведение xy равно единице кольца.

Элемент коммутативного нормированного кольца регулярен тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одному максимальному идеалу [6].

Из (4) следует существование предела

$$\alpha = \lim_k \sqrt[k]{|a_k|} \geqslant 0$$

(см. [6]). Линейный мультипликативный функционал Φ_z, определенный на $l(r)$, $0 < r < R$, равенством

$$\Phi_z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k,$$

при $|z| \leqslant \alpha r$ непрерывен и множество $R_z = \{x \in l(r) : \Phi_z(x) = 0\}$ образует максимальный идеал. Как показано в [6], других максимальных идеалов в $l(r)$ нет.

Таким образом, для того, чтобы элемент x кольца $l(r)$ был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi_z(x) \neq 0$ для $|z| \leqslant \alpha r$.

Так как $L_R = \bigcap\limits_{0<r<R} l(r)$, то для регулярности элемента x из L_R необходимо и достаточно, чтобы x был регулярным в каждом $l(r)$, $0 < r < R$.

Через M_α обозначим при $\alpha > 0$ множество комплексных чисел z, удовлетворяющих неравенству $|z| < \alpha R$, а при $\alpha = 0$ — $\{0\}$.

Тогда, как следует из предыдущего, имеет место

Лемма. *Элемент x кольца L_R регулярен тогда и только тогда, когда $\Phi_z(x) \neq 0$ при любом z из M_α.*

При $\alpha > 0$ функция $\varphi(z) = \Phi_z(x)$ аналитична на M_α при любом x из L_R.

Отметим, что $Sx = e_1 x$, т. е. S — оператор умножения на e_1, а S^n $(n \geqslant 1)$ — оператор умножения на e_n (так как $e_n = e_1^n$).

Условимся под e_1^0 понимать e_0, а под S^0 — единичный оператор E.

§ 2. Общий вид изоморфизмов $\mathfrak{A}_R$, перестановочных с I^n

Предварительно докажем теорему, дающую общий вид линейного непрерывного оператора в $\mathfrak{A}_R$, перестановочного с I^n.

Теорема 1. *Для перестановочности линейного непрерывного оператора T с I^n $(n \geqslant 1)$, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид*

$$T = \sum_{p=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} t_{p,k} I^k \Big) D^p A_p, \tag{6}$$

где

$$A_p F(z) = A_p \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \Big) = \sum_{s=0}^{\infty} b_{sn+p} z^{sn+p}, \tag{7}$$
$$0 \leqslant p \leqslant n-1,$$

а коэффициенты $t_{p,k}$ удовлетворяют условию

$$\sup_{0 \leqslant p \leqslant n-1} \overline{\lim_{k}} \sqrt[k]{|t_{p,k} a_k|} \leqslant \frac{1}{R}. \tag{8}$$

Замечание. Операторные ряды в формуле (6) сходятся на каждом элементе пространства $\mathfrak{A}_R$.

Доказательство. Пусть T — линейный непрерывный оператор в $\mathfrak{A}_R$, перестановочный с I^n. Тогда $\tilde{T} = BTB^{-1}$ перестановочен с S^n, т. е. с умножением на e_1^n. И обратно, из того, что $\tilde{T}$ перестановочен с S^n следует, что $T = B^{-1}\tilde{T}B$ перестановочен с I^n.

Положим

$$t_p = \tilde{T} e_1^p, \quad 0 \leqslant p \leqslant n-1.$$

Тогда

$$\tilde{T} e_1^{sn+p} = e_1^{sn} \tilde{T} e_1^p = e_1^{sn} t_p = t_p e_1^{sn}, \quad s \geqslant 0, \quad 0 \leqslant p \leqslant n-1,$$

и оператор $\tilde{T}$ в действии на произвольный элемент

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k e_1^k=\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{\infty}\xi_{sn+p}e_1^{sn+p}$$

пространства L_R дает

$$\tilde{T}x=\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{\infty}\xi_{sn+p}\tilde{T}e_1^{sn+p}=\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{\infty}\xi_{sn+p}t_p e_1^{sn}.$$

Далее, так как $e_1^{sn}=S^{*p}e_1^{sn+p}$, то

$$\tilde{T}x=\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{\infty}\xi_{sn+p}t_pS^{*p}e_1^{sn+p}=\sum_{p=0}^{n-1}t_pS^{*p}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\xi_{sn+p}e_1^{sn+p}\right).$$

Если оператор BA_pB^{-1} обозначить через $\tilde{A}_p$, $0\leqslant p\leqslant n-1$, где A_p определяется равенством (7), то

$$\tilde{A}_px=\sum_{s=0}^{\infty}\xi_{sp+p}e_1^{sn+p},\quad 0\leqslant p\leqslant n-1.$$

Следовательно,

$$\tilde{T}x=\sum_{p=0}^{n-1}t_pS^{*p}\tilde{A}_px. \tag{9}$$

И обратно, каждый оператор вида (9) в L_R перестановочен с S^n, что проще всего проверяется на элементах базиса.

