ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 13 1971

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ КРАТНОЙ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ ОПЕРАТОРОВ

В. И. Мацаев, Е. З. Могульский

В работе изучается задача о кратной полноте системы собственных и присоединенных векторов полиномиального операторного пучка в гильбертовом пространстве.

Начало этому направлению спектральной теории операторов было положено в фундаментальных исследованиях М. В. Келдыша [1], который ввел понятие кратной полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов и нашел достаточное условие кратной полноты.

Результаты М. В. Келдыша получили развитие в работах Дж. Э. Аллахвердиева [2], Ю. А. Паланта [3], А. С. Маркуса [4]. Случай квадратичного пучка операторов был детально изучен в работах М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [5]. Ряд теорем о полноте для случая линейного операторного пучка был установлен В. И. Мацаевым [6]. Настоящая работа посвящена распространению некоторых из этих теорем на случай полиномиального пучка. Публикуемые результаты анонсировались для линейного пучка В. И. Мацаевым в [6], а для общего случая Е. З. Могульским [21].

Введем основные обозначения и приведем ряд фактов теории операторов в гильбертовом пространстве, при этом будем придерживаться монографии [7].

Через $\mathfrak{S}_\infty$ обозначим класс линейных вполне непрерывных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Равномерной нормой ограниченного оператора A называется число

$$\|A\| = \sup_{(\|\varphi\| = 1;\ \varphi\in\mathfrak{H})} \|A\varphi\|.$$

Если $A \in \mathfrak{S}_\infty$, то и неотрицательный оператор $(A^* A)^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{S}_\infty$. Собственные числа оператора $(A^* A)^{\frac{1}{2}}$ называются s-числами оператора A. Ненулевые s-числа будем нумеровать в порядке убывания с учетом кратностей, так что

$$s_j(A) = \lambda_j((A^* A)^{\frac{1}{2}}) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ \dim (A^* A)^{\frac{1}{2}}),$$

где $r = \dim (A^* A)^{\frac{1}{2}}$ — размерность оператора $(A^* A)^{\frac{1}{2}}$. Если $r < \infty$, то полагаем $s_{r+1} = s_{r+2} = \cdots = 0$. Отметим, что $s_1(A) = \|A\|$. Если оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty$ нормален, то $s_j(A) = |\lambda_j(A)|$. Каков бы ни был ограниченный оператор B

$$s_j(BA) \leqslant \|B\|\, s_j(A),$$
$$s_j(AB) \leqslant \|B\|\, s_j(A), \qquad (A \in \mathfrak{S}_\infty;\ j = 1,\ 2 \ldots) \tag{0.1}$$

Оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty$ допускает разложение в ряд Шмидта

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)(\cdot,\ \varphi_j),\ \psi_j, \tag{0.2}$$

где $\{\varphi_j\}_1^\infty$, $\{\psi_j\}_1^\infty$ — некоторые ортонормированные системы.

Для s-чисел вполне непрерывных операторов имеют место следующие неравенства:

а) (Фань Цзы [8]) $s_{m+n+1}(A+B) \leqslant s_{m+1}(A) + s_{n+1}(B)$; $\quad$ (0.3)

$(m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots)$

б) (Г. Вейль [9]) $\prod_{j=1}^{n}(1+r\,|\lambda_j(A)|) \leqslant \prod_{j=1}^{n}(1+rs_j(A))$, $\quad$ (0.4)

где r — любое положительное число.

Через $\mathfrak{S}_p\ (0 < p < \infty)$ обозначим класс вполне непрерывных операторов, для которых

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty,$$

а через $\mathfrak{S}_\omega$ — класс вполне непрерывных операторов, для которых

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)\cdot(2j-1)^{-1} < \infty.$$

Пространство $\mathfrak{S}_\omega$ содержит в себе все пространства $\mathfrak{S}_p$ при $p \geqslant 1$.

Под определителем $\det(1-A)$, где оператор $A \in \mathfrak{S}_1$, понимаем предел определителей $\det(1-A_n)$, где A_n — последовательность конечномерных операторов, аппроксимирующих оператор A по метрике пространства $\mathfrak{S}_1$.

Пусть оператор $A \in \mathfrak{S}_1$ и существует оператор $(1-A)^{-1}$. Тогда имеет место следующая важная оценка (И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн [7, стр. 298]):

$$\|(1-A)^{-1}\| \leqslant |\det(1-A)|^{-1}\cdot\prod_{j=1}^{\infty}(1+s_j(A)). \tag{0.5}$$

С оператором $A \in \mathfrak{S}_\infty$ связана функция распределения характеристических чисел этого оператора $\nu(t,\ A)\ (t > 0)$, равная количеству чисел $s_n(A)$, больших t^{-1}.

Нормальный оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty$ называется полным, если его нулевое подпространство состоит из нуля, т. е. система его собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям, полна в $\mathfrak{H}$.

1. Некоторые положения теории полиномиальных операторных пучков*.

Операторным пучком $L(\lambda)$ называется оператор-функция $L(\lambda) = 1 - M(\lambda)$, где $M(\lambda)$ — голоморфная оператор-функция со значениями из $\mathfrak{S}_\infty$, определенная в некоторой области D комплексной плоскости λ. Число λ_0 называется характеристическим числом операторного пучка, если существует ненулевой вектор $\varphi_0 \in \mathfrak{H}$, такой, что $L(\lambda_0)\varphi_0 = 0$, при этом φ_0 именуется собственным вектором пучка, отвечающим характеристическому числу λ_0.

---

* См. также [10].

Определение. *Векторы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ назовем цепочкой векторов, присоединенных к собственному вектору φ_0, если существует векторный полином*

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i (\lambda - \lambda_0)^i \quad (\varphi_i \in \mathfrak{H};\ i = 0, \ldots, k)$$

такой, что

$$\| L(\lambda)\varphi(\lambda)\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{k+1}).$$

Кратностью собственного вектора φ_0 будем называть максимальную длину цепочки присоединенных к φ_0 векторов.

Отметим, что приведенное здесь определение цепочки совпадает с определением цепочки по М. В. Келдышу [1].

Характеристическое число пучка λ_0 называется характеристическим числом конечной алгебраической кратности, если пространство нулей оператора $L(\lambda_0)$ конечномерно и кратность каждого собственного вектора конечна. Если хотя бы в одной точке оператор $L(\lambda)$ обратим, то согласно [11] множество характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ состоит из дискретного множества точек конечной алгебраической кратности, которое может иметь точки сгущения лишь на границе области D.

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j \quad (A_j \in \mathfrak{S}_\infty). \tag{1.0}$$

Пусть φ_0 — собственный вектор пучка (1.0), отвечающий характеристическому числу λ_0, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — присоединенная к нему цепочка. Тогда соотношениями

$$\begin{gathered}\varphi_0^{(\nu)} = \lambda_0 \varphi_0^{(\nu-1)}, \\ \varphi_s^{(\nu)} = \lambda_0 \varphi_s^{(\nu-1)} + \varphi_{s-1}^{(\nu-1)}, \\ (\varphi_0^{(0)} = \varphi_0,\ \varphi_s^{(0)} = \varphi_s;\ \nu = 1, \ldots, n-1;\ s = 1, 2, \ldots, k)\end{gathered} \tag{1.1}$$

определяются $n-1$ собственных векторов и присоединенных к ним цепочек.

Действительно, если $\varphi_0^{(\nu-1)}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(\nu-1)}, \ldots, \varphi_k^{(\nu-1)}$ — присоединенная к нему цепочка, то

$$\| L(\lambda)(\sum_{s=0}^{k} \varphi_s^{(\nu)}(\lambda-\lambda_0)^s)\| = \| L(\lambda)\left(\lambda_0\varphi_0^{(\nu-1)} + \sum_{s=1}^{k}(\lambda_0\varphi_s^{(\nu-1)} + \varphi_{s-1}^{(\nu-1)})(\lambda-\lambda_0)^s\right)\| =$$

$$= \| \lambda_0 L(\lambda)\left(\sum_{s=0}^{k}\varphi_s^{(\nu-1)}(\lambda-\lambda_0)^s\right) + (\lambda-\lambda_0)L(\lambda)\left(\sum_{j=0}^{k-1}\varphi_j^{(\nu-1)}(\lambda-\lambda_0)^j\right)\| =$$

$$= O(|\lambda-\lambda_0|^{k+1}),$$

и на основании определения заключаем, что $\varphi_0^{(\nu)}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(\nu)}, \ldots, \varphi_k^{(\nu)}$ — цепочка присоединенных к нему векторов.

Система собственных и присоединенных векторов пучка (1.0) называется n-кратно полной в $\mathfrak{H}$, если совокупность векторов

$$\tilde{\varphi}_s\{\varphi_s^{(0)}, \varphi_s^{(1)}, \ldots, \varphi_s^{(n-1)}\},$$

построенных для всех характеристических чисел и всевозможных цепочек, полна в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$, являющемся ортогональной суммой n экземпляров пространства $\mathfrak{H}$.

Исходной для дальнейшего является

Лемма 1.1. *Если система собственных и присоединенных векторов пучка* (1.0) *не является n-кратно полной в* $\mathfrak{H}$, *то найдется ненулевой вектор* $g\{g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}\} \in \tilde{\mathfrak{H}}$, *такой, что для любого вектора* $f \in \mathfrak{H}$ *функция*

$$F(\lambda) = \sum_{l=0}^{n-1} (\lambda^l L^{-1}(\lambda) f, g_l)$$

будет целой.

Доказательство. Покажем, что если λ_0 является полюсом порядка $p+1$ функции $L^{-1}(\lambda) f$ ($f \in \mathfrak{H}$), то главная часть ее разложения в ряд Лорана имеет вид

$$\frac{\varphi_0^{(0)}}{(\lambda-\lambda_0)^{p+1}} + \frac{\varphi_1^{(0)}}{(\lambda-\lambda_0)^{p}} + \cdots + \frac{\varphi_p^{(0)}}{\lambda-\lambda_0},$$

где $\varphi_0^{(0)}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \ldots, \varphi_p^{(0)}$ — присоединенная к нему некоторая цепочка.

Действительно, обозначим через $\psi(\lambda)$ $n+1$ первых членов разложения в ряд аналитической в окрестности λ_0 функции $(\lambda-\lambda_0)^{p+1} L^{-1}(\lambda) f$. Тогда

$$\| L(\lambda)\psi(\lambda)\| = 0(|\lambda-\lambda_0|^{p+1}),$$

и поэтому коэффициентами полинома $\psi(\lambda)$ в силу определения будут являться собственный вектор и векторы присоединенной к нему цепочки.

Допустим, что

$$\frac{\varphi_0^{(m-1)}}{(\lambda-\lambda_0)^{p+1}} + \frac{\varphi_1^{(m-1)}}{(\lambda-\lambda_0)^{p}} + \cdots + \frac{\varphi_p^{(m-1)}}{\lambda-\lambda_0}$$

главная часть разложения в ряд Лорана функции

$$\lambda^{m-1} L^{-1}(\lambda) f \quad (1 \leqslant m \leqslant n-1).$$

Тогда главная часть разложения в ряд Лорана функции $\lambda^m L^{-1}(\lambda) f$ будет равна

$$\frac{\lambda_0\varphi_0^{(m-1)}}{(\lambda-\lambda_0)^{p+1}} + \frac{\lambda_0\varphi_1^{(m-1)} + \varphi_0^{(m-1)}}{(\lambda-\lambda_0)^{p}} + \cdots + \frac{\lambda_0\varphi_p^{(m-1)} + \varphi_{p-1}^{(m-1)}}{\lambda-\lambda_0}.$$

В силу соотношений (1.1) последнее выражение принимает вид

$$\frac{\varphi_0^{(m)}}{(\lambda-\lambda_0)^{p+1}} + \frac{\varphi_1^{(m)}}{(\lambda-\lambda_0)^{p}} + \cdots + \frac{\varphi_p^{(m)}}{\lambda-\lambda_0}.$$

Если векторы $\tilde{\varphi}_s$, построенные для всех характеристических чисел и всевозможных цепочек, не полны в $\tilde{\mathfrak{H}}$, то найдется вектор $\tilde{g} \in \tilde{\mathfrak{H}}$, такой, что $(\tilde{\varphi}_s, \tilde{g})_{\tilde{\mathfrak{H}}} = 0$. Так как главная часть разложения функции $F(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 равна

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p} \frac{(\varphi_j^{(m)}, g_m)}{(\lambda-\lambda_0)^{p+1-j}} = \sum_{j=0}^{p} \frac{(\tilde{\varphi}_j, \tilde{g})_{\tilde{\mathfrak{H}}}}{(\lambda-\lambda_0)^{p+1-j}},$$

то функция $F(\lambda)$ является целой.

Лемма доказана.

Сформулируем сейчас основную теорему М. В. Келдыша о полноте системы собственных и присоединенных векторов полиномиального операторного пучка в том виде, в каком она приводится в [2].

Рассмотрим операторные пучки

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j A_j H^j - \lambda^n H^n, \tag{I}$$

$$L_1(\lambda) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j H^j A_j - \lambda^n H^n, \tag{I^a}$$

в которых операторы $A_j \in \mathfrak{S}_\infty$, а $H \in \mathfrak{S}_\infty$ — полный нормальный оператор, n-я степень которого есть оператор самосопряженный.

Теорема М. В. Келдыша. *Если оператор $H \in \mathfrak{S}_p\,(p > 0)$, то система собственных и присоединенных векторов каждого из пучков (I), (I^a) n-кратно полна в $\mathfrak{H}$.*

Утверждение теоремы М. В. Келдыша и всех доказываемых в статье теорем остается справедливым и в том случае, когда в пучках (I), (I^a) спектр оператора H лежит на произвольной конечной системе лучей, исходящих из точки $\lambda = 0$. Мы останавливаемся на требовании $H^n = (H^n)^*$ лишь из соображений упрощения записи.

Поясним применяемую в данной работе схему доказательства теорем полноты, близкую к схеме М. В. Келдыша.

