ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР

А. Д. Варшавский

Введение

Пусть A есть банахова алгебра функций с единицей и $\mathfrak{M}_A$ — ее пространство максимальных идеалов. Непрерывная на $\mathfrak{M}_A$ функция f называется *A-локальной*, если в окрестности $U(m)$ каждой точки $m \in \mathfrak{M}_A$ она совпадает с некоторой функцией $\varphi_m \in A$. Алгебра называется *локальной*, если она содержит все A-локальные функции, и *нелокальной* — в противном случае. Пусть f, g — функции из A, O_f, O_g соответственно их множества нулей в $\mathfrak{M}_A$, а U — открытое подмножество в $\mathfrak{M}_A$, такое, что $O_g \subset U \subset O_f$. Говорят, что в алгебре A *разрешима проблема деления* (см. [1]), если для каждой такой пары функций имеет место соотношение $f = gh$, где h — некоторая функция из A. В противном случае проблема деления в A (по определению) не разрешима.

Замкнутое подмножество F в $\mathfrak{M}_A$ называется *A-выпуклым*, если для каждой точки $m_0 \in \mathfrak{M}_A \setminus F$ существует функция h из A такая, что $h(m_0) = 1$, $\max\limits_{m \in F} |h(m)| < 1$. Множество S в $\mathfrak{M}_A$ называется *множеством единственности* для A, если алгебра A не содержит ненулевой функции, обращающейся в 0 на S. Говорят, что A — *аналитическая* алгебра, если каждое открытое подмножество ее пространства максимальных идеалов является множеством единственности для A.

В 1963 г. Ева Каллин (см. [1]) построила первый пример нелокальной алгебры. Эта алгебра порождена координатными функциями пространства C^4 и является наименьшей замкнутой подалгеброй в $C(X)$ (X — некоторый полиномиально выпуклый компакт в C^4) с этим свойством. В построенной алгебре оказалась к тому же неразрешимой проблема деления.

В настоящей работе мы, развивая идею построения, указанного в статье [1], предлагаем некоторую каноническую конструкцию (см. § 2), позволяющую по каждой алгебре с равномерной сходимостью, шиловская граница Γ_A которой может быть представлена в виде объединения двух A-выпуклых множеств единственности для A, построить нелокальную алгебру B, содержащую исходную алгебру A в качестве своей замкнутой подалгебры. При этом пространство максимальных идеалов алгебры B оказывается гомотопически эквивалентным пространству $\mathfrak{M}_A$. В качестве алгебры A можно взять, в частности, аналитическую алгебру, граница Шилова которой распадается на два A-выпуклых множества.

Каждую нелокальную алгебру B, которая может быть получена с помощью конструкции, указанной в § 2, мы называем в честь Каллин нелокальной алгеброй *типа* ***K***.

Пространство $\mathfrak{M}_E$ максимальных идеалов нелокальной алгебры E, построенной в работе [1], обладает ненулевой фундаментальной группой. Возникает естественный вопрос, не является ли гомотопическая нетривиальность пространства максимальных идеалов нелокальной алгебры одной из существенных причин ее нелокальности.

В § 3 мы даем отрицательный ответ на этот вопрос, построив нелокальную алгебру типа ***K*** со стягиваемым пространством максимальных идеалов.

В § 4 показано, что если функциональная алгебра A, использованная при конструировании нелокальной алгебры B типа ***K***, содержит функцию, которая на пространстве $\mathfrak{M}_A$ принимает больше значений, чем на шиловской границе Γ_A алгебры A, то в алгебре B, так же, как и в алгебре E, проблема деления не разрешима.

§ 1. Погружение пространства максимальных идеалов функциональной алгебры в компакт с «плоской» дифференциальной структурой в окрестности границы погружения

Опишем один способ погружения пространства максимальных идеалов произвольной алгебры с равномерной сходимостью в более широкий компакт, такой что в окрестности границы погружения возникает некоторая дифференциальная структура. Этот более широкий компакт должен быть выпуклым в пространстве, в котором он реализован, относительно некоторого естественного класса функций, ибо он (компакт) будет в дальнейшем служить пространством максимальных идеалов нелокальной функциональной алгебры с равномерной сходимостью, которую мы построим в § 2.