Таким образом, формула (9) дает общий вид линейного непрерывного оператора в L_R, перестановочного с S^n.

Элемент t_p, $0\leqslant p\leqslant n-1$, кольца L_R может быть представлен в виде ряда

$$t_p=\sum_{k=0}^{\infty}t_{p,k}e_1^k,\quad 0\leqslant p\leqslant n-1,$$

и значит, что следует из непрерывности умножения в кольце L_R, оператор умножения на t_p может быть представлен в виде операторного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}t_{p,k}S^k,\ 0\leqslant p\leqslant n-1,$$

сходящегося на каждом элементе пространства L_R (можно доказать даже равномерную сходимость ряда на каждом ограниченном множестве из L_R). Коэффициенты $t_{p,k}$ при этом удовлетворяют условию (3), т. е.

$$\sup_{0\leqslant p\leqslant n-1}\ \overline{\lim_{k}}\sqrt[k]{|t_{p,k}a_k|}\leqslant\frac{1}{R}.$$

В итоге получаем

$$\tilde{T}=\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}t_{p,k}S^k\right)S^{*p}\tilde{A}_p.$$

Тогда оператор $T=B^{-1}\tilde{T}B$ имеет вид (6) и удовлетворяет условию (8). Теорема доказана.

Нам понадобятся в дальнейшем изложении следующие свойства операторов $\tilde{A}_p$, $0 \leqslant p \leqslant n-1$, выполнение которых достаточно проверить на элементах базиса:

1°. $\tilde{A}_p\tilde{A}_q = \delta_{pq}\tilde{A}_p$, $0 \leqslant p,\ q \leqslant n-1$;

2°. $\sum\limits_{p=0}^{n-1} \tilde{A}_p = E$;

3°. если $x \in L_R$, а $y \in \tilde{A}_0 L_R$, то

$$S^{*p}\tilde{A}_p\, xy) = (S^{*p}\tilde{A}_p x)\, y.$$

Выясним теперь, при каком условии оператор (9) является изоморфизмом L_R.

Пусть существует $\tilde{T}^{-1} = \tilde{T}_1 = \sum\limits_{q=0}^{n-1} t_q^{(1)} S^{*q}\tilde{A}_q$, тоже линейный непрерывный оператор, перестановочный с S^n. Тогда

$$\tilde{T}\tilde{T}_1 = \sum_{p=0}^{n-1} t_p S^{*p}\tilde{A}_p \sum_{q=0}^{n-1} t_q^{(1)} S^{*q}\tilde{A}_q = E.$$

Подействуем обеими частями последнего равенства на e_q, $0 \leqslant q \leqslant n-1$. Получим

$$\sum_{p=0}^{n-1} t_p S^{*p}\tilde{A}_p t_q^{(1)} = e_q, \quad 0 \leqslant q \leqslant n-1. \tag{10}$$

Применим к равенству (10) оператор $S^{*r}\tilde{A}_r$. Учитывая свойство 3° операторов $\tilde{A}_p$ и тот факт, что

$$S^{*p}\tilde{A}\ t_q^{(1)} \in \tilde{A}_0 L_R, \quad 0 \leqslant p,\ q \leqslant n-1,$$

получим

$$\sum_{p=0}^{n-1} (S^{*r}\tilde{A}_r t_p)(S^{*p}\tilde{A}_p t_q^{(1)}) = \delta_{rq}e_0, \qquad 0 \leqslant r,\ q \leqslant n-1. \tag{11}$$

Если ввести в рассмотрение матрицы $\| S^{*r}\tilde{A}_r t_p \|_{r,\,p=0}^{n-1}$, $\| S^{*p}\tilde{A}_p t_q^{(1)} \|_{p,\,q=0}^{n-1}$ и $\| \delta_{rq}e_0 \|_{r,\,q=0}^{n-1}$ над кольцом L_R, то (11) означает, что

$$\| S^{*r}\tilde{A}_r t_p \|_{r,\,p=0}^{n-1} \| S^{*p}\tilde{A}_p t_q^{(1)} \|_{p,\,q=0}^{n-1} = \| \delta_{rq}e_0 \|_{r,\,q=0}^{n-1}.$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей, то

$$\det \| S^{*r}\tilde{A}_r t_p \|_{r,\,p=0}^{n-1} \det \| S^{*p}\tilde{A}_p t_q^{(1)} \|_{p,\,q=0}^{n-1} = e_0,$$

и значит, элемент

$$d = \det \| S^{*r}\tilde{A}_r t\ \|_{r,\,p=0}^{n-1}$$

регулярен. Это условие необходимо для того, чтобы оператор $\tilde{T}$ был изоморфизмом L_R. Оно же и достаточно.