Если система собственных и присоединенных векторов пучка не является n-кратно полной, то в силу леммы 1.1. функция $F(\lambda)$ является целой. Функция $F(\lambda)$ представляется в виде отношения двух аналитических функций. причем функция, стоящая в знаменателе, является определителем некоторого оператора из $\mathfrak{S}_1$,

$$F(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}.$$

Чтобы получить оценку для $|F(\lambda)|$ в некоторой области, числитель надо оценить сверху, а знаменатель снизу. Оценка сверху для $|D_1(\lambda)|$ получается с помощью неравенства (0.4). Основная трудность состоит в нахождении оценки снизу в области для $|D_0(\lambda)|$. Эта оценка устанавливается из оценки сверху для $|D_0(\lambda)|$ в этой области и получается на основании неравенства (0.5). Методика получения подобного рода оценок принадлежит В. И. Мацаеву [12], [13].

Используя теорему Фрагмена — Линделефа и полученную оценку для $|F(\lambda)|$ через s-числа тех или иных операторов, входящих в пучок, устанавливаем на основании условия доказываемой теоремы, что

$$F(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j a_j.$$

Из последнего представления следует, что $g_0 = g_1 = \ldots = g_{n-1} = 0$, т. е. тот факт, что система собственных и присоединенных векторов пучка n-кратно полна в $\mathfrak{H}$.

Систематически будут использоваться следующие предложения.

Лемма 1.2. Если n-я степень полного нормального оператора $H \in \mathfrak{S}_\infty$ является самосопряженным оператором, то справедлива оценка

$$\|\lambda^p H^p (1 - \lambda^n H^n)^{-1}\| < \frac{2^{n-1}}{|\sin n\varphi|} \qquad (\varphi = \arg\lambda),$$
$$(p = 0,\ 1, \ldots, n-1).$$

Доказательство. Так как $H \in \mathfrak{S}_\infty$ — полный нормальный оператор, то для него справедливо представление

$$\lambda^p H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda\lambda_j)^p}{1-(\lambda\lambda_j)^n}(\cdot,\ \varphi_j)\varphi_j \qquad (1.2)$$
$$(p=0,\ 1, \ldots, n-1),$$

где $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — полная ортонормированная последовательность собственных векторов оператора H, а $\{\lambda_j\}_1^\infty$ — соответствующая последовательность собственных чисел того же оператора. Из представления (1.2) следует, что

$$\|\lambda^p H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1}\| = s_1(\lambda^p H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1}) = \sup_{(j)} \left| \frac{(\lambda\lambda_j)^p}{1-(\lambda\lambda_j)^n} \right|.$$

При $|\lambda\lambda_j| > 2$ имеем

$$\left| \frac{(\lambda\lambda_j)^p}{1-(\lambda\lambda_j)^n} \right| \leqslant \frac{|\lambda\lambda_j|^p}{|\lambda\lambda_j|^n - 1} < \frac{|\lambda\lambda_j|^p}{|\lambda\lambda_j|^n(1-2^{-n})} < \frac{2^{n-1}}{2^n-1}. \qquad (1.3)$$

Если $|\lambda\lambda_j| < 2$, то, так как $\arg\lambda_j = \frac{\pi l}{n}$ $(l=0,\ 1, \ldots, 2n-1)$, получаем

$$\left| \frac{(\lambda\lambda_j)^p}{1-(\lambda\lambda_j)^n} \right| \leq \frac{2^p}{|1-(\lambda\lambda_j)^n|} \leq \frac{2^{n-1}}{|\sin n\varphi|} \qquad (1.4)$$

Объединяя оценки (1.3) и (1.4), приходим к утверждению леммы.

Пусть $0 < \theta < \frac{\pi}{2n}$ и $G_\theta = \bigcup_{l=0}^{2n-1} G_{l,\theta}$, где $G_{l,\theta}\{\lambda\colon \frac{\pi l}{n} + \theta < \arg\lambda < \frac{\pi(l+1)}{n} + \theta\}$. Кроме того, пусть $G_\theta^R = G_\theta \cap \{\lambda : |\lambda| > R\}$.

Лемма 1.3. (М. В. Келдыш). *Если n-я степень полного нормального оператора $H \in \mathfrak{S}_\infty$ является самосопряженным оператором, то для любого оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$ в области G_θ выполняются соотношения*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda^p A H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1}\| = 0,$$
$$(p=0,\ 1, \ldots, n-1)$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\lambda^p H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1} A\| = 0.$$

Доказательство. Докажем первое соотношение, второе доказывается аналогично. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и представим оператор A в виде $A = K + M$, где K — конечномерный оператор

$$K = \sum_{k=1}^{m} (\cdot,\ \psi_k)\ e_k \quad (e_k,\ \psi_k \in \mathfrak{H},\ \|\psi_k\| = 1;\ k = 1, \ldots, m),$$

а норма оператора M мала — $\|M\| < \frac{\varepsilon}{2n}|\sin n\theta|$. Для любого вектора $f \in \mathfrak{H}$, учитывая (1.2), получаем

$$\|\lambda^p K H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1} f\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda\lambda_j)^p}{1-(\lambda\lambda_j)^n} (f,\ \varphi_j)(\varphi_j,\ \psi_k) e_k \right\| \leq$$
$$\leq \|f\| \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{(\lambda\lambda_j)^p}{1-(\lambda\lambda_j)^n} \right|^2 \cdot |(\varphi_j,\ \psi_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Выберем N, а затем R настолько большими, чтобы выполнялись неравенства

$$\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |(\varphi_i, \psi_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon |\sin n\theta|}{2^{n+1}m},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; \ |\lambda| > R)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{(\lambda\lambda_j)^p}{1-(\lambda\lambda_j)^n}\right|^2 \cdot |(\varphi_i, \psi_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4m}.$$

Тогда на основании леммы 1.2 заключаем, что

$$\|\lambda^p K H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1}\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и поэтому в области G_θ^R справедливо неравенство

$$\|\lambda^p A H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1}\| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Каждый из операторных пучков* (I), (I^a) *обратим в области* G_θ^R и $\sup\limits_{(\lambda\in G_\theta^R)} \|L^{-1}(\lambda)\| < \infty$.

Доказательство. Остановимся лишь на случае пучка (I). Представим резольвенту этого пучка в виде

$$L^{-1}(\lambda) = (1-\lambda^n H^n)^{-1} \cdot \left(1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1}\right)^{-1}.$$

Выберем R так, чтобы в области G_θ^R удовлетворялось неравенство

$$\left\|\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1}\right\| \le \frac{1}{2}.$$

Тогда в области G_θ^R будет обратим оператор

$$1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1}$$

и

$$\sup_{\lambda\in G_\theta^R} \left\|\left(1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p H^p (1-\lambda^n H^n)^{-1}\right)^{-1}\right\| \le 2.$$

Поэтому

$$\sup_{\lambda\in G_\theta^R} \|L^{-1}(\lambda)\| \le \frac{2^n}{|\sin n\theta|}.$$

Лемма 1.4. *Если операторы* $A_i \in \mathfrak{S}_\infty$ $(i = 1, \ldots, m)$, *то имеет место неравенство*

$$\int_0^T \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) d\nu\left(t, \sum_{i=1}^m A_i\right) \le \sum_{i=1}^m \int_0^T \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) d\nu(mt, A_i), \quad (0 < T \le \infty).$$

Доказательство. Обозначим

$$l_i = \nu(mt,\ A_i) = \min_{(k)}\left\{k : s_{k+1}(A_i) \le \frac{1}{mt}\right\}.$$

Тогда на основании неравенства Фань Цзы (0.3) получим

$$s_{\sum\limits_{i=1}^{m} l_i+1}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{m} s_{l_i+1}(A_i) \le m\cdot\frac{1}{mt} = \frac{1}{t}.$$

Кроме того, пусть

$$l = \nu\left(t,\ \sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \min_{(k)}\left\{k : s_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) \le \frac{1}{t}\right\}.$$

Тогда $l+1 \le \sum\limits_{i=1}^{m} l_i + 1$, ибо $l+1$ — наименьший номер, для которого выполняется неравенство $s_p\left(\sum\limits_{i=1}^{m} A_i\right) \le \frac{1}{t}$. Следовательно, $\nu\left(t,\ \sum\limits_{i=1}^{m} A_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{m} \nu(mt,\ A_i)$ и значит,

$$\int_0^T \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) d\nu\left(t,\ \sum_{i=1}^{m} A_i\right) = \ln\left(1+\frac{1}{T}\right)\nu\left(T,\ \sum_{i=1}^{m} A_i\right) + \int_0^T \frac{\nu\left(t,\ \sum\limits_{i=1}^{m} A_i\right)}{t^2+t}\,dt \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\left(\ln\left(1+\frac{1}{T}\right)\nu(mt,\ A_i) + \int_0^T \frac{\nu(mt,\ A_i)}{t^2+t}\,dt\right) = \sum_{i=1}^{m}\int_0^T \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) d\nu(mt,\ A_i).$$

Лемма доказана.

§ 2. Оценка резольвенты полиномиального операторного пучка через s-числа входящих в этот пучок операторов. Обобщение теоремы М. В. Келдыша

Рассмотрим операторный пучок

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{p=1}^{n} \lambda^p B_p, \tag{2.1}$$

в котором операторы $B_p \in \mathfrak{S}_\infty$ $(p = 1, \ldots, n)$.

Используя разложение Шмидта (0.9), представим каждый из операторов, входящих в пучок, в виде суммы $B_p = B_p^{(m)} + E_p^{(m)}$, где $B_p^{(m)}$ — конечномерный оператор, s-числа которого совпадают с s-числами оператора B_p, большими $\| E_p^{(m)} \|$.

Обозначим через $E(\lambda)$ оператор

$$E(\lambda) = \sum_{p=1}^{n} \lambda^p E_p^{(m)},$$

и представим резольвенту пучка (2.1) в виде

$$L^{-1}(\lambda)=(1-E(\lambda))^{-1}\left(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^{p}B_{p}^{(m)}(1-E(\lambda))^{-1}\right)^{-1}. \tag{2.2}$$

Нам часто придется опираться на оценку резольвенты пучка, которую дает

Лемма 2.1. Пусть элементы $f,\ g_p\in\mathfrak{H}$ $(p=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ *таковы, что функция*

$$F(\lambda)=\left(L^{-1}(\lambda)f,\ \sum_{p=0}^{n-1}\bar{\lambda}^{p}g_{p}\right)$$

является целой. Тогда для достаточно больших $r=|\lambda|$ *справедлива оценка*

$$\ln|F(\lambda)|\leq 3(n-1)\ln r+m\sum_{p=1}^{}\int_{0}^{(n+2)(2r)^{p}}t^{-1}\cdot\nu(t,\ B_p)\,dt.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$D_0(\lambda)=\det\left(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^{p}B_{p}^{(m)}(1-E(\lambda))^{-1}\right).$$

С помощью неравенства (0.4) получим для нее оценку

$$|D_0(\lambda)|\leq\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+s_j\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda^{p}B_{p}^{(m)}(1-E(\lambda))^{-1}\right)\right)=$$

$$=\exp\left\{\int_{0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)d\nu\left(t,\ \sum_{p=1}^{n}\lambda^{p}B_{p}^{(m)}(1-E(\lambda))^{-1}\right)\right\}. \tag{2.3}$$

Пусть $R>r$, тогда при

$$\|E_{p}^{(m)}\|\leq\frac{1}{(n+1)R^{p}}\quad(p=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{2.4}$$

будем иметь

$$\|E(\lambda)\|\leq\sum_{p=1}^{n}r^{p}\|E_{p}^{(m)}\|<\frac{n}{n+1}\ \text{и}\ \|(1-E(\lambda))^{-1}\|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\|E(\lambda)\|^{k}<n+1.$$

На основании неравенства (0.1) имеем

$$s_j(\lambda^{p}B_{p}^{(m)}(1-E(\lambda))^{-1})\leq r^{p}\|(1-E(\lambda))^{-1}\|\,s_j(B_{p}^{(m)})<(n+1)\,r^{p}s_j(B_{p}^{(m)}),$$

поэтому, воспользовавшись леммой 1.4, продолжим оценку (2.3) следующим образом:

$$|D_0(\lambda)|\leq\exp\left\{\sum_{p=1}^{n}\int_{0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)d\nu\,(n(n+1)\,r^{p}t,\ B_{p}^{(m)})\right\}=$$

$$=\exp\left\{\sum_{p=1}^{n}\int_{0}^{\frac{1}{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{p}}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)d\nu\,(n(n+1)\,r^{p}t,\ B_{p})\right\}=$$

$$= \exp\left\{\sum_{p=1}^{n}\int_{0}^{(n+1)R^p} \ln\left(1+\frac{n(n+1)r^p}{t}\right) d\nu(t,\ B_p)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{p=1}^{n}\left[\ln\left(1+n\left(\frac{r}{R}\right)^p\right)\nu((n+1)R^p,\ B_p) + \int_{0}^{(n+1)R^p} \frac{n(n+1)r^p}{t(t+n(n+1)r^p)} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, \nu(t,\ B_p)\,\mathrm{dt}\right]\right\} \leq \exp\left\{\sum_{p=1}^{n}\left[\ln\left(1+n\left(\frac{r}{R}\right)^p\right)\cdot\frac{1}{\ln\dfrac{n+2}{n+1}}\int_{(n+1)R^p}^{(n+2)R^p} t^{-1}\cdot\nu(t,B_p)\,\mathrm{dt} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{0}^{(n+1)R^p} t^{-1}\cdot\nu(t,\ B_p)\,\mathrm{dt}\right]\right\} \leq \exp\left\{\frac{\ln(n+1)}{\ln\dfrac{n+2}{n+1}}\sum_{p=1}^{n}\int_{0}^{(n+2)R^p} t^{-1}\nu(t,B_p)\,\mathrm{dt}\right\}. \quad (2.5)$$

При получении оценки (2.5) мы воспользовались тем, что из неравенства (2.4) следует

$$\nu(n(n+1)r^p t,\ B_p^{(m)}) = \begin{cases} \nu(n(n+1)r^p t,\ B_p), & t \leq \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{R}{r}\right)^p, \\ \text{const}, & t > \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{R}{r}\right)^p. \end{cases}$$

Так как $D_0(0) = 1$, то из формулы Иенсена [14, стр. 24] будет следовать неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^-|D_0(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|D_0(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