Пусть A есть алгебра с равномерной сходимостью, содержащая константы, $\mathfrak{M}_A$ — ее пространство максимальных идеалов, а C^n — n-мерное линейное комплексное пространство с координатами $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Рассмотрим в пространстве $H^n = \mathfrak{M}_A \times C^n$ функцию вида

$$p(m, z) = \sum a_{k_1 k_2, \ldots, k_n}(m) z_1^{k_1} \cdot z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n},$$
$$k_1 + k_2 + \cdots + K_n \leqslant N$$

которую в дальнейшем будем называть A-полиномом. (Здесь $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$), $m \in \mathfrak{M}_A$, $N \geqslant 0$,

$$a_{k_1 k_2} \ldots {}_{k_n}(m) \in A, \ k_i \geqslant 0 \text{ — целые числа, } i = 1, 2, \ldots n).$$

Определение 1. *Множество $X \subset H^n$ называется A-полиномиально выпуклым, если для каждой точки $(m_0, z_0) \in H^n \setminus X$ существует A-полином $p_0(m, z)$ такой, что*

$$\max_X |p_0(m, z)| < |p_0(m_0, z_0)|.$$

Если X — компакт в H^n, то символом $P_A(X)$ будем обозначать банахову алгебру, полученную замыканием по равномерной сходимости на X сужений A-полиномов.

Легко проверяются следующие два утверждения:

1) Для того, чтобы компакт $X \subset H^n$ совпадал с пространством максимальных идеалов алгебры $P_A(X)$, необходимо и достаточно, чтобы множество X было A-полиномиально выпуклым,

2) Для того, чтобы компакт $X \subset H^n$ был A-полиномиально выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы он задавался системой соотношений вида:

$$\{|p_l(m, z)| \leqslant \lambda^l\}_{l \in L},$$

где L — некоторое семейство индексов, p_l — (для каждого $l \in L$) есть A-полином, а λ_l — неотрицательное вещественное число.

Предположив теперь, что $n \geqslant 2$, разобьем совокупность координат пространства C^n на две группы, положив

$$z' = (z_1, z_2, \ldots, z_k), \ z'' = (z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_n)$$

$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, и обозначим соответствующие подпространства в C^n символами C^k и C^{n-k}.

Лемма 1. Пусть K_1 и K_2 есть A-выпуклые компакты в $\mathfrak{M}_A$, такие, что $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ и B-полиномиально выпуклый компакт в C^k, содержащий начало координат. Рассмотрим два отображения $\psi_i : \mathrm{B} \to C^{n-k}$, задаваемые соотношениями $z_r = p^i_r(z')$,

где $r = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n,\ i = 1,\ 2$, а полиномы p^i_r выбраны так, что система уравнений

$$z_r - p^i_r(z) = 0 \quad (r = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n;\ i = 1,\ 2)$$

имеет и притом лишь нулевое решение

$$z' = z'' = 0 \tag{1}$$

в области $\mathrm{B} \times C^{n-k}$. Пусть B_i — график отображения $\psi_i\,(i = 1,\ 2)$ в пространстве C^n. Тогда компакт

$$X = (K_1 \times \mathrm{B}_1) \cup (K_2 \times \mathrm{B}_2) \cup \mathfrak{M},$$

где

$$\mathfrak{M} = \{(m,\ z) \in H^n : z = 0\},$$

совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры $B = P_A(X)$.

Доказательство. 1) Рассмотрим множество

$$L = \{(m,\ z) \in H^n : m \in \mathfrak{M}_A,\ z' \in \mathrm{B},\ (z_r - p^1_r)(z_q - p^1_q) = 0,$$
$$r,\ q = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n\}.$$

L есть A-полиномиально выпуклый компакт, ибо высекается из A-полиномиально выпуклого бесконечного «цилиндра» $\mathfrak{M}_A \times \mathrm{B}$ в H^n полиномиальными соотношениями (всякий полином является, очевидно, A-полиномом) и $X \subset L$. Положим $L_1 = L \setminus X$ и пусть $M_0 = (m_0,\ z_0) \in L_1$. Тогда, если $m_0 \in \mathfrak{M}_A \setminus K_i$, то так как множество $K_i\,(i = 1, 2)$ является A-выпуклым в $\mathfrak{M}_A$, существует функция $f^i_{m_0}(m) \in A$ такая, что

$$\max_{K_i} |f^i_{m_0}| \leqslant 1,\ \ |f^i_{m_0}(m_0)| > 1 \quad (i = 1,\ 2).$$