Действительно, если элемент d регулярен, то матрица $\| S^{*r}\tilde{A}_r t_p \|_{p,\,q=0}^{n-1}$ имеет обратную вида $\| S^{*p}\tilde{A}\ t_q^{(1)} \|_{p,\,q=0}^{n-1}$, по которой строим оператор

$$\tilde{T}^{-1} = \sum_{q=0}^{n-1} t_q^{(1)} S^{*q}\tilde{A}_q.$$

В силу леммы § 1 регулярность элемента d эквивалентна условию

$$\Phi_z(d) - \det \| \Phi_z(S^{*r}\tilde{A}_r t_p) \|_{r,\,p=0}^{n-1} \neq 0$$

при любом z из M_α (здесь используется мультипликативность функционала Φ_z); при этом

$$\Phi_z(S^{*r}\tilde{A}_r t_p) = \sum_{s=0}^{\infty} t_{p,\,sn+r} z^{sn}.$$

Но операторы T и $\tilde{T} = BTB^{-1}$ непрерывно обратимы одновременно, следовательно, доказана.

Теорема 2. *Для того, чтобы линейный непрерывный оператор T в $\mathfrak{A}_R$ был изоморфизмом $\mathfrak{A}_R$, перестановочным с I^n $(n \geqslant 1)$, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид*

$$T = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} t_{p,\,k} I^k \right) D^p A_p,$$

а коэффициенты удовлетворяли условиям

$$\sup_{0 \leqslant p \leqslant n-1} \overline{\lim_k} \sqrt[k]{|t_{p,\,k} a_k|} \leqslant \frac{1}{R}$$

и

$$\det \| \varphi_{p,\,r}(z) \|_{p,\,r=0}^{n-1} \neq 0 \tag{12}$$

при любом z из M_α (определение M_α см. § 1), где

$$\varphi_{p,\,r}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} t_{p,\,sn+r} z^{sn},$$

Например, оператор интегрирования $\left(a_k = \frac{1}{k!}\right)$ и оператор умножения на z $(a_k = 1)$ удовлетворяют условиям (1), (4) и для них справедливы теоремы 1 и 2. При этом для оператора интегрирования $\alpha = 0$, а для оператора умножения на z $\alpha = 1$.

Замечание. При $\alpha = 0$ условие (12) теоремы 2 принимает вид

$$\det \| t_{p,\,r} \|_{p,\,r=0}^{n-1} \neq 0.$$

§ 3. Квазистепенные базисы из последовательностей обобщенных первообразных

Рассмотрим систему n $(n \geqslant 1)$ функций из пространства $\mathfrak{A}_R$

$$F_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} z^k, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Лемма. *Существует единственный линейный непрерывный перестановочный с I^n оператор T такой, что*

$$Tz^j = \frac{1}{a_j} F_j(z), \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{13}$$

Доказательство. Положим $h_j = BF_j$ и определим оператор $\tilde{T}$ в L_R равенством

$$\tilde{T} = \sum_{j=0}^{n-1} h_j S^{*j} \tilde{A}_j.$$

Так как $\tilde{T}e_j = h_j$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, то $T = B^{-1}\tilde{T}B$ удовлетворяет (13). Единственность очевидна.

Отметим, что

$$h_j = \left\{\frac{c_{jk}}{a_k}\right\}_{k=0}^{\infty}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1,$$

и

$$T = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{jk}}{a_k} I^k D^j A_j.$$

Определение. *Базис* $\{f_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ *в* $\mathfrak{A}_R$ *называется квазистепенным, если существует изоморфизм* A *пространства* $\mathfrak{A}_R$ *такой, что* $f_k(z) = Az^k$, $k \geqslant 0$.

Отметим, что данное здесь определение отличается от определения М. Г. Хапланова [8].