которое с учетом (2.5) приводит к оценке

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^-|D_0(re^{i\theta})|\,d\theta \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln\dfrac{n+2}{n+1}}\sum_{p=1}^{n} t^{-1}\cdot\nu(t,\ B_p)\,\mathrm{dt}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим функцию

$$D_1(\lambda) = D_0(\lambda)\cdot F(\lambda),$$

модуль которой на основании неравенства (0.5) оценивается так:

$$|D_1(\lambda)| \leqslant |D_0(\lambda)|\cdot\|f\|\cdot\left\|\sum_{p=0}^{n-1}\lambda^p g_p\right\|\cdot\frac{\prod\limits_{j=1}^{\infty}\left(1+s_j\left(\sum\limits_{p=1}^{n}\lambda^p B_p^m(1-E(\lambda))^{-1}\right)\right)}{|D_0(\lambda)|}. \quad (2.7)$$

Так как при достаточно больших r $\left\|\sum\limits_{p=0}^{n-1}\lambda^p g_p\right\| \leqslant m_1 r^{n-1}$, то, комбинируя неравенства (2.6) и (2.4), получим

$$|D_1(\lambda)| \leqslant m_2 r^{n-1}\exp\left\{\frac{\ln(n+1)}{\ln\dfrac{n+2}{n+1}}\sum_{p=1}^{n}\int_0^{(n+2)R^p} t^{-1}\cdot\nu(t,B_p)\,dt\right\}. \quad (2.8)$$

Ввиду того, что функция $\ln|F(\lambda)|$ является субгармонической в круге радиуса R, получаем

$$\ln|F(\lambda)| = \ln\left|\frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\ln^+\left|\frac{D_1(\mathrm{Re}^{i\theta})}{D_0(\mathrm{Re}^{i\theta})}\right| d_\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}\left(\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|D_1(\mathrm{Re}^{i\theta})|\,d\theta + \int\limits_0^{2\pi}\ln^-|D_0(\mathrm{Re}^{i\theta})|\,d\theta\right). \tag{2.9}$$

Положим $R=2r$ и продлим оценку (2.9) с учетом (2.6) и (2.8)

$$\ln|F(\lambda)| \leqslant 3\ln^+ m_2 + 3(n-1)\ln r + 6\frac{\ln(n+1)}{\ln\dfrac{n+2}{n+1}}\cdot\sum_{p=1}^{n}\int\limits_0^{(n+2)(2r)^p} t^{-1}\cdot\nu(t, B_p)\,\mathrm{dt}.$$

Лемма доказана.

Теорема М. В. Келдыша устанавливает n-кратную полноту в $\mathfrak{H}$ системы собственных и присоединенных векторов каждого из операторных пучков (I) и (I^a), если $H\in\mathfrak{S}_p$ $(p>0)$. Это условие означает, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\nu(r,H)}{\ln r}<\infty. \tag{2.10}$$

Как было показано В. И. Мацаевым и Ю. А. Палантом [6], для случая линейного пучка утверждение теоремы М. В. Келдыша останется в силе, если заменить условие (2.10) на требование конечности нижнего порядка оператора H, т. е.

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\nu(r,H)}{\ln r}<\infty. \tag{2.11}$$

Этот факт оказался справедливым и для пучков (I) (I^a).

Теорема 2.1. *Если выполнено условие (2.11), то система собственных и присоединенных векторов каждого из операторных пучков* (I), (I^a) *n-кратно полна в* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Приведем доказательство для пучка (I), для пучка (I^a) оно проводится аналогично.

Не ограничивая общности, можно считать оператор $1-A_0$ обратимым. Действительно, сдвиг $\lambda\to\lambda+b$ преобразует пучок к виду

$$L(\lambda+b) = L(b) - \sum_{p=0}^{n-1}\lambda^p A'_p H^p - \lambda^n H^n,$$

в котором операторы $A'_p\in\mathfrak{S}_\infty$ $(p=0,1,\ldots,n-1)$, а оператор $L(b)$ будет обратим на основании следствия из леммы 1.3 при $b\in G^R_\theta$.

Если утверждение теоремы неверно, то по лемме 1.1 найдутся n элементов $g_p\in\mathfrak{H}$ $(p=0,1,\ldots,n-1)$ таких, что при любом векторе $f\in\mathfrak{H}$ функция

$$F(\lambda) = \left(L^{-1}(\lambda)f, \sum_{p=0}^{n-1}\lambda^p g_p\right)$$

будет целой.

Так как

$$L^{-1}(\lambda) = (1 - \sum_{p=1}^{n} \lambda^p (1 - A_0)^{-1} A_p H^p - \lambda^n (1 - A_0)^{-1} H^n)^{-1} (1 - A_0)^{-1},$$

то на основании леммы 2.1 получаем

$$\ln |F(\lambda)| \leqslant 3(n-1)\ln r + m \sum_{p=1}^{n} \int_0^{(n+2)(2r)^p} t^{-1} \cdot \nu(t, (1 - A_0)^{-1} A_p H^p)\, dt,$$
$$(A_n = 1).$$

В силу неравенства (0.1) $\nu(t, AB) \leqslant \nu(t \| B \|, A)$ для любого ограниченного оператора B и $A \in \mathfrak{S}_\infty$, поэтому

$$\ln |F(\lambda)| \leqslant 3(n-1)\ln r + m \sum_{p=1}^{n} \nu((n+2)(2r)^p \| (1 - A_0)^{-1} A_p \|, H^p) \times$$
$$\times \ln [(n+2)(2r)^p] \leqslant 3(n-1)\ln r + m \ln [(n+2)(2r)^n]$$
$$\sum_{p=1}^{n} \nu(r \sqrt[p]{2^p (n+2) \| (1 - A_0)^{-1} A_p \|}, H) \leqslant 3(n-1)\ln r + mn \ln [(n+2)(2r)^n]$$
$$\nu(\beta r, H) \leqslant B \ln r \cdot \nu(\beta r, H), \tag{2.12}$$
$$\text{где } \beta = \max_{(1 < p \leqslant n)} \sqrt[p]{2^p (n+2) \| (1 - A_0)^{-1} A_p \|}.$$

Пусть $M(r) = \max\limits_{|\lambda| \leqslant r} |F(\lambda)|$, тогда в силу оценки (2.12)

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \leqslant \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln (B \ln r \cdot \nu(\beta r, H))}{\ln r} = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \nu(r, H)}{\ln r}. \tag{2.13}$$

Применим принцип Фрагмена—Линделефа [15, стр. 206] к функции

$$(\lambda + e^{i\frac{\pi}{n}l})^{3(1-n)} F(\lambda) \quad (0 \leqslant l \leqslant 2n-1)$$

в угле $|\arg \lambda - \frac{\pi}{n} l| < \theta$, предварительно выбрав θ так, чтобы было выполнено неравенство

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \nu(r, H)}{\ln r} < \frac{\pi}{2\theta}.$$

В силу следствия из леммы 1.3 на сторонах этого угла выполнено неравенство

$$|(\lambda + e^{i\frac{\pi}{n}l})^{3(1-n)} F(\lambda)| \leqslant d_l.$$

Поэтому, учитывая условие (2.13), заключаем, что это же неравенство справедливо и внутри угла. Вновь применяя следствие из леммы 1.3, убеждаемся в том, что во всей плоскости справедливо неравенство

$$|F(\lambda)| \leqslant d(1 + r^{3(n-1)}),$$

т. е.

$$F(\lambda) = \sum_{p=0}^{3(n-1)} a_p \lambda^p.$$

Следовательно,

$$\overline{F}(\lambda) = (L^{*^{-1}}(\lambda)\left(\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p g_p\right), f) = \sum_{p=0}^{3(n-1)} \overline{a}_p \lambda^p$$

при любом $f \in \mathfrak{H}$ и поэтому

$$\psi(\lambda) \underset{(\mathrm{def})}{=} L^{*^{-1}}(\lambda)\left(\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p g_p\right) = \sum_{p=0}^{3(n-1)} \lambda^p \psi_p \ (\psi_p \in \mathfrak{H};\ p = 0, 1, \ldots, 3(n-1)).$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях λ в выражении

$$L^*(\lambda)\,\psi(\lambda) = \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p g_p.$$

Коэффициент при λ^{4n-3} слева равен $H^n \psi_{3(n-1)}$, а справа равен 0, поэтому из полноты оператора H^n следует $\psi_{3(n-1)} = 0$; коэффициент при λ^{4n-4} слева равен

$$(H^*)^{n-1} A^*_{n-1} \psi_{3(n-1)} + H^n \psi_{3n-4},$$

а справа 0, но так как $\psi_{3(n-1)} = 0$, то из полноты оператора H^n следует $\psi_{3n-4} = 0$ и т. п.

Следовательно,

$$\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p g_p \equiv 0,$$

что возможно лишь при $g_0 = g_1 = \ldots = g_{n-1} = 0$. Теорема доказана*.

§ 3. Оценка резольвенты операторного пучка вида (I), (I^a) через s-числа операторов A_p. Теорема полноты при $A_p \in \mathfrak{S}_\omega$.

Для определенности рассмотрим операторный пучок (I). Пусть элементы $f, g_p \in \mathfrak{H}$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ таковы, что функция

$$F(\lambda) = (L^{-1}(\lambda) f, \sum_{p=0}^{n-1} \overline{\lambda}^p g_p)$$

является голоморфной при $\arg \lambda \neq \frac{\pi l}{n}$ $(l = 0, 1, \ldots, 2n-1)$. Тогда справедлива следующая

Лемма 3.1. Для достаточно больших r имеет место оценка

$$\ln|F(\lambda)| \leqslant \frac{C_1}{|\sin n\varphi|}\left(\ln\frac{1}{|\sin n\varphi|} + \sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\frac{C_2}{|\sin n\varphi|}} t^{-1} \cdot \nu(t, A_p)\, dt + \ln r\right).$$

Доказательство. Расщепим каждый из операторов A_p, входящих в пучок, на сумму двух операторов

$$A_p = A_p^{(m)} + E_p^{(m)},$$

---

* Независимо от автора эта теорема была получена Ю. А. Палашом методом редукции полиномиального пучка к линейному.

где $A_p^{(m)}$ — конечномерный оператор, s-числа которого совпадают с s-числами оператора A_p большими $\|E_p^{(m)}\|$. Тогда резольвенту пучка можно преобразовать к виду

$$L^{-1}(\lambda) = (1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p E_p^{(m)} H^p - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p^{(m)} H^p - \lambda^n H^n)^{-1} =$$
$$= R_\varepsilon(\lambda) \left(1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p^{(m)} H^p R_\varepsilon(\lambda)\right)^{-1},$$

где через $R_\varepsilon(\lambda)$ обозначен оператор

$$R_\varepsilon(\lambda) = (1 - \lambda^n H^n)^{-1} (1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p E_p^{(m)} H^p (1 - \lambda^n H^n)^{-1})^{-1}.$$

Выберем произвольное малое $\varepsilon > 0$ и положим

$$\|E_p^{(m)}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{n \cdot 2^{n-1}} \quad (p = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.1}$$

В силу леммы 1.2 тогда получим

$$\|\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p E_p^{(m)} H^p (1 - \lambda^n H^n)^{-1}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\sin n\varphi|},$$

и поэтому в области $|\sin n\varphi| > \varepsilon$ справедлива оценка

$$\|R_\varepsilon(\lambda)\| \leqslant \|(1 - \lambda^n H^n)^{-1}\| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{|\sin n\varphi|^j} \leqslant \frac{2^{n-1}}{|\sin n\varphi| - \varepsilon}. \tag{3.2}$$

Введем в рассмотрение функции $D_0(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$:

$$D_0(\lambda) = \det (1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p^{(m)} H^p R_\varepsilon(\lambda)),$$
$$D_1(\lambda) = D_0(\lambda) \cdot F(\lambda).$$

Сначала найдем оценку для $|D_1(\lambda)|$ в области $|\sin n\varphi| > \varepsilon$.

Имеем $|D_1(\lambda)| = |D_0(\lambda)| \cdot |F(\lambda)| \leqslant \|f\| \cdot \|\sum_{p=0}^{n-1} \bar{\lambda}^p g_p\| \cdot \|R_\varepsilon(\lambda)\| \times$

$$\times |D_0(\lambda)| \cdot \|(1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p^{(m)} H^p R_\varepsilon(\lambda))^{-1}\|.$$

Так как $\|\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p g_p\| \leqslant d(1 + r^{n-1})$, то с учетом (3.2) и неравенства (0.5) получим

$$|D_1(\lambda)| \leqslant \frac{d_1(1 + r^{n-1})}{|\sin n\varphi| - \varepsilon} \cdot |D_0(\lambda)| \cdot \frac{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + s_j\left(\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p^{(m)} H^p R_\varepsilon(\lambda)\right)\right)}{|D_0(\lambda)|} =$$
$$= \frac{d_1(1 + r^{n-1})}{|\sin n\varphi| - \varepsilon} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + s_j\left(\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p^{(m)} H^p R_\varepsilon(\lambda)\right)\right). \tag{3.3}$$

На основании неравенства (0.1) и леммы 1.2 заключаем

$$s_j(\lambda^p A_p^{(m)} H^p R_\varepsilon(\lambda)) \leqslant \|\lambda^p H^p R_\varepsilon(\lambda)\| \, s_j(A_p^{(m)}) \leqslant \frac{2^{n-1}}{|\sin n\varphi| - \varepsilon} s_j(A_p^m).$$

И поэтому с использованием леммы 1.4 можно продолжить оценку (3.3) в область $|\sin n\varphi| > 2\varepsilon$

$$|D_1(\lambda)| \leqslant \frac{d_1(1+r^{n-1})}{\varepsilon} \exp\left\{\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) d\nu\left(t, \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p A_p^{(m)} H^p R_\varepsilon(\lambda)\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d_1(1+r^{n-1})}{\varepsilon} \exp\left\{\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) d\nu\left(\frac{n2^{n-1}t}{|\sin n\varphi|-\varepsilon},\ A_p^{(m)}\right)\right\}.$$

Из (4.1) следует

$$\nu\left(\frac{n2^{n-1}t}{|\sin n\varphi|-\varepsilon}, A_p^{(m)}\right) = \begin{cases} \nu\left(\dfrac{n2^{n-1}t}{|\sin n\varphi|-\varepsilon},\ A_p\right), & t \leqslant \dfrac{|\sin n\varphi|-\varepsilon}{\varepsilon} \\ \text{const}, & t > \dfrac{|\sin n\varphi|-\varepsilon}{\varepsilon}, \end{cases}$$

поэтому

$$|D_1(\lambda)| \leq \frac{d_1(1+r^{n-1})}{\varepsilon} \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} \ln\left(1+\frac{n2^{n-1}}{t(|\sin n\varphi|-\varepsilon)}\right) d\nu(t,\ A_p)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{d_1(1+r^{n-1})}{\varepsilon} \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1}\left(\ln 2\cdot\nu\left(\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon},\ A_p\right) + \int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ A_p)\,dt\right)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{d_1(1+r^{n-1})}{\varepsilon} \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}}^{\frac{n2^n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ A_p)\,dt + \int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ A_p)\,dt\right)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{d_1(1+r^{n-1})}{\varepsilon} \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\frac{n2^n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ A_p)\,dt\right\}. \tag{3.4}$$

Аналогично показывается, что в области $|\sin n\varphi| > 2\varepsilon$ выполнено неравенство

$$|D_0(\lambda)| \leq \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\frac{n2^n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ A_p)\,dt\right\}. \tag{3.5}$$

При оценке резольвенты пучка в точке $\lambda_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ полагаем $\varepsilon = \frac{1}{3}|\sin n\varphi_0|$.