Считая функцию $f^i_{m_0}$ элементом алгебры $P_A(H^n)$ A-полиномов в H^n, рассмотрим систему соотношений:

$$|(\hat f^j_{m_0})^s (z_r - p^i_r)| \leqslant \lambda_r, \tag{2}$$
$$\lambda_r = \max_{\mathrm{B}} |p^2_r(z') - p^1_r(z')|,$$
$$\hat f^j_{m_0} = \begin{cases} f^j_{m_0}, & \text{если } m_0 \in \mathfrak{M}_A \setminus K_j \\ 0, & \text{если } m_0 \in K_j \end{cases}$$
$$r = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n;\ s = 1,\ 2,\ \ldots;\ i,\ j = 1,\ 2 : i \neq j.$$

В точке M_0 не выполняется хотя бы одно из соотношений (2). ибо в противном случае в силу условия (1), $M_0 \in X$, что невозможно. С другой стороны, легко проверить, что каждая точка компакта X удовлетворяет системе (2). Это означает, что компакт X «высекается» из A-полиномиально выпуклого множества L системой соотношений (2′), которая получается из системы (2), если параметру m_0 в ней позволить пробегать весь компакт $\mathfrak{W}_A$. Тем самым в силу сформулированного ранее утверждения 2 множество X само A-полиномиально выпукло. Применяя утверждение 1, получаем $X = \mathfrak{M}_B$. Лемма 1 доказана.

§ 2. Дифференциальная природа нелокальности алгебр типа K

В этом параграфе мы опишем метод (теорема 1), позволяющий по каждой функциональной алгебре с простыми аналитическими свойствами построить нелокальную алгебру с равномерной сходимостью, которую мы называем алгеброй типа K. Покажем, что нелокальность алгебры типа K и, в частности, алгебры Е. Каллина [4] есть следствие возможности построения на ее локальном пополнении пары различных линейных операторов, которые на самой алгебре оказываются определенным образом согласованными.

Теорема 1. *Пусть A — банахова алгебра функций с равномерной сходимостью, содержащая константы и обладающая следующими свойствами:*

1) *пространство $\mathfrak{M}_A$ — связно;*

2) *граница Шилова Γ_A несвязна и представляется в виде*

$$\Gamma_A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

где $\Gamma_i\,(i=1, 2)$ — *замкнутое в $\mathfrak{M}_A$ A-выпуклое множество единственности для A, причем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.*

Тогда существует нелокальная алгебра B с равномерной сходимостью, с несвязной границей Шилова Γ_B такая, что

1') *алгебра A изоморфна некоторой замкнутой подалгебре алгебры B;*

2') *существует гомеоморфное вложение*

$$k : \mathfrak{M}_A \to \mathfrak{M}_B,$$

такое, что

$$B \,|\, k(\mathfrak{M}_A) \cong A;$$

3') *пространство $\mathfrak{M}_A$ является гомотопическим ретрактом пространства $\mathfrak{M}_B$.*

Доказательство. 1) Положим (см. условие леммы 1)

$$K_i = \Gamma_i\,(i=1, 2);\ \ B = \{z' \in C^k \colon |z_r| \leqslant 1,\ r = 1, 2, \ldots, k\},$$

а отображения ψ_1 и ψ_2 из условия леммы 1 выберем так, чтобы выполнялось соотношение

$$\left.\frac{\partial p_r^1(z')}{\partial z_{j_0}}\right|_{z'=0} = \left.\frac{\partial p_r^2(z')}{\partial z_{j_0}}\right|_{z'=0}, \tag{3}$$

где $r = k+1,\ k+2, \ldots, n$, а $j_0\,(1 \leqslant j_0 \leqslant k)$ — некоторый фиксированный целый индекс. Каждому A-полиному $h = h(m, z)$ в H^n сопоставим два других A-полинома по формуле

$$\frac{\partial_i h}{\partial z_{j_0}} = \frac{\partial}{\partial z_{j_0}}\,[\tilde{h}(z',\ p_{k+1}^i(z'), \ldots, p_n^i(z')]$$

$$(i = 1, 2).$$

Тогда

$$\frac{\partial_i h}{\partial z_{j_0}} = \left.\frac{\partial h}{\partial z_{j_0}}\right|_{z_r = p_r^i(z')} + \sum_{s=k+1}^{s=n} \left.\frac{\partial h}{\partial z_s}\right|_{z_r = p_r^i(z')} \cdot \frac{\partial p_s^i(z')}{\partial z_{j_0}} \tag{4}$$

$(r = k+1,\ k+2, \ldots, n)$.