Теорема 3. *Предположим, что* $\alpha = 0$, *т. е.*

$$\overline{\lim_k} \sqrt[k]{|a_k|} = 0. \tag{14}$$

Для того чтобы система функций

$$\left\{\frac{1}{a_{sn}} I^{sn} F_0(z), \ \ldots, \ \frac{1}{a_{sn+n-1}} I^{sn} F_{n-1}(z)\right\}_{s=0}^{\infty} \tag{15}$$

образовывала в $\mathfrak{A}_R$ квазистепенной базис, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det \| c_{jk} \|_{j,\,k=0}^{n-1} \neq 0. \tag{16}$$

Достаточность. Пусть T — оператор, построенный в лемме. Тогда, сохраняя обозначения леммы, можем записать

$$\tilde{T}e_1^{sn+q} = \tilde{T}S^{sn}e_1^q = S^{sn}\tilde{T}e_1^q = S^{sn}h_q, \quad s \geqslant 0, \quad 0 \leqslant q \leqslant n-1,$$

где $\tilde{T} = BTB^{-1}$, откуда

$$Tz^{sn+q} = \frac{1}{a_{sn+q}} I^{sn} F_q, \quad s \geqslant 0, \quad 0 \leqslant q \leqslant n-1. \tag{17}$$

Оператор T имеет вид

$$T = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{jk}}{a_k} I^k D^j A_j,$$

и в силу условия (16)

$$\det \left\| \frac{c_{jk}}{a_k} \right\|_{j,\,k=0}^{n-1} \neq 0.$$

Значит выполняется условие (12) теоремы 2 и оператор T — изоморфизм пространства $\mathfrak{A}_R$.

Необходимость. Пусть (16) не выполняется. Тогда существует последовательность $\{\varphi_k\}_{k=0}^{n-1}$ такая, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k| \neq 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} c_{j,k}\varphi_k = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Зададим на $\mathfrak{A}_R$ линейный непрерывный функционал Φ равенством

$$\Phi(F(z)) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k b_k,$$

где $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ из $\mathfrak{A}_R$.

Нетрудно проверить, что $\Phi(TF(z)) = 0$ для любого $F(z)$ из $\mathfrak{A}_R$ (достаточно проверить это на элементах базиса).

Отсюда следует, что область значений оператора T, а значит и система функций (15), которая, как видно из (17), лежит в области значений оператора T, не полна в $\mathfrak{A}_R$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполняется условие* (14), *последовательности* $\{a_{k+N}\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяют (4),* $0 \leqslant N < \infty$, *и функция* $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *из* $\mathfrak{A}_R$ *такая, что*

$$b = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant l-1; \quad b_l \neq 0.$$

Тогда замкнутая линейная оболочка системы функций $\{I^s F(z)\}_{s=0}^{\infty}$ *совпадает с замкнутой линейной оболочкой системы* $\{z^{l+s}\}_{s=0}^{\infty}$, *которую обозначим* Y_l $(l \geqslant 1)$.

Замечание. В теоремах 1, 2, 3 при $n=1$ и в следствии теоремы 3 выполнение левого неравенства условия (1) не требуется.

В силу следствия теоремы 3 подпространствами Y_l, $l \geqslant 1$, исчерпываются нетривиальные инвариантные подпространства оператора I.

Подпространства Y_l линейно упорядочены по включению, т. е. оператор I одноклеточен.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Если последовательность* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, *определяющая оператор* I *в* $\mathfrak{A}_R$, *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\sup\limits_{0 \leqslant k,\ \nu < \infty} \left| \dfrac{a_{k+\nu+N}}{a_{k+N} a_{\nu+N}} \right| < \infty$, $0 \leqslant N < \infty$; условию (4));

2) $\lim\limits_{k} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, то оператор I одноклеточен.

Замечание. Условия 1), 2) теоремы 4 менее ограничительны, чем условие

$$\lim_{\nu} \max_{k \geqslant 1} \left| \frac{a_{k+\nu}}{a_k a_\nu} \right| = 0,$$

приведенное в [5] в качестве достаточного для одноклеточности оператора I.

В заключение приношу свою искреннюю благодарность К. М. Фишману и Н. И. Нагнибиде за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Маркушевич. О базисах в пространстве аналитических функций. «Матем. сб.», т. 17 (59), № 2. 1945.

2. К. М. Фишман. К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств, «Докл. АН СССР», т. 127, № 1, 1959.

3. Н. И. Нагнибида. О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве. «Сибирский матем. журн.», т. 7, № 6, 1966.

4. Н. И. Нагнибида. О некоторых вопросах, связанных с операторами обобщенного дифференцирования и интегрирования. Канд. дисс., г. Черновцы, 1966.

5. Н. К. Никольский. Инвариантные подпространства некоторых вполне непрерывных операторов, «Вестн. ЛГУ», серия матем.-мех. и астрон.», № 7, вып. 2, 1965.

6. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца, ГИФМЛ, М.. 1960.

7. М. А. Наймарк. Нормированные кольца, ГИТТЛ, М., 1956.

8. М. Г. Хапланов. Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций. ДАН СССР, т. 80, № 2, 1951.

Поступила 15 августа 1969 г.