Если $\frac{\pi l}{n} < \varphi_0 < \frac{\pi(l+1)}{n}$ и $r_0 > R$ $(0 \leq l \leq 2n-1)$, то в силу следствия из леммы М. В. Келдыша в точке $\lambda_1 = r_0 e^{i\frac{\pi(2l+1)}{2n}}$ операторный пучок обратим и для $|D_0(\lambda_1)|$ можно указать следующую оценку снизу:

$$\frac{1}{D_0(\lambda_1)} = \frac{1}{\det\left(1-\sum_{p=0}^{n-1}\lambda_1^p A_p^{(m)} H^p R_\varepsilon(\lambda_1)\right)} = \det\left(1-\sum_{p=0}^{n-1}\lambda_1^p A_p^{(m)} H^p R_\varepsilon(\lambda_1)\right)^{-1} =$$

$$= \det (R_\varepsilon^{-1}(\lambda_1) L^{-1}(\lambda_1)) = \det \Big(1 + \Big(\sum_{p=0}^{n-1} \lambda_1^p A_p^{(m)} H^p\Big) L^{-1}(\lambda_1)\Big) =$$

$$= \det \Big(1 + \sum_{p=0}^{n-1} \lambda_1^p A_p^{(m)} H^p (1 - \lambda_1^n H^n)^{-1} \cdot \Big(1 - \sum_{p=0}^{n-1} \lambda_1^p A_p H^p (1 - \lambda_1^n H^n)^{-1}\Big)^{-1}\Big).$$

Поэтому на основании леммы 1.4, следствия из леммы 1.3, неравенства (0.4) и условия (4.1) будем иметь

$$\left|\frac{1}{D_0(\lambda_1)}\right| \leq \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} \ln\left(1 + \frac{n2^n}{t}\right) d\nu(t, A_p)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1} \left(\ln(1+2\varepsilon)\,\nu\left(\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}, A_p\right) + \int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} \frac{n2^n \nu(t, A_p)}{t(t+n2^n)}\,dt\right)\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}}^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}+n2^n} t^{-1}\cdot \nu(t, A_p)\,dt + \int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} t^{-1}\,\nu(t, A_p)\,dt\right)\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1} \int_0^{\frac{n2^n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot \nu(t, A_p)\,dt\right\}. \tag{3.6}$$

Обозначим $\beta = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2\arcsin\varepsilon}{\pi}\right)$ и сделаем замену переменной

$$\lambda = e^{\frac{i}{n}(\arcsin 2\varepsilon + \pi l)} z^\beta,$$

после которой соответствующие оценки для функций $D_2(z) = D_0(\lambda(z))$ и $D_3(z) = D_1(\lambda(z))$ будут выполняться в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ $(z = x + iy)$, а образом точки λ_0 будет являться точка $|z_0|$.

Применим к функции $D_2(z)$ формулу Пуассона [14, стр. 311] в точке $i|z_0|$:

$$\ln|D_2(i|z_0|)| = \frac{|z_0|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|D_2(t)|\frac{dt}{t^2 + x_0^2 + y_0^2} + k|z_0| + \ln|\chi(i|z_0|)|,$$

где $\chi(z)$ — произведение Бляшке, составленное по корням функции $D_2(z)$, лежащим в верхней полуплоскости, а

$$k = \overline{\lim_{y\to\infty}} \frac{\ln|D_2(iy)|}{y}.$$

Так как $|D_2(z)|$ ограничен, а $|\chi(z)| \leq 1$, то получаем

$$\ln|D_2(i|z_0|)| \leq \frac{|z_0|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|D_2(t)|\frac{dt}{t^2 + x_0^2 + y_0^2} =$$

$$= \frac{|z_0|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\ln^+|D_2(t)| - \ln^-|D_2(t)|)\frac{dt}{t^2 + x_0^2 + y_0^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{|z_0|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln^-|D_2(t)|\frac{dt}{t^2+x_0^2+y_0^2}\leq\frac{|z_0|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln^+|D_2(t)|\frac{dt}{t^2+x_0^2+y_0^2}+$$
$$+\ln\left|\frac{1}{D_2(i|z_0|)}\right|. \qquad (3.7)$$

С учетом неравенств (3.6) и (3.5) оценка (3.7) может быть продолжена

$$\frac{|z_0|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln^-(D_2(t)|\frac{dt}{t^2+x_0^2+y_0^2}\leq 2\sum_{p=0}^{n-1}\int_0^{\frac{n2^n}{\varepsilon}}t^{-1}\quad\nu(t,\ A_p)\,dt. \qquad (3.8)$$

Голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ функция $F(\lambda(z))$ допускает оценку $|F(\lambda(z))|<C(1+|z|^{\beta(n-1)})$.

Действительно, в области $\left\{z:|z|\leq R^{\frac{1}{\beta}},\ \operatorname{Im} z>0\right\}$ $|F(\lambda(z))|<\text{const}$ на основании теоремы Вейерштрасса, а в области $\left\{z:|z|>R^{\frac{1}{\beta}},\ \operatorname{Im} z>0\right\}$ на основании следствия из леммы М. В. Келдыша.

Поэтому формула Пуассона приводит к неравенству

$$\ln|F(\lambda(z_0))|=\ln\left|\frac{D_3(z_0)}{D_2(z_0)}\right|\leq\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left|\frac{D_3(t)}{D_2(t)}\right|\frac{dt}{(t-x_0)^2+y_0^2}\leq$$
$$\leq\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln^+\left|\frac{D_3(t)}{D_2(t)}\right|\frac{dt}{(t-x_0)^2+y_0^2}\leq$$
$$\leq\frac{y_0}{|z_0|}\sup_{(t)}\frac{t^2+x_0^2+y_0^2}{(t-x_0)^2+y_0^2}\left(\frac{|z_0|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln^+|D_3(t)|+\ln^-|D_2(t)|}{t^2+x_0^2+y_0^2}dt\right). \qquad (3.9)$$

Ввиду того что имеет место оценка

$$\frac{y_0}{|z_0|}\sup_{(t)}\frac{t^2+x_0^2+y_0^2}{(t-x_0)^2+y_0^2}\leq\frac{y_0}{|z_0|}\cdot\frac{2|z_0|^2}{y_0^2}=\frac{2}{\sin\left(\frac{1}{\beta}\hat{\varphi}_0\right)},$$

где $\hat{\varphi}_0=\varphi_0-\frac{\arcsin 2\varepsilon}{n}-\frac{\pi l}{n}$, неравенство (3.9) усиливается с учетом (3.4) и (3.8):

$$\ln|F(\lambda(z_0))|\leq\frac{2}{\sin\left(\frac{1}{\beta}\hat{\varphi}_0\right)}\left(\ln\frac{d_1}{\varepsilon}+3\sum_{p=0}^{n-1}\int_0^{\frac{n2^n}{\varepsilon}}t^{-1}\cdot\nu(t,\ A_p)\,dt+\right.$$
$$\left.+\frac{|z_0|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1+|t|^{(n-1)\beta})\,dt}{t^2+x_0^2+y_0^2}\right). \qquad (3.10)$$

Так как

$$\frac{|z_0|}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1+|t|^{(n-1)\beta})}{t^2+x_0^2+y_0^2}\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ln(1+|z_0|^{(n-1)\beta}u^{(n-1)\beta})}{1+u^2}\,du\leq$$

$$\leq\frac{2}{\pi}\left\{\int\limits_0^{\infty}\frac{(n-1)\beta\ln|z_0|}{1+u^2}\,du+\int\limits_0^{\infty}\frac{\ln(1+u^{(n-1)\beta})}{1+u^2}\,du\right\}=(n-1)\beta\ln|z_0|+\mathrm{const}$$

и

$$\sin\frac{1}{1-\frac{2\arcsin 2\varepsilon}{\pi}}(n\varphi_0-\arcsin 2\varepsilon-\pi l)>d_2\varepsilon,$$

то из (3.10) с учетом того, что $\varepsilon=\frac{1}{3}|\sin n\varphi_0|$, окончательно устанавливаем такую оценку:

$$\ln|F(\lambda_0)|\leq\frac{C_1}{|\sin n\varphi_0|}\left(\ln\frac{1}{|\sin n\varphi_0|}+\sum_{p=0}^{n-1}\int\limits_0^{\frac{C_2}{|\sin n\varphi_0|}}t^{-1}\nu(t,\ A_p)\,dt+\ln r_0\right). \quad (3.11)$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующее

Следствие. *Функция*

$$F^{(l)}(\lambda)=\left(e^{i\frac{\pi(2l+1)}{2n}}+\lambda\right)^{1-n}\cdot F(\lambda)$$

допускает в секторе $\left\{\lambda:\frac{\pi l}{n}<\varphi<\frac{\pi(l+1)}{n},\ r>R\right\}$ *оценку*

$$\ln|F^{(l)}(\lambda)|\leq\frac{C_1}{|\sin n\varphi|}\left(\ln\frac{1}{|\sin n\varphi|}+\sum_{p=0}^{n-1}\int\limits_0^{\frac{C_2}{|\sin n\varphi|}}t^{-1}\cdot\nu(t,\ A_p)\,dt\right). \quad (3.11')$$

Доказательство. Для функции $D_1^{(l)}(\lambda)=F^{(l)}(\lambda)\cdot D_0(\lambda)$ устанавливаем, подобно тому, как в лемме 4.1, оценку

$$D_1^{(l)}(\lambda)\leq\frac{1}{\varepsilon}\exp\left\{\sum_{p=0}^{n-1}\int\limits_0^{\frac{n2^n}{\varepsilon}}t^{-1}\cdot\nu(t,\ A_p)\,dt\right\}. \quad (3.4')$$

После этого рассуждения, проведенные в лемме, приводят нас к оценке (3.11).

Обозначим через $K_{l,\delta}$ угол $\left|\arg\lambda-\frac{\pi l}{n}\right|<\delta$, $0<\delta<\frac{\pi}{2n}$ $(l=0,1,\ldots,2n-1)$ и пусть $K_\delta=\bigcup\limits_{l=0}^{2n-1}K_{l,\delta}$.

Теорема 3.1. *Если операторы* $A_p\in\mathfrak{S}_\omega$ $(p=0,\ldots,2n-1)$, *то система собственных и присоединенных векторов каждого из операторных пучков* (I), (I^a) *n-кратно полна в* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Если утверждение теоремы неверно, то согласно теореме 1.1 найдутся n векторов $g_p \in \mathfrak{H}$ $(p=0, 1, \ldots, n-1)$ таких, что функция

$$F(\lambda) = \left(L^{-1}(\lambda) f, \sum_{p=0}^{n-1} \bar{\lambda}^p g_p\right)$$

будет целой при любом элементе $f \in \mathfrak{H}$.

Огрубим оценку (3.11):

$$\ln |F(\lambda)| \leq \frac{C_3 \ln r}{|\sin n\varphi|^2} \sum_{p=0}^{n-1} \nu\left(\frac{C_2}{|\sin n\varphi|}, A_p\right) \tag{3.12}$$

и рассмотрим в области $U = K_\delta \cap \left\{\lambda : e^{\frac{1}{2}} R < |\lambda| < e^{\frac{3}{2}} R\right\}$ семейство функций

$$F_m(\lambda) = F\left(e^{\frac{m}{2}} \lambda\right).$$

На основании оценки (3.12) в области U будет выполнено неравенство

$$\frac{\ln |F_m(\lambda)|}{\frac{m}{2} + \frac{3}{2} + \ln R} \leq \frac{C_3}{|\sin n\varphi|^2} \sum_{p=0}^{n-1} \nu\left(\frac{C_2}{|\sin n\varphi|}, A_p\right),$$

правую часть которого обозначим через $M(\varphi)$.

В окрестности каждого из лучей $\varphi = \frac{\pi l}{n}$ $(l = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ функция $M(\varphi)$ удовлетворяет условию теоремы Левинсона — Сьоберга [16].