В силу условия леммы 1

$$p_r^i(0) = 0\ \ (i = 1, 2;\ r = k+1,\ k+2, \ldots, n). \tag{5}$$

Положим

$$D_i h = \frac{\partial_i h}{\partial z_{j_0}}\Big|_{z'=0} \ (i = 1, 2).$$

Тогда (см. § 1)

$$D_i h \in A \ (i = 1, 2)$$

и в силу соотношений (3), (4), (5)

$$D_1 h = D_2 h \tag{6}$$

как элементы алгебры A. Легко видеть, что соответствие

$$h \to D_i h \ (i = 1, 2)$$

есть линейный оператор, который мы обозначим символом $D_i (i = 1, 2)$. Имеем

$$D_i : P_A \to A.$$

(Символом P_A всюду обозначается алгебра всех A-полиномов в H^n).

Пусть теперь f — произвольная функция из алгебры $B = P_A(X)$ (см. условие леммы 1). Тогда существует последовательность A-полиномов

$$\{h_l(m, z)\} \ l = 1, 2, \ldots$$

такая, что

$$\max_X | f - h_l | \to 0 \ (l \to \infty). \tag{7}$$

Положим

$$U_B = [(\Gamma_1 \times B_1) \cup (\Gamma_2 \times B_2)] \setminus \Gamma_B,$$

$$(\Gamma_B = \Gamma_B^1 \cup \Gamma_B^2; \ \Gamma_B^j = \{(m, z) \in \Gamma_j \times B_j : |z_r| = 1, \ j = 1, 2),$$

$$r = 1, 2, \ldots, k$$

$$G_i = U_B \cap (\Gamma_i \times B_i), \ i = 1, 2.$$

Если S_i — произвольный компакт G_i, то в силу соотношения (7)

$$\max_{S_i} \left| \frac{\partial_i h_l}{\partial z_{j_0}} - \frac{\partial_i h_m}{\partial z_{j_0}} \right| \to 0 \ (l, m \to \infty)$$

$$(i = 1, 2)$$

и тем самым на S_i существует

$$\lim_{l \to \infty} \frac{\partial_i h_l}{\partial z_{j_0}} \ (i = 1, 2),$$

который мы обозначим символом $\frac{\partial_i f}{\partial z_{j_0}}$. Так как компакт S_i в G_i выбирается произвольно, то ясно, что соотношение

$$\frac{\partial_i f}{\partial z_{j_0}} = \lim_{l \to \infty} \frac{\partial_i h_l}{\partial z_{j_0}}$$

определяет непрерывную функцию в G_i. Ясно также, что если функция f совпадает в окрестности некоторой точки $M_0(m_0, z_0)$ из G_i с A-полиномом h, то

$$\frac{\partial_i f}{\partial z_{j_0}}\Big|_{\substack{m=m_0\\ z=z_0}} = \frac{\partial_i h}{\partial z_{j_0}}\Big|_{\substack{m=m_0\\ z=z_0}}, \tag{8}$$

причем правая часть этого соотношения определяется формулой (4). Выберем теперь в качестве S_i компакт

$$\Gamma_i = \{(m, z) \in G_i : \quad z = 0\}.$$

Тогда

$$\max_{\Gamma_i} |D_i h_l - D_i h_m| \to 0 \quad (l, m \to \infty).$$

А так как множество $\Gamma_A = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ можно, очевидно, отождествить с границей Шилова алгебры A, то в силу соотношения (6)

$$\max_{\Gamma_A} |D_i h_l - D_i h_m| \to 0 \quad (l, m \to \infty)$$

и, следовательно, в алгебре A существует функция

$$D_i f = \lim_{l \to \infty} D_i h_l \quad (i = 1, 2).$$

Тем самым каждый из операторов $D_i (i = 1, 2)$ продолжен с алгебры P_A на алгебру $B = P_A(X)$, причем

$$D_1 f = D_2 f, \quad f \in B. \tag{9}$$

Покажем теперь, что алгебра B нелокальна. Пусть $B^{\sim} = \{f \in C(\mathfrak{M}_B) : f$ — B-локальная$\}$. Положим

$$\mathcal{E} = \begin{cases} z_{j_0} & \text{на } X \setminus (\Gamma_1 \times B_1), \\ 0 & \text{на } X \setminus (\Gamma_2 \times B_2). \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{E} \in B^{\sim}$. Однако $\mathcal{E} \notin B$. Действительно, положим для каждой функции $f \in B^{\sim}$

$$\tilde{D}_i f = \left[\frac{\partial}{\partial z_{j_0}} (f | (\Gamma_i \times B_i))\right]_{z'=0} (i = 1, 2).$$

Тогда $\tilde{D}_i (i = 1, 2)$ — оператор, действующий из $B^{\sim}$ в $C(\Gamma_i)$. В силу доказанного выше для каждой функции $f \in B$ в алгебре A существует функция $D(f) = D_1 f = D_2 f$ такая, что

$$\tilde{D}_i f = D(f) | \Gamma_i \quad (i = 1, 2). \tag{10}$$

С другой стороны, применяя оператор $\tilde{D}_i$ к функции $\mathcal{E}$, получаем

$$\tilde{D}_1 \mathcal{E} = 0, \quad \tilde{D}_2 \mathcal{E} = 1,$$

и соотношение (10) при $f = \mathcal{E}$ невозможно ни для какой функции $D(f) \in A$.

Итак, $\mathcal{E} \notin B$ и алгебра B нелокальна. Утверждения 1'), 2'), 3') теоремы, связывающие алгебру B с исходной алгеброй A, могут быть теперь легко проверены.

Замечание 1. В качестве отображений $\psi_i (i = 1, 2)$ можно взять, например:

$$\psi_1 : z_2 = 0; \quad \psi_2 : z_2 = z_1^2.$$

(Здесь $n = 2$, $k = j_0 = 1$).

Замечание 2. Требование, чтобы каждое из множеств $\Gamma_i (i = 1, 2)$ было множеством единственности для A, можно заменить более сильным, но зато более естественным условием аналитичности алгебры A на ее границе Шилова Γ_A или, в силу известной теоремы Гликсберга [3], еще более сильным условием аналитичности алгебры A.

§ 3. Пример нелокальной алгебры с гомотопически тривиальным пространством максимальных идеалов

Пусть γ — жорданова дуга в комплексной плоскости, имеющая положительную площадь. Известно, что такие дуги существуют и что функция

$$F(z)=\iint\limits_{\gamma}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z},\quad \zeta=\xi+i\eta,\quad z\notin\gamma$$

1) непостоянна и аналитична вне γ,
2) имеет на бесконечности нуль первого порядка,
3) может быть продолжена на γ так, что станет непрерывной в расширенной плоскости [4].

В силу 2) существует число $N>0$ такое, что область $U_N=\{z\in C^1:|z|>N\}$ расширенной плоскости отображается функцией $w=F(z)$ конформно на некоторую односвязную окрестность V_N нуля плоскости w.

Пусть $\gamma_1=\{w:|w|=\alpha\}$, где постоянная α выбрана так, что $\gamma_1\subset V_N$. Найдем $\varepsilon>0$ столь малое, чтобы кольцо

$$R_{\gamma_1}=\{w:\alpha-\varepsilon<|w|<\alpha+\varepsilon\}$$

лежало целиком в V_N. Пусть Γ и R_Γ есть прообразы γ_1 и R_{γ_1} соответственно при отображении $w=F(z)$. Рассмотрим ту часть X_Γ конечной плоскости, которая ограничена кривой Γ, и алгебру A_Γ, полученную замыканием по равномерной сходимости на X_Γ семейства полиномов от двух функций z и $F(z)$. Легко показать, что пространство $\mathfrak{M}_{A_\Gamma}$ максимальных идеалов алгебры A_Γ можно отождествить и по запасу элементов и по топологии с компактом X_Γ, а границу Шилова Γ_{A_Γ} — с компактом $\Gamma\cup\gamma$.