Например, вблизи положительной полуоси имеем:

$$\ln M(\varphi) \leq C_3' + 2 \ln \frac{1}{|\varphi|} + \ln \max_{(p)} \nu\left(\frac{C_2'}{|\varphi|}, A_p\right) \leq$$

$$\leq C_3' + 2 \ln \frac{1}{|\varphi|} + \max_{(p)} \ln \nu\left(\frac{C_2'}{|\varphi|}, A_p\right) \leq$$

$$\leq C_3' + 2 \ln \frac{1}{|\varphi|} + \sum_{p=0}^{n-1} \ln \nu\left(\frac{C_2'}{|\varphi|}, A_p\right),$$

и так как операторы $A_p \in \mathfrak{S}_\omega$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$, то

$$\int_0 \ln M(\varphi)\, d\varphi \leq C_3'' + \sum_{p=0}^{n-1} \int_0 \ln \nu\left(\frac{C_2'}{\varphi}, A_p\right) d\varphi = C_3'' +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1} \left(\varphi \ln \nu\left(\frac{C_2'}{\varphi}, A_p\right)\Big|_0 - \int_0 \varphi d \ln \nu\left(\frac{C_2'}{\varphi}, A_p\right)\right) = C_3''' + \sum_{p=0}^{n-1} \left(\varphi \ln \nu\left(\frac{C_2'}{\varphi}, A_p\right)\Big|_0 +\right.$$

$$\left. + C_2' \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A_p) \ln \frac{k}{k-1}\right) < \infty.$$

Таким образом, семейство функций $\frac{\ln |F_m(\lambda)|}{\frac{m}{2} + \frac{3}{2} + \ln R}$ на основании указанной теоремы ограничено в совокупности.

В области $K_\delta \cap \left\{\lambda : e^{\frac{m+1}{2}} R < |\lambda| < e^{\frac{m+3}{2}} R\right\}$ функция $F(\lambda)$ совпадает с $F_m(\lambda)$, и поэтому

$$\frac{\ln |F_m(\lambda)|}{\frac{m+3}{2} + \ln R} = \frac{\ln |F(\lambda)|}{\frac{m+3}{2} + \ln R} < d. \tag{3.13}$$

Из неравенства (3.13) следует, что в области $K_\delta \cap \{\lambda : |\lambda| > R\}$

$$\ln |F(\lambda)| < d\left(\frac{m+3}{2} + \ln R\right) \leq d_1 \ln r. \tag{3.14}$$

Так как на границе этой области функция $\lambda^{1-n} F(\lambda)$ не превосходит по модулю постоянную, а внутри области на основании (3.14) справедливо неравенство

$$\ln |\lambda^{1-n} F(\lambda)| \leq d_2 \ln r,$$

то теорема Фрагмена — Линделефа [17, стр. 108] позволяет утверждать, что

$$|\lambda^{1-n} F(\lambda)| \leq \text{const} \quad (\lambda \in K_\delta \cap \{\lambda : |\lambda| > R\}).$$

Таким образом, в λ-плоскости $|F(\lambda)| \leq \text{const}\,(1 + r^{n-1})$ и, следовательно,

$$F(\lambda) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \lambda^p.$$

Так как

$$\overline{F}(\lambda) = \sum_{p=0}^{n-1} \bar{a}_p \lambda^p,$$

то

$$L^{*-1}(\lambda)\left(\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p g_p\right) = \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p \psi_p \quad (\psi_p \in \mathfrak{H}).$$

После сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ в тождестве

$$L^*(\lambda)\left(\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p \psi_p\right) = \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p g_p$$

убеждаемся в том, что

$$\sum_{p=0}^{n-1} \lambda^p g_p \equiv 0.$$

Теорема доказана.

§ 4. Первая интерполяционная теорема полноты для пучков (I), (I^a).

Из формулируемой ниже теоремы следуют теоремы 2.1 и 3.1. В первой из них метрические ограничения накладываются лишь на оператор H, а во второй — лишь на операторы A_p $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$. Таким образом, эта теорема как бы заполняет «промежуток» между ними. Именно этим и объясняется то, что она (равно как и другие близкие по характеру теоремы доказываемые далее) названа интерполяционной.

Теорема 4.1. *Пусть оператор* $1 - A_0$ *обратим и выполнено условие*

$$\lim_{\overline{m\to\infty}} \frac{\sum\limits_{p=0}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{m}(2j-1)^{-1}\cdot s_j(A_p)}{\ln s_m^{-1}(H)} = 0. \tag{4.1}$$

Тогда система собственных и присоединенных векторов каждого из операторных пучков (I), (I^a) *n-кратно полна в* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Предположим, что эта система не является n-кратно полной. Тогда на основании леммы 1.1 найдутся n векторов $g_p \in \mathfrak{H}$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ таких, что функция

$$F(\lambda) = \left(L^{-1}(\lambda) f, \; \sum_{p=0}^{n-1} \bar{\lambda}^p g_p\right)$$

будет целой при любом векторе $f \in \mathfrak{H}$.

Голоморфную в области $|\varphi| < \frac{\pi}{2n}$ функцию

$$F_1(\lambda) = (1+\lambda)^{1-n} F(\lambda)$$

можно оценить в этой области с помощью неравенства 3.11′ следующим образом:

$$\ln|F_1(\lambda)| \leq \frac{C_1}{|\sin n\varphi|}\left(\ln\frac{1}{|\sin n\varphi|} + \sum_{p=0}^{n-1}\nu\left(\frac{C_2}{|\sin n\varphi|}, A_p\right)\int_1^{\frac{C_2}{|\sin n\varphi|}} t^{-1}\,dt\right) \leq$$

$$\leq \frac{C_3}{|\sin n\varphi|^2}\sum_{p=0}^{n-1}\nu\left(\frac{C_2}{|\sin n\varphi|}, A_p\right) \leq \frac{C_3}{|\sin\varphi|^2}\sum_{p=0}^{n-1}\nu\left(\frac{C_2}{|\sin\varphi|}, A_p\right) \leq$$

$$\leq \frac{d}{|\varphi|^2}\sum_{p=0}^{n-1}\nu\left(\frac{c}{|\varphi|}, A_p\right). \tag{4.2}$$

В этой же области для нее справедлива оценка (2.12)

$$\ln|F_1(\lambda)| \leq B \ln r\, \nu(\beta r, H). \tag{4.3}$$

Введем в рассмотрение монотонно растущую на интервале $(0, \infty)$ функцию

$$m(t) = t\int_0^t \sum_{p=0}^{n-1}\nu(\tau, A_p)\,d\tau.$$

Обратную к ней функцию обозначим через $\sigma(t)$, ясно, что $\sigma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. После замены переменной $z = x + iy = \ln\lambda = \ln r + i\varphi$ оценка (4.3) принимает вид

$$\ln|F_1(\lambda(x+iy))| \leq Bx\nu(\beta e^x, H),$$

а оценка (4.2) может быть продолжена следующим образом:

$$\ln|F_1(\lambda(x+iy))| \leq \frac{d}{|y|^2}\sum_{p=0}^{n-1}\nu\left(\frac{c}{|y|}, A_p\right) \leq$$

$$\leq \frac{d}{c|y|}\int_{\frac{c}{|y|}}^{\frac{2c}{|y|}}\sum_{p=0}^{n-1}\nu(\tau, A_p)\,d\tau \leq \frac{d}{c^2}\cdot\frac{2c}{|y|}\int_0^{\frac{2c}{|y|}}\sum_{p=0}^{n-1}\nu(\tau, A_p)\,d\tau \leq d_1 m\left(\frac{2c}{|y|}\right). \tag{4.4}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$y = \eta(x) \quad (-\infty < x < T),$$

где $\eta(x)$ определяется следующим образом:

$$\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{2c}{\sigma(1)}, & x < 0, \\ \dfrac{2c}{\sigma(t(x))}, & 0 \leq x < T, \end{cases}$$

а функция $t(x)$ является обратной к функции

$$x = \frac{8c}{\pi}\int_1^t \frac{d\tau}{\tau\sigma(\tau)} \quad (1 \leq t < \infty),$$

здесь

$$T = \frac{8c}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau\sigma(\tau)}.$$

Мы будем считать, не ограничивая общности, что $\frac{2c}{\sigma(1)} < \frac{\pi}{2n}$, в противном случае определим

$$x = \frac{8c}{\pi}\int_k^t \frac{d\tau}{\tau\sigma(\tau)},$$

где $k > 1$ выбрано таким, что $\frac{2c}{\sigma(k)} < \frac{\pi}{2\pi}$.

Так как $\sigma(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$, то $\eta(x) \downarrow 0$ при $x \to T$. Мы ограничимся случаем $T = \infty$, ибо покажем ниже, что $T < \infty$ означает, что $A_p \in \mathfrak{S}_\omega$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Рассмотрим в z-плоскости криволинейную полосу

$$\Pi\{z : |y| > \eta(x)\}.$$

Пусть функция $w(z)$ конформно отображает полосу Π на полосу $|\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}$ так, что $\operatorname{Re} w(z) \to \pm\infty$ при $z \to \pm\infty$. На основании неравенства Альфорса [18, стр. 101] будем иметь для $x > 0$

$$\operatorname{Re} w(x+iy) > \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{d\tau}{\eta(\tau)} + \text{const} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^{t(x)} \frac{8c\sigma(\tau)\,d\tau}{\pi\tau\sigma(\tau)\cdot 2c} + \text{const} = 2\ln t(x) + \text{const}. \tag{4.5}$$

Принимая во внимание (4.5), получим

$$\operatorname{Re}\left(\exp\frac{1}{2}w(x+iy)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Re} w(x+iy)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Im} w(x+iy)\right) \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\exp(\ln t(x) + \text{const}) \geq E\,t(x), \tag{4.6}$$

где E — постоянная, которую можно считать большей d_1 на основании того, что функция $w(z)$ определена с точностью до аддитивной постоянной.

Так как

$$t(x) = m\left(\frac{2c}{\eta(x)}\right),$$

то неравенство (4.6) принимает вид

$$\operatorname{Re}\left(\exp\frac{1}{2}\omega(x+iy)\right) \geq Em\left(\frac{2c}{\eta(x)}\right). \tag{4.7}$$

Из неравенств (4.4), (4.7) вытекает

$$\operatorname{Re}\left(\exp\frac{1}{2}\omega(x+iy)\right) > \ln|F_1(\lambda(x+a+i\eta(x)))|. \tag{4.8}$$
$$(a>0)$$

Решающую роль для дальнейшего будет играть существование последовательности $x_l \to +\infty$ такой, что для любого $a > 0$ при $l > l_0(a)$ будет выполняться неравенство

$$B(x_l+a)\,\nu(\beta e^{x_l+a},\ H) < Et(x_l). \tag{4.9}$$

Докажем сначала, что из условия (4.1) следует

$$\varliminf_{m\to\infty}\frac{\int\limits_1^m \frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln s_m^{-1}(H)} = 0. \tag{4.10}$$

Пусть

$$m_1(t) = \max\{t^2,\ \nu(t,\ A_1),\ \ldots,\ \nu(t,\ A_{n-1})\}.$$

Полагая

$$m_2(t) = nm_1^2(t), \tag{4.11}$$

получим

$$m(t) \leq nt^2\max_{(p)}\nu(t,\ A_p) \leq m_2(t). \tag{4.12}$$

Обозначим через $\sigma_i(t)$ функцию, обратную к функции $m_i(t)$ $(i=1,\ 2)$. Напомним [19, стр. 184], что если $n(t)$ — неубывающая, кусочно постоянная непрерывная слева функция, то под ее обратной $n^{-1}(t)$ понимают неубывающую, кусочно непрерывную справа функцию, такую, что:

1) если $t = t_0$ есть точка разрыва функции $n(t)$ с величиной скачка $\beta - \alpha$, то интервал $\alpha \leq t < \beta$ будет являться интервалом постоянства функции $n^{-1}(t)$ со значением t_0;

2) если $\gamma_1 < t \leq \gamma_2$ есть интервал постоянства функции $n(t)$ со значением N, то функция $n^{-1}(t)$ имеет в точке N разрыв и

$$n^{-1}(N) - n^{-1}(N-0) = \gamma_2 - \gamma_1.$$

Построенная функция $n^{-1}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$n(n^{-1}(t)) \leq t \leq n(n^{-1}(t)+0). \tag{4.13}$$

Покажем, что

$$\sigma(t) \geq \sigma_2(t). \tag{4.14}$$

Действительно, если в некоторой точке t $\sigma(t) < \sigma_2(t)$, то в силу (4.12) и (4.13)

$$t = m(\sigma(t)) < m(\sigma_2(t)) \leq m_2(\sigma_2(t)) \leq t.$$

Последнее неравенство абсурдно и поэтому (4.14) справедливо.

Кроме того, из (4.13) получаем

$$m_2(\sigma_2(t)) = nm_1^2(\sigma_2(t)) \leq t \leq nm_1^2(\sigma_2(t)+0), \text{ т. е.}$$

$$m_1(\sigma_2(t)) \leq \sqrt{\frac{t}{n}} \leq m_1(\sigma_2(t)+0). \tag{4.15}$$

Сравнивая (4.15) с

$$m_1\left(\sigma_1\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\right) \leq \sqrt{\frac{t}{n}} \leq m_1\left(\sigma_1\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right)+0\right)$$

и учитывая единственность обратной по отношению к $m_1(t)$ функции, заключаем, что

$$\sigma_1\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \sigma_2(t). \tag{4.16}$$

На основании (4.14) и (4.16) имеем

$$\int_1^m \frac{dt}{t\sigma(t)} \leq \int_1^m \frac{dt}{t\sigma_2(t)} = \int_1^m \frac{dt}{t\sigma_1\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right)} = 2\int_{\sqrt{\frac{1}{n}}}^{\sqrt{\frac{m}{n}}} \frac{dt}{t\sigma_1(t)} \leq$$

$$\leq 2\left\{\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}} \frac{dt}{t^{3/2}} + \sum_{p=0}^{n-1}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{m}{n}} \frac{dt}{t\sigma^{(p)}(t)}\right\}, \tag{4.17}$$

где $\sigma^{(p)}(t)$ — функция, обратная к функции $\nu(t, A_p)$.

Поскольку $\nu(s_j^{-1}(A_p), A_p) \leq j-1$, а $\nu(s_j^{-1}(A_p)+0, A_p) \geq j$, то $\sigma^{(p)}(t) = s_j^{-1}(A_p)$ при $j-1 \leqslant t < j$, и оценку (4.17) можно продолжить

$$\int_1^m \frac{dt}{t\sigma(t)} \leq \text{const} + 2\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=2}^{m} s_j(A_p)\int_{j-1}^{j}\frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \text{const} + 2\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=2}^{m} s_{j-1}(A_p)\ln\left(1+\frac{1}{j-1}\right) \leq$$

$$\leq \text{const} + 2\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} s_j(A_p)\ln\left(1+\frac{1}{j}\right) \leq$$

$$\leq \text{const} + 4\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}(2j-1)^{-1}\cdot s_j(A_p). \tag{4.18}$$

Из условия (4.1) и неравенства (4.18) следует (4.10), т. е. существует последовательность m_l, такая, что

$$\frac{\int_1^{m_l}\frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln s_{m_l}^{-1}(H)} = \varepsilon_l \quad \left(\begin{matrix}\varepsilon_l \to 0\\ l \to \infty\end{matrix}\right).$$

Теперь покажем, что для последовательности

$$x_l = \frac{8c}{\pi}\int_1^{m_l^2}\frac{dt}{t\sigma(t)} \tag{4.19}$$

будет выполнено неравенство (4.9).