Проверим, что алгебра A_Γ удовлетворяет условиям теоремы 1. Действительно, всегда можно считать, что $\Gamma\cap\gamma=\varnothing$. Так как, далее, алгебра A_Γ аналитична, а пространство $\mathfrak{M}_{A_\Gamma}$ связно, то остается показать, что каждое из множеств γ и Γ является A_Γ-выпуклым в $\mathfrak{M}_{A_\Gamma}$. Пусть γ_0 — кривая в плоскости z, гомеоморфная окружности, расположенная внутри Γ так, что она охватывает кривую γ и проходит через наперед заданную произвольную точку $z_0\in X_\Gamma\setminus\gamma$. Алгебра A_{γ_0}, полученная замыканием по равномерной сходимости на X_{γ_0} (X_{γ_0} — замыкание конечной области в плоскости z, ограниченной кривой γ_0) полиномов от z, изоморфна алгебре A_0 аналитических функций в круге $K=\{z\in C^1:|z|\leqslant 1\}$, непрерывных вплоть до его границы ∂K. Известно (это легко проверить и непосредственно), что каждая точка из ∂K является точкой пика для алгебры A_0. Отсюда следует, что z_0 есть точка пика для алгебры A_{γ_0}, и следовательно, существует функция $\varphi_0\in A_{\gamma_0}$ такая, что

$$\varphi_0(z_0)=1 \text{ и } |\varphi_0(z)|<1 \text{ на } X_{\gamma_0}\setminus\{z_0\}.$$

Для полинома $p_0(z)$, достаточно хорошо аппроксимирующего функцию $\varphi_0(z)$ на X_{γ_0}, будем иметь

$$\max_{X_{\gamma_0}}|p_0(z)|<|p_0(z_0)|,$$

а так как z_0 — произвольная точка из $X_\Gamma\setminus\gamma$, то последнее соотношение означает, что γ — A_Γ-выпуклое множество.

Для доказательства того, что Γ есть A_Γ-выпуклое в X_Γ множество, заметим, что окрестность R_Γ кривой Γ в плоскости z в силу своего выбора может быть «расслоена» на линии уровня модуля функции $w=F(z)$, причем сама кривая Γ совпадает при этом с α-уровнем, а достаточно близкие линии уровня, примыкающие к α-уровню с внутренней стороны, все являются линиями α_1-уровня, где $\alpha_1>\alpha$. Поэтому A_Γ выпуклость кривой Γ в X_Γ будет установлена, если мы покажем, что A_Γ-выпуклая оболочка $\hat{\Gamma}$ кривой Γ должна быть связным подмножеством в X_Γ. Действительно, предположив противное, рассмотрим наименьшую подалгебру $A_{\hat{\Gamma}}$ в $C(\hat{\Gamma})$, содержащую сужения на $\hat{\Gamma}$ функций z, $F(z)$. Так как $\hat{\Gamma}$ есть A_Γ-выпуклое множество в X_Γ, то, как легко видеть, оно также является выпуклым в плоскости z подмножеством относительно семейства полиномов от функций z и $w=F(z)$. Отсюда следует, что пространство максимальных идеалов алгебры $A_{\hat{\Gamma}}$ совпадает с $\hat{\Gamma}$. Так как компакт $\hat{\Gamma}$ несвязен, то в силу известной теоремы Шилова [2] о разложении нормированного кольца в прямую сумму идеалов, в алгебре $A_{\hat{\Gamma}}$ есть нетривиальный идемпотент, т. е. функция, принимающая на $\hat{\Gamma}$ ровно два значения — 0 и 1.

С другой стороны, так как $\hat{\Gamma}$ есть выпуклая оболочка компакта Γ относительно полиномов от двух функций $z, F(z)$, то граница Шилова алгебры $A_{\hat{\Gamma}}$ лежит в Γ, и, следовательно, алгебра $A_{\hat{\Gamma}}$ изоморфна алгебре сужений $A_{\hat{\Gamma}}|\Gamma$, что невозможно, ибо в силу связности Γ в $A_{\hat{\Gamma}}|\Gamma$ нет нетривиальных идемпотентов.

Полученное противоречие доказывает связность компакта $\hat{\Gamma}$, а значит, и A_Γ-выпуклость кривой Γ в X_Γ. Итак, алгебра A_Γ удовлетворяет всем условиям, наложенным в теореме 1 на алгебру A.

Построив по алгебре A_Γ алгебру способом, указанным в теореме 1, мы получим нелокальную алгебру функций с равномерной сходимостью, пространство максимальных идеалов которой стягиваемо и, следовательно, гомотопически тривиально. (Действительно, в силу теоремы 1 гомеоморфный кругу компакт X_Γ является гомотопическим ретрактом пространства $\mathfrak{M}_B$).

§ 4. О проблеме деления в нелокальной алгебре типа K

В этом параграфе мы покажем, что если алгебра A удовлетворяет дополнительно одному естественному условию, то в соответствующей алгебре типа K проблема деления не разрешима.

Определение 2. *Будем говорить, что функциональная банахова алгебра A есть алгебра с поглощающей границей Шилова Γ_A, если какова бы ни была функция f из A образы $f(\mathfrak{M}_A)$ и $f(\Gamma_A)$ компактов $\mathfrak{M}_A$ ($\mathfrak{M}_A$ — пространство максимальных идеалов алгебры A) и Γ_A соответственно при отображении $f:\mathfrak{M}_A\to C^1$ совпадают как подмножества пространства C^1.*

Алгеброй с поглощающей границей является, например, наименьшая подалгебра в $C(S)$, где $S=\{z=(z_1,z_2)\in C^2:|z_1|^2+|z_2|^2\leqslant 1\}$, содержащая сужения на компакт S полиномов от переменных z_1, z_2.

Теорема 2. *Если алгебра A обладает свойствами 1), 2) из условия теоремы 1 и, кроме того, не является алгеброй с поглощающей границей, то в соответствующей алгебре типа K проблема деления не разрешима.*

Доказательство. 1) Если A не является алгеброй с поглощающей границей, то существует функция $\varphi\in A$ такая, что $0_\varphi\neq\varnothing$, $0_\varphi\cap\Gamma_A=\varnothing$, где $0_\varphi=\{m\in\mathfrak{M}_A:\varphi(m)=0\}$, Γ_A — граница Шилова алгебры A. Пусть B —

нелокальная алгебра, построенная по алгебре A так, как это сделано в теореме 1. Тогда в силу утверждения 1′) этой теоремы функция φ может быть рассмотрена как элемент алгебры B. Положим $f = z_{i_0}$, $g = \varphi$. (Здесь и в дальнейшем мы придерживаемся обозначений, принятых в теореме 1). Тогда ясно, что функция f обращается в 0 в окрестности множества $0_g = \{M \in X : g(M) = 0\}$. Но в алгебре B нет функции h, для которой

$$gh = f. \tag{1}$$

Действительно, если $h \in B$, то $D(h) \in A$ (см. доказательство теоремы 1). Но из равенства (1), учитывая, что функция φ не зависит от z_{i_0}, получаем, что в U_B

$$\varphi \cdot D(h) = 1.$$

В частности, $\varphi \cdot D(h) = 1$ на Γ_A и, так как функция $\varphi \cdot D(h) \in A$, то $\varphi \cdot D(h) = 1$, на $\mathfrak{M}_A$, что невозможно, ибо функция φ, очевидно, необратима в A. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Существует функциональная алгебра с гомотопически тривиальным пространством максимальных идеалов, в которой проблема деления неразрешима.*

Действительно, такова, например, алгебра B, рассмотренная в § 3, ибо соответствующая алгебра $A = A_\Gamma$ не является, очевидно, алгеброй с поглощающей границей Шилова.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Kallin. a nonlocal function algebra, Trans. Amer Math. Soc. 104 № 1, 24—36 (1963).

2. И. М. Гельфанд. Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, 1960.

3. I. Glicksberg. A remark on analyticity of functions algebras, Pac. J. Math. 1963. v. 13 № 4.

4. A. Denjoy. Sur la continuité des fonction analytiques singuliers, Bull. Soc. Math. France 60 (1932).

5. Дж. Вернер. Банаховы алгебры и аналитические функции. Сб. «Некоторые вопросы теории приближений», ИЛ, 1963.

6. А. Д. Варшавский. Функциональная алгебра второй степени нелокальности. «Матем. сб.», т. 80, № 2, 1969.

Поступила 15 августа 1969 г.