Действительно,

$$\frac{\int_1^{m_l^2}\frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln s_{m_l}^{-1}(H)} = \frac{\int_1^{m_l}\frac{dt}{t\sigma(t)}+\int_{m_l}^{m_l^2}\frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln s_{m_l}^{-1}(H)} \leq$$

$$\leq \frac{\int_1^{m_l}\frac{dt}{t\sigma(t)}+\frac{1}{\sigma(m_l)}\ln m_l}{\ln s_{m_l}^{-1}(H)} \leq \frac{2\int_1^{m_l}\frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln s_{m_l}^{-1}(H)} = 2\varepsilon_l.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\ln s_{m_l}^{-1}(H) > \frac{\pi}{16c}x_l\varepsilon_l^{-1},$$

и поэтому, начиная с некоторого $l_0(a)$,

$$\begin{aligned}\nu(\beta e^{x_l+a},\ H) &= \max_{(j)}\{j : s_j^{-1}(H) < \beta e^{x_l+a}\} = \\ &= \max_{(j)}\{j : \ln s_j^{-1}(H) < x_l + a + \ln\beta\} < m_l.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Кроме того, в силу (4.19) $t(x_l) = m_l^2$ и $x_l \leq \frac{16c}{\pi\sigma(1)}\ln m_l$.

Из последних оценок следует выполнение неравенства (4.9), т. е. существует последовательность $x_l \to +\infty$, такая, что при любом $a > 0$, начиная с некоторого $l_0(a)$, имеет место неравенство

$$\ln|F_1(\lambda(x_l + a + iy))| \leq \operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}\,\omega(x_l+iy)\right\}. \tag{4.21}$$
$$(|y| < \eta(x_l))$$

Так как при $x < 0$

$$\ln|F_1(\lambda(x+iy))| < \text{const},\ a\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}\,\omega(x+iy)\right\} > 0,$$

то для $x_n \to -\infty$

$$\ln|F_1(\lambda(x_n+iy+a))| \leq \operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}\,\omega(x+iy)\right\} + \alpha e^{-kx}\cos ky \tag{4.22}$$

где $k = \frac{\pi\sigma(1)}{8c}$, $\alpha > 0$.

Следовательно, на границе области $\Pi_{n,l} \subset \Pi$

$$\Pi_{n,l}\{z : x_n < \operatorname{Re} z < x_l,\ |y| < \eta(x)\}$$

субгармоническая функция

$$\ln|F_1(\lambda(x+a+iy))|$$

не превосходит гармонической функции

$$\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(x+iy)\right\}+\alpha e^{-kx}\cos ky.$$

Поэтому на основании принципа максимума для субгармонических функций и внутри области $\Pi_{n,l}$ справедливо неравенство

$$\ln|F_1(\lambda(x+a+iy))|\leq\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(x+iy)\right\}+\alpha e^{-kx}\cos ky. \qquad (4.23)$$

В частности, из (4.23) при $x=0$ следует

$$\ln|F_1(\lambda(a+iy))|\leq M, \qquad (4.24)$$

где

$$M=\max_{|y|\leq\frac{2c}{\sigma(1)}}\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(iy)\right\}+\alpha.$$

На основании неравенства (4.24) заключаем, что в области $|\varphi|<\frac{2c}{\sigma(1)}$ $|F_1(\lambda)|\leq$ $\leq$ const. Применяя следствие леммы М. В. Келдыша, получаем оценку, справедливую в области $|\varphi|\leq\frac{\pi}{2n}$,

$$|F_1(\lambda)|\leq\text{const}. \qquad (4.25)$$

Неравенства, аналогичные (4.25), получаются и для областей

$$\left|\varphi-\frac{\pi l}{n}\right|\leq\frac{\pi}{2n}\quad(l=1,\ \ldots\ ,\ 2n-1)$$

и, следовательно, во всей λ-плоскости для функции $F(\lambda)$ имеет место неравенство

$$|F(\lambda)|\leq\text{const}\,(1+r^{n-1}).$$

Доказательство завершается повторением рассуждений, проведенных в теореме 2.1.

В заключение обоснуем возможность ограничиться случаем $T=\infty$. Так как $\frac{1}{\sigma(t)}\geq\max_{(p)}\frac{1}{\sigma^{(p)}(t)}\geq\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{\sigma^{(p)}(t)}$, то

$$T=\frac{8c}{\pi}\int_1^\infty\frac{d\tau}{\tau\sigma(\tau)}\geq\frac{8c}{\pi}\sum_{p=0}^{n-1}\int_1^\infty\frac{d\tau}{\tau\sigma^{(p)}(\tau)},$$

и поэтому случай $T<\infty$ соответствует тому, что все операторы $A_p\in\mathfrak{S}_\omega$.

Остановимся на двух «крайних» случаях теоремы 4.1. Так как числитель в условии (4.1) всегда есть $o(\ln m)$, то утверждение теоремы останется верным, если условие (4.1) заменить на такое:

$$\varliminf_{m\to\infty}\frac{\ln m}{\ln s_m^{-1}(H)}<\infty.$$

Последнее означает, что из теоремы 4.1 следует теорема 2.1.

Если операторы $A_p\in\mathfrak{S}_\omega$, то условие (4.1) выполнено и тогда из теоремы 4.1 следует теорема 3.1, правда, теоремы 2.1 и 3.1 были доказаны без предположения об обратимости оператора $1-A_0$.

§ 5. Оценка резольвенты операторных пучков (I). (I^a) через s-числа операторов A_pH.

Рассмотрим для определенности операторный пучок (I). Предположим, что существует ограниченный оператор

$$(1-A_0)^{-1}=1+S.$$

Тогда резольвента операторного пучка может быть представлена в виде

$$L^{-1}(\lambda)=\Big(1-\sum_{p=1}^{n-1}\lambda^p(1+S)A_pH^p-\lambda^n(1+S)H^n\Big)^{-1}(1+S)=$$
$$=\Big(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^pT_pH^{p-1}-\lambda^nH^n\Big)^{-1}(1+S),$$

где операторы $T_p\in\mathfrak{S}_\infty\,(p=1,\ \ldots,\ n)$ определены равенствами

$$T_p=(1+S)A_pH\ (p=1,\ \ldots,\ n-1),\quad T_n=S\overset{\circ}{H}=(1+S)A_0H.$$

Расщепим каждый из операторов T_p на сумму двух операторов $T_p=T_p^{(m)}+E_p^{(m)}$, где $T_p^{(m)}$ — конечномерный оператор, s-числа которого совпадают с s-числами оператора T_p, большими $\|E_p^{(m)}\|$.

Преобразуем резольвенту пучка к виду

$$L^{-1}(\lambda)=\left(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^pE_p^{(m)}H^{p-1}-\lambda^nH^n-\sum_{p=1}^{n}\lambda^pT_p^{(m)}H^{p-1}\right)^{-1}(1+S)=$$
$$=R_\varepsilon(\lambda)\left(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^pT_p^{(m)}H^{p-1}R_\varepsilon(\lambda)\right)^{-1}(1+S),$$

где через $R_\varepsilon(\lambda)$ обозначен оператор

$$R_\varepsilon(\lambda)=\left(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^pE_p^{(m)}H^p-\lambda^nH^n\right)^{-1}=$$
$$=(1-\lambda^nH^n)^{-1}\left(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^pE_p^{(m)}H^{p-1}(1-\lambda^nH^n)^{-1}\right)^{-1}.$$

На основании леммы 1.2 заключаем, что при

$$\|E_p^{(m)}\|\le\frac{\varepsilon}{n2^{n-1}}\,(p=1,\ \ldots,\ n) \tag{5.1}$$

($\varepsilon>0$ произвольно мало)

$$\left\|\sum_{p=1}^{n}\lambda^pE_p^{(m)}H^{p-1}(1-\lambda^nH^n)^{-1}\right\|\le$$
$$\le\sum_{p=1}^{n}\frac{\varepsilon r}{n2^{n-1}}\|\lambda^{p-1}H^{p-1}(1-\lambda^nH^n)^{-1}\|\le\frac{\varepsilon r}{|\sin n\varphi|}. \tag{5.2}$$

В области $\frac{\varepsilon r}{|\sin n\varphi|}<1$, используя неравенство (5.2), устанавливаем оценку для $\|R_\varepsilon(\lambda)\|$

$$\|R_\varepsilon(\lambda)\|\le\|(1-\lambda^nH^n)^{-1}\|\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^jr^j}{|\sin n\varphi|^j}\le\frac{2^{n-1}}{|\sin n\varphi|}\times$$
$$\times\frac{|\sin n\varphi|}{|\sin n\varphi|-\varepsilon}\le\frac{2^{n-1}}{|\sin n\varphi|-r\varepsilon}. \tag{5.3}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$D_0(\lambda)=\det\left(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^p T_p^{(m)} H^{p-1} R_\varepsilon(\lambda)\right),$$

модуль которой на основании неравенства (0.4) и леммы 1.4 оценивается следующим образом:

$$|D_0(\lambda)|\le\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+s_j\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda^p T_p^{(m)} H^{p-1} R_\varepsilon(\lambda)\right)\right)=$$

$$=\exp\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)d\nu\left(t,\sum_{p=1}^{n}\lambda^p T_p^{(m)} H^{p-1} R_\varepsilon(\lambda)\right)\le$$

$$=\exp\sum_{p=1}^{n}\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)d\nu\left(nt,\lambda^p T_p^{(m)} H^{p-1} R_\varepsilon(\lambda)\right).$$

Так как

$$s_j(\lambda^p T_p^{(m)} H^{p-1} R_\varepsilon(\lambda))\le\|\lambda^p H^{p-1}(1-\lambda^n H^n)^{-1}\|\times$$

$$\times\left\|\left(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^p E_p^{(m)} H^{p-1}(1-\lambda^n H^n)^{-1}\right)^{-1}\right\| s_j(T_p),$$

то в области $\frac{\varepsilon r}{|\sin n\varphi|}<1$ можно продолжить оценку для $|D_0(\lambda)|$,

$$|D_0(\lambda)|\le\exp\sum_{p=1}^{n}\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)d\nu\left(\frac{n2^{n-1}rt}{|\sin n\varphi|-r\varepsilon},\ T_p^{(m)}\right).$$

Из условия (5.1) следует, что

$$\nu\left(\frac{n2^{n-1}rt}{|\sin n\varphi|-r\varepsilon};\ T_p^{(m)}\right)=\begin{cases}\nu\left(\frac{n2^{n-1}rt}{|\sin n\varphi|-r\varepsilon},\ T_p\right), & t\le\frac{|\sin n\varphi|-r\varepsilon}{r\varepsilon}\\ \text{const}, & t>\frac{|\sin n\varphi|-r\varepsilon}{r\varepsilon},\end{cases}$$

и поэтому окончательно в области $\frac{r\varepsilon}{|\sin n\varphi|}<\frac{1}{2}$ оцениваем $|D_0(\lambda)|$ таким образом:

$$|D_0(\lambda)|\le\exp\sum_{p=1}^{n}\int_0^{\frac{|\sin n\varphi|-r\varepsilon}{r\varepsilon}}\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)d\nu\left(\frac{n2^{n-1}rt}{|\sin n\varphi|-r\varepsilon},\ T_p\right)=$$

$$=\exp\sum_{p=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{r\varepsilon}{|\sin n\varphi|-r\varepsilon}\right)\nu\left(\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon},\ T_p\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}}\frac{n2^{n-1}r\nu(t,T_p)\,dt}{n2^{n-1}rt+(|\sin n\varphi|-r\varepsilon)t^2}\right)\le$$

$$\le\exp\sum_{p=1}^{n}\left(\ln 2\cdot\nu\left(\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon},\ T_p\right)+\int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} t^{-1}\nu(t,\ T_p)\,dt\right)\le$$

$$\le\exp\sum_{p=1}^{n}\int_0^{\frac{n2^n}{\varepsilon}} t^{-1}\nu(t,\ T_p)\,dt. \tag{5.4}$$

Пусть $\lambda_1 = r_1 e^{i\frac{2l+1}{2n}\pi}$ $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Тогда лемма М. В. Келдыша позволяет установить при достаточно большом r_1 оценку снизу для $|D_0(\lambda_1)|$

$$\frac{1}{D_0(\lambda_1)} = \det\left(1 - \sum_{p=1}^{n} \lambda_1^p T_p^{(m)} H^{p-1} R_\varepsilon(\lambda_1)\right)^{-1} =$$

$$= \det\left(R_\varepsilon^{-1}(\lambda_1) L^{-1}(\lambda_1)\right) = \det\left(1 + \sum_{p=1}^{n} \lambda_1^p T_p^{(m)} H^{p-1} L^{-1}(\lambda_1)(1 - A_0)\right)$$

и поэтому

$$\ln\left|\frac{1}{D_0(\lambda_1)}\right| \leq \sum_{p=1}^{n} \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) d\nu\,(nt,\ \lambda_1^p T_p^{(m)} H^{p-1} \times$$

$$\times (1 - \lambda_1^n H^n)^{-1} \left(1 - \sum_{p=1}^{n-1} \lambda_1^p A_p H^p (1 - \lambda_1^n H^n)^{-1}\right)^{-1} (1 - A_0)\Big) \leq$$

$$\leq \sum_{p=1}^{n} \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) d\nu\,(nBr_1 t,\ T_p^{(m)}),$$

где $B = 2^n \| 1 - A_0 \|$.

Продолжая полученную выше оценку, получим для $r_1 \leq \frac{1}{2\varepsilon}$

$$\ln\left|\frac{1}{D_0(\lambda_1)}\right| \leq \sum_{p=1}^{n} \int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} \ln\left(1 + \frac{nr_1 B}{t}\right) d\nu\,(t,\ T_p) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \left(\ln\left(1 + \frac{r_1 B\varepsilon}{2^{n-1}}\right) \nu\left(\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon},\ T_p\right) + \int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} \frac{nr_1 B}{nr_1 Bt + t^2}\, \nu\,(t_1, T_p)\, dt\right) \leq$$

$$\leq \sum_{p=1}^{n} \left(\ln(1 + \| 1 - A_0 \|)\, \nu\left(\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon},\ T_p\right) + \int_0^{\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} t^{-1} \cdot \nu\,(t,\ T_p)\, dt\right) \leq$$

$$\leq \sum_{p=1}^{n} \int_0^{(1 + \| 1 - A_0 \|)\frac{n2^{n-1}}{\varepsilon}} t^{-1} \cdot \nu\,(t,\ T_p)\, dt = \sum_{p=1}^{n} \int_0^{\frac{c'n}{\varepsilon}} t^{-1} \cdot \nu\,(t,\ T_p)\, dt. \quad (5.4^a)$$

Лемма 5.1. *Пусть в операторном пучке (I) оператор $1 - A_0$ обратим и пусть элементы f и $g_p \in \mathfrak{H}$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ таковы, что функция*

$$F(\lambda) = \left(L^{-1}(\lambda) f,\ \sum_{p=0}^{n-1} \bar{\lambda}^p g_p\right)$$

является целой. Тогда в угле $0<\varphi<\frac{\pi}{n}$ *при достаточно больших* r *имеет место неравенство* n

$$\ln|F_1(\lambda)| \overline{\overline{(\mathrm{def})}} \ln|(e^{i\frac{\pi}{2n}}+\lambda)^{1-n}F(\lambda)| \leq$$
$$\leq \frac{\gamma_1 r^{n+2}}{(\sin n\varphi)^{n+2}} \cdot \sum_{p=1}^{n} \nu\left(\frac{\gamma_2 r}{\sin n\varphi},\ T_p\right).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$D_1(\lambda)=F_1(\lambda)\cdot D_0(\lambda),$$

для модуля которой на основании неравенств (6.3), (6.4), (0.5) устанавливаем такую оценку в области $V\left\{\lambda: \frac{r\varepsilon}{\sin n\varphi}<\frac{1}{2};\ 0<\varphi<\frac{\pi}{n}\right\}$

$$|D_1(\lambda)| \leq |(e^{i\frac{\pi}{2n}}+\lambda)^{1-n}|\cdot\|f\|\cdot\left\|\sum_{p=0}^{n-1}\bar{\lambda}^p g_p\|\cdot|D_0(\lambda)|\cdot\|R_\varepsilon(\lambda)\right\|\times$$
$$\times\|1+S\|\cdot\left\|\left(1-\sum_{p=1}^{n}\lambda^p T_p^{(m)} H^{p-1} R_\varepsilon(\lambda)\right)^{-1}\right\| \leq$$
$$\leq \frac{c_1}{|\sin n\varphi|-r\varepsilon}\cdot|D_0(\lambda)|\cdot\frac{1}{|D_0(\lambda)|}\cdot\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+s_j\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda^p T_p^{(m)} H^{p-1} R_\varepsilon(\lambda)\right)\right) \leq$$
$$\leq \frac{c_1}{r\varepsilon}\exp\sum_{p=1}^{n}\int_0^{\frac{n2^n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ T_p)\,dt.$$

На основании последнего неравенства заключаем, что в области V справедлива оценка

$$|\lambda D_1(\lambda)| \leq \frac{c_1}{\varepsilon}\exp\sum_{p=1}^{n}\int_0^{\frac{n2^n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ T_p)\,dt. \tag{5.5}$$

При оценке резольвенты в точке $\lambda_0=r_0 e^{i\varphi_0}$ $(\lambda_0\in V)$ положим $\varepsilon=\frac{\sin n\varphi_0}{2kr_0}$, где k — достаточно большое число (более подробно о величине k будет сказано ниже).

Применим гомотетию с полюсом в начале координат и коэффициентом $s=\frac{\sin n\varphi_0}{kr_0}$, после которой точка λ_0 перейдет в точку, лежащую на кривой $\frac{r}{\sin n\varphi}=\frac{1}{k}$, а область V перейдет в область $\frac{r}{\sin n\varphi}<1$, в которой будут выполняться неравенства

$$\left|D_0\left(\frac{\lambda}{s}\right)\right| \leq \exp\sum_{p=1}^{n}\int_0^{\frac{2c'n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ T_p)\,dt, \tag{5.6}$$

$$\left|\frac{1}{D_0\left(\frac{\lambda_1}{s}\right)}\right| \leq \exp \sum_{p=1}^{n} \int\limits_{0}^{\frac{2c\,n}{\varepsilon}} t^{-1} \cdot \nu(t,\ T_p)\, dt, \tag{5.6^a}$$

$$\left|\frac{\lambda}{s} D_1\left(\frac{\lambda}{s}\right)\right| \leq \frac{c_1}{\varepsilon} \exp \sum_{p=1}^{n} \int\limits_{0}^{\frac{2c'n}{\varepsilon}} t^{-1} \cdot \nu(t,\ T_p)\, dt. \tag{5.7}$$

Пусть P такая кривая, что в области, ею ограничиваемой, содержится «лепесток» кривой

$$\frac{r}{\sin n\varphi} = \frac{1}{k},$$

а сама она лежит в области, ограниченной лепестком $\frac{r}{\sin n\varphi} = 1$.

В области, ограниченной кривой P, функция $\frac{\lambda}{s} F_1\left(\frac{\lambda}{s}\right)$ будет голоморфна и ограничена, и поэтому для ограниченной сверху субгармонической функции $\ln\left|\frac{\lambda}{s} F_1\left(\frac{\lambda}{s}\right)\right|$ будет выполняться соотношение

$$\ln\left|\frac{\lambda_0}{s} F_1\left(\frac{\lambda_0}{s}\right)\right| = \ln\left|\frac{\lambda_0}{s}\,\frac{D_1\left(\frac{\lambda_0}{s}\right)}{D_0\left(\frac{\lambda_0}{s}\right)}\right| \leq \int\limits_{(P)} K_P(\lambda_0;\ u) \ln\left|\frac{\frac{u}{s} D_1\left(\frac{u}{s}\right)}{D_0\left(\frac{u}{s}\right)}\right| |du|, \tag{5.8}$$

где $K_P(\lambda;\ u)$ — ядро Пуассона для области, ограниченной кривой P.

Воспользовавшись неотрицательностью ядра $K_P(\lambda;\ u)$, усилим неравенство (5.8)

$$\ln\left|\frac{\lambda_0}{s} F_1\left(\frac{\lambda_0}{s}\right)\right| \leq \int\limits_{(P)} K_P(\lambda_0;\ u) \ln^+\left|\frac{\frac{u}{s} D_1\left(\frac{u}{s}\right)}{D_0\left(\frac{u}{s}\right)}\right| |du| \leq$$

$$\geq \int\limits_{(P)} K_P(\lambda_0;\ u) \ln^+\left|\frac{u}{s} D_1\left(\frac{u}{s}\right)\right| |du| + \int\limits_{(P)} K_P(\lambda_0;\ u) \ln^-\left|D_0\left(\frac{u}{s}\right)\right| |du|. \tag{5.9}$$

Так как функция $\ln\left|D_0\left(\frac{\lambda}{s}\right)\right|$ в области, ограниченной кривой P, также является ограниченной субгармонической, то

$$\ln\left|D_0\left(\frac{\lambda}{s}\right)\right| \leq \int\limits_{(P)} K_P(\lambda;\ u) \ln\left|D_0\left(\frac{u}{s}\right)\right| |du| =$$

$$= \int\limits_{(P)} K_P(\lambda;\ u) \ln^+\left|D_0\left(\frac{u}{s}\right)\right| |du| - \int\limits_{(P)} K_P(\lambda;\ u) \ln^-\left|D_0\left(\frac{u}{s}\right)\right| |du|$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{(P)} K_P(\lambda;\ u) \ln^-\left|D_0\left(\frac{u}{s}\right)\right| |du| \leq \int\limits_{(P)} K_P(\lambda;\ u) \ln^+\left|D_0\left(\frac{u}{s}\right)\right| |du| +$$

$$+ \ln\left|\frac{1}{D_0\left(\frac{\lambda}{s}\right)}\right|. \tag{5.10}$$

Если $a = sr_0 e^{i\frac{\pi}{2n}}$, то из неравенства (5.10) будет следовать на основании (5.6) и (5.6^a) такая оценка:

$$\int\limits_{(P)} K_P(a;u)\ln^-\left|D_0\left(\frac{u}{s}\right)\right||du| \leq \sum_{p=1}^{n}\left(\int\limits_0^{\frac{2c'n}{\varepsilon}} t^{-1}\nu(t, T_p)\,dt\int\limits_{(P)} K_P(a;u)|du| + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{n}\int\limits_0^{\frac{2c'n}{\varepsilon}} t^{-1}\nu(t, T_p)\,dt\right) = 2\sum_{p=1}^{n}\int\limits_0^{\frac{2c'n}{\varepsilon}} t^{-1}\nu(t, T_p)\,dt. \qquad (5.11)$$

Наконец, объединяя (5.1), (5.7), (5.11), получаем

$$\ln\left|\frac{\lambda_0}{s}F_1\left(\frac{\lambda_0}{s}\right)\right| \leq \ln\frac{c_1}{\varepsilon} + \sum_{p=1}^{n}\int\limits_0^{\frac{2c'n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t, T_p)\,dt +$$

$$+\sup_{(u\in P)}\frac{K_P(\lambda_0;u)}{K_P(a;u)}\int\limits_{(P)} K_P(a;u)\ln^-\left|D_0\left(\frac{u}{s}\right)\right||du| \leqslant$$

$$\leqslant \ln\frac{c_1}{\varepsilon} + \left(1 + 2\sup_{(u\in P)}\frac{K_P(\lambda_0;u)}{K_P(a;u)}\right)\sum_{p=1}^{n}\int\limits_0^{\frac{2c'n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t, T_p)\,dt\Bigg). \qquad (5.12)$$

Чтобы получить желаемую оценку для резольвенты, осталось оценить supremum отношения ядер Пуассона.

При исследовании поведения резольвенты при малых положительных φ_0 с целью добиться большей симметрии сделаем поворот $\mu = \lambda e^{-i\frac{\pi}{2n}}$ и покажем, что в качестве образа кривой P при этом повороте можно взять при достаточно малом $\delta > 0$ образ границы полукруга

$$N_\delta\{w : |w| < \delta,\ \operatorname{Re} w > 0\}$$

при отображении

$$\mu = w^{\frac{1}{n}} - cw^{\frac{2}{n}} \quad (c > 1). \qquad (5.13)$$

Так как функция $\zeta = w^{\frac{1}{n}}$ является однолистной в области N_δ и $\left.\frac{d\mu}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} \neq 0$, то в достаточно малой окрестности точки $\zeta = 0$ будет однолистной и функция $\mu = \zeta - c\zeta^2$.

Покажем, что кривая P_δ, ограничивающая образ N_δ при отображении (5.13), будет находиться в области, ограничиваемой кривой $r = \cos n\varphi$.

Так как $|w|^{\frac{1}{n}}\left(1 - c|w|^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant r \leqslant |w|^{\frac{1}{n}}\left(1 + c|w|^{\frac{1}{n}}\right)$, то $r = |w|^{\frac{1}{n}} \times \left(1 + O\left(|w|^{\frac{1}{n}}\right)\right)$ при $w \to 0$, и поэтому

$$|w| = \frac{r^n}{1 + O\left(|w|^{\frac{1}{n}}\right)} = r^n\left(1 + O\left(|w|^{\frac{1}{n}}\right)\right) = r^n(1 + O(r)). \qquad (5.14)$$

Если $w \to 0$ вдоль мнимой положительной полуоси, то

$$\arg \mu = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2n}}|w|^{\frac{1}{n}}\left(1 - ce^{i\frac{\pi}{2n}}|w|^{\frac{1}{n}}\right)\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2n} + \operatorname{Im}\ln\left(1 - ce^{i\frac{\pi}{2n}}|w|^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\pi}{2n} + \operatorname{Im}\left(-c|w|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\pi}{2n}} + O\left(|w|^{\frac{2}{n}}\right)\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2n} - c|w|^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\pi}{2n} + 0\left(|w|^{\frac{2}{n}}\right).$$

Из последнего соотношения, опираясь на (5.14), получаем для угла на кривой P_δ

$$\varphi_{P_\delta} = \frac{\pi}{2n} - c\sin\frac{\pi}{2n}\cdot r + O(r^2).$$

Когда же точка стремится к началу координат в верхней полуплоскости вдоль кривой $r = \cos n\varphi$, то

$$\varphi = \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n}r + O(r^3).$$

Проведя аналогичные рассуждения, когда $w \to 0$ вдоль мнимой отрицательной полуоси, убеждаемся, что при $c > 1$ кривая P_δ будет целиком лежать в области, ограниченной кривой $r = \cos n\varphi$, ибо $\sin\frac{\pi}{2n} > \frac{1}{n}$.

С другой стороны, при малых r для точек, лежащих на кривой $r = \frac{1}{k}\cos n\varphi$, будем иметь в верхней полуплоскости

$$\varphi = \frac{\pi}{2n} - \frac{k}{n}r + O(r^3),$$

а так как за счет выбора k можно добиться, что все точки кривой $r = \frac{1}{k}\cos n\varphi$ лежат вблизи начала координат, то и вся кривая $r = \frac{1}{k}\cos n\varphi$ войдет в область, ограниченную кривой P_δ.

Известно, что гармоническая мера $K_P(\lambda; u)\,|du|$ не изменяется при конформном отображении [18, стр. 43]. Поэтому оценим отношение ядер Пуассона при отображении τ области, ограниченной кривой P, на правую полуплоскость плоскости $z = x + iy$. (Это отображение является суперпозицией отображений $\mu = \lambda e^{-i\frac{\pi}{2n}}$, $w^{\frac{1}{n}} - cw^{\frac{2}{n}} = \mu$, $z = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{w} - \frac{w}{\delta}\right)$),

$$\frac{K_P(\lambda_0; u)\,|du|}{K_P(a; u)\,|du|} = \frac{K_{P_\delta}(\mu_0; \zeta)}{K_{P_\delta}(a'; \zeta)} = \frac{K(z_0; t)}{K(\hat{a}; t)} =$$
$$= \frac{x_0(t^2 + \hat{a}^2)}{\hat{a}[(t - y_0)^2 + x_0^2]} = \frac{x_0}{\hat{a}}\left(1 + \frac{\hat{a}^2 - x_0^2 - y_0^2}{(t - y_0)^2 + x_0^2} + \frac{2ty_0}{(t - y_0)^2 + x_0^2}\right). \tag{5.15}$$

Здесь через $K(z, t)$ обозначено ядро Пуассона для полуплоскости, $z_0 = (\tau)\lambda_0 = (\tau)e^{i\frac{\pi}{2n}}\mu_0$, $\hat{a} = (\tau)a = (\tau)e^{i\frac{\pi}{2n}}a'$.

При $|\lambda_0| \geq \delta_1 > 0$ отношения ядер ограничено на основании теоремы Вейерштрасса. При $|\lambda_0| < \delta_1$ $|z_0|$ достаточно велик, и поэтому из соотношения (5.15) получим

$$\sup_{\substack{(\zeta \in P_\delta) \\ (|\mu_0| < \delta_1)}} \frac{K_{P_\delta}(\mu_0; \zeta)}{K_{P_\delta}(a'; \zeta)} \leq \frac{x_0}{\hat{a}}\left(1 + \sup_{(t)}\frac{2ty_0}{(t - y_0)^2 + x_0^2}\right) \leq \frac{x_0}{\hat{a}}\cdot\frac{2(x_0^2 + y_0^2)}{x_0^2} = \frac{2|z_0|^2}{\hat{a}x_0}. \tag{5.16}$$

Поскольку малым $|\mu|$ соответствуют малые $|w|$, то справедливы неравенства

$$|z| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{|w|} + \frac{|w|}{\delta}\right) < \frac{\delta}{|w|},$$
$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{|w|} - \frac{|w|}{\delta}\right)\cos(\arg w) \geq \frac{1}{4}\frac{\delta}{|w|}\cos(\arg w).$$

Воспользуемся оценкой (5.16) и только что установленными неравенствами. Имеем

$$\sup_{(\zeta\in P_\delta)} \frac{K_{P_\delta}(\mu_0;\ \zeta)}{K_{P_\delta}(a';\ \zeta)} \leq \frac{c_2}{|w_0|\cos(\arg w_0)} = \frac{c_2}{\operatorname{Re} w_0}. \tag{5.17}$$

Для того чтобы оценить $\mathcal{R}e\, w$, обратимся к соотношению (5.13)

$$w = \mu^n\left(1 - cw^{\frac{1}{n}}\right)^{-n} = \mu^n\left(1 + ncw^{\frac{1}{n}} + O\left(|w|^{\frac{2}{n}}\right)\right) = \mu^n\left(1 + nc\mu + O(|\mu|^2)\right).$$

Тогда

$$\operatorname{Re} w_0 = r_0^n \cos n\varphi_0 + ncr_0^{n+1}\cos(n+1)\varphi_0 + O(r_0^{n+2}). \tag{5.18}$$

Так как при $\varphi_0 \to -\frac{\pi}{2n}$

$$\cos n\varphi_0 = n\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2n}\right) + O\left(\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2n}\right)^2\right),$$

а

$$\cos(n+1)\varphi_0 = -\sin\frac{\pi}{2n} + \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2n}\right)(n+1)\cos\frac{\pi}{2n} + O\left(\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2n}\right)^2\right),$$

то соотношение (5.18) с учетом, что $r_0 = \frac{1}{k}\cos n\varphi_0$ принимает вид

$$\operatorname{Re} w_0 = \frac{1}{k^n}\cos^{n+1} n\varphi_0 - nc\sin\frac{\pi}{2n}\frac{1}{k^{n+1}}\cos^{n+1} n\varphi_0 +$$
$$+ O(|\cos^{n+2} n\varphi_0|) \geq c_3 \cos^{n+1} n\varphi_0. \tag{5.19}$$

После перехода к переменной λ оценка (5.17) с учетом (5.19) принимает вид для малых φ_0

$$\sup_{(u\in P)} \frac{K_P(\lambda_0;\ u)}{K_P(a;\ u)} \leq \frac{c_4}{\sin^{n+1} n\varphi_0}.$$

Напомним, что $\varepsilon = \frac{\sin n\varphi_0}{2kr_0}$ и преобразуем оценку (5.12) к виду

$$\ln\left|\frac{\lambda_0}{s} F_1\left(\frac{\lambda_0}{s}\right)\right| \leq \ln\frac{c_1}{\varepsilon} + \left(1 + \frac{2c_4}{\sin^{n+1} n\varphi_0}\right)\sum_{p=1}^{n}\int_0^{\frac{2c'n}{\varepsilon}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ T_p)\,dt.$$

Огрубляя последнюю оценку и переобозначая постоянные, получим

$$\ln|F_1(\lambda_0)| \leq \ln\frac{2kr_0c_1}{\sin n\varphi_0} + \left(1 + \frac{2c_1}{\sin^{n+1} n\varphi_0}\right)\sum_{p=1}^{n}\int_0^{\frac{4c'nkr_0}{\sin n\varphi_0}} t^{-1}\cdot\nu(t,\ T_p)\,dt \leq$$

$$\leq \ln \frac{2kr_0c_1}{\sin n\varphi_0} + \left(1 + \frac{2c_4}{\sin^{n+1} n\varphi_0}\right) \ln \frac{4c'nkr_0}{\sin n\varphi_0} \cdot \sum_{p=1}^{n} \nu\left(\frac{4c'nkr_0}{\sin n\varphi_0},\ T_p\right) \leq$$

$$\leq \frac{\gamma_1 r_0^{n+2}}{\sin^{n+2} n\varphi_0} \sum_{p=1}^{n} \nu\left(\frac{\gamma_2 r_0}{\sin n\varphi_0},\ T_p\right). \tag{5.20}$$

Лемма доказана.

Аналогичный результат получается и для точек, лежащих вблизи лучей $\arg\lambda = \frac{\pi l}{n}$ $(l = 1, 2, \ldots, 2n-1)$.

Для операторного пучка (I^a) будет иметь место та же оценка, только операторы T_p надо заменить на операторы

$$T'_p = HA_p(1+S)\ \ (p = 1, \ldots, n-1),\ \ T'_n = HA_0(1+S).$$

§ 6. Вторая интерполяционная теорема полноты для пучка вида (I), (I^a)

Из оценки резольвенты (5.20) получается близкая по характеру теореме 4.1

Теорема 6.1. *Если оператор* $1 - A_0$ *обратим, операторы* $A_pH \in \mathfrak{S}_\omega$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ *и выполнено условие*

$$\lim_{\overline{m\to\infty}} \frac{\sum\limits_{p=0}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{m}(2j-1)^{-1}\cdot s_j(A_p)}{\ln\left\{\sum\limits_{p=0}^{n-1}\sum\limits_{j=m}^{\infty}(2j-1)^{-1}s_j(A_pH)\right\}^{-1}} = 0, \tag{6.1}$$

то система собственных и присоединенных векторов операторного пучка (I) *n-кратно полна в* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно.

Тогда найдутся n векторов $g_p \in \mathfrak{H}$ $(p = 0, 1, \ldots, n-1)$ таких, что при любом элементе $f \in \mathfrak{H}$ функция

$$F(\lambda) = \left(L^{-1}(\lambda) f,\ \sum_{p=0}^{n-1} \bar{\lambda}^{p} g_p\right)$$

будет целой, а функция $F_1(\lambda) = (1+\lambda)^{1-n} F(\lambda)$ будет голоморфна в области $|\varphi| < \frac{\pi}{2n}$.

Сделаем замену переменной $\xi = \lambda^{-1} = \rho e^{i\psi}$, после которой существенная особенность функции $F_1(\lambda)$ перейдет в точку $\xi = 0$.

В области $|\psi| < \frac{\pi}{2n}$ на основании (5.20) верна оценка

$$\ln\left|F_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\right| \leq \frac{\gamma_1}{\rho^{n+2}\,|\sin^{n+2} n\psi|} \sum_{p=1}^{n} \nu\left(\frac{\gamma_2}{\rho\,|\sin n\psi|},\ T_p\right). \tag{6.2}$$

Введем в рассмотрение монотонно растущую на интервале $(0, \infty)$ функцию

$$\tilde{m}(t) = t^{n+1}\int_0^t \sum_{p=1}^{n} \nu(\tau, T_p)\, d\tau.$$

Обратную к ней функцию обозначим через $\tilde{\sigma}(t)$; ясно, что $\tilde{\sigma}(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$.

Продолжим оценку (6.2) следующим образом:

$$\ln\left|F_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\right| \leq \frac{\gamma_1}{\rho^{n+2}|\sin n\psi|^{n+2}} \sum_{p=1}^{n} \nu\left(\frac{\gamma_2}{\rho|\sin n\psi|}, T_p\right) \leq$$

$$\leq \frac{d_1}{\rho^{n+2}|\psi|^{n+2}} \sum_{p=1}^{n} \nu\left(\frac{d}{\rho|\psi|}, T_p\right) \leq \frac{d_1}{d\rho^{n+1}|\psi|^{n+1}} \cdot \sum_{p=1}^{n} \int\limits_{\frac{d}{\rho|\psi|}}^{\frac{2d}{\rho|\psi|}} \nu(\tau, T_p)\, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{d_1}{d\rho^{n+1}|\psi|^{n+1}} \sum_{p=1}^{n} \int\limits_{0}^{\frac{2d}{\rho|\psi|}} \nu(\tau, T_p)\, d\tau \leq \beta \widetilde{m}\left(\frac{2d}{\rho|\psi|}\right). \tag{6.3}$$

Рассмотрим в полярных координатах (ρ, ψ) кривую Γ, параметрические уравнения которой таковы:

$$\rho = \frac{16d}{\pi} \int\limits_{t}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\widetilde{\sigma}(\tau)}, \qquad (t \geq t_1 > 0)$$

$$\psi = \frac{\pi}{8\widetilde{\sigma}(t)} \left(\int\limits_{t}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\widetilde{\sigma}(\tau)}\right)^{-1}.$$

Докажем ниже, что $\int\limits_{t}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\widetilde{\sigma}(t)}$ сходится, а сейчас покажем, что кривая Γ лежит в угле $0 < \psi < \frac{\pi}{2n}$. Действительно, если $s(\rho) = \rho\psi(\rho)$ — длина окружности радиуса ρ, которая высекается кривой Γ и положительной вещественной полуосью, то

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{(\rho\psi)'_t}{\rho'_t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\widetilde{\sigma}'(t)\cdot t}{\widetilde{\sigma}} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\widetilde{m}(\widetilde{\sigma})}{\widetilde{m}'(\widetilde{\sigma})\widetilde{\sigma}} =$$

$$= \frac{\pi}{8} \frac{\widetilde{\sigma}^{n+1} \int\limits_0^{\widetilde{\sigma}} \sum\limits_{p=1}^{n} \nu(\tau, T_p)\, d\tau}{(n+1)\,\widetilde{\sigma}^{n+1} \int\limits_0^{\widetilde{\sigma}} \sum\limits_{p=1}^{n} \nu(\tau, T_p)\, d\tau + \widetilde{\sigma}^{n+2} \sum\limits_{p=1}^{n} \nu(\widetilde{\sigma}, T_p)} < \frac{\pi}{8(n+1)} < \frac{\pi}{2n}.$$

Поскольку $\psi(\rho) = \frac{s(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int\limits_0^{\rho} \frac{ds}{dr}\, dr$, то $\psi(\rho) < \frac{\pi}{2n}$.

Кривую Γ продлим лучом Γ_1, уравнения которого

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{16d}{\pi} \displaystyle\int\limits_{t}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\widetilde{\sigma}(\tau)}, \\ \psi = \dfrac{\pi}{8\widetilde{\sigma}(t_1)} \left(\displaystyle\int\limits_{t_1}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\widetilde{\sigma}(\tau)}\right)^{-1}. \end{cases} \qquad (t_1 > t > 0)$$

Ясно, что луч Γ_1 также лежит в углу $0 < \psi < \frac{\pi}{2n}$.

Пусть $\psi = \psi(\rho)$ — уравнение линии $\Gamma + \Gamma_1$. Рассмотрим в ξ-плоскости криволинейную полуполосу

$$\Pi\{\xi : |\varphi| < \psi(\rho)\}.$$

После преобразования $z = x + iy = \ln\frac{1}{\xi} = -\ln\rho + i\varphi$ полуполоса Π перейдет криволинейную полосу

$$\Pi_1\{z : |y| < \psi(e^{-x})\}.$$

Пусть функция $\omega(z)$ конформно отображает полосу Π_1 на полосу $|\operatorname{Im}\omega| < \frac{\pi}{2}$ так, что $\operatorname{Re}\omega(z) \to \pm\infty$ при $z \to \pm\infty$.

Приведем для удобства чтения теорему Варшавского в упрощенной формулировке [20, стр. 230—233].

Теорема. *Пусть функция $\omega(\zeta)$ конформно отображает односвязную область*

$$D\{\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2 : |\zeta_2| < \Phi(\zeta_1)\} \quad (-\infty < \zeta_1 < \infty,\ \Phi(\zeta_1) \neq 0)$$

на полосу $|\operatorname{Im}\omega| < \frac{\pi}{2}$, причем так, что $\operatorname{Re}\omega \to \pm\infty$ при $\zeta_1 \to \pm\infty$ и пусть $|\Phi'(\zeta_1)| < M$. Тогда имеют место неравенства ($\zeta_1 > \zeta_1^{(0)}$):

$$\operatorname{Re}\omega(\zeta) < \frac{\pi}{2}\int_{\zeta_1^{(0)}}^{\zeta_1}\frac{du}{\Phi(u)} + \frac{\pi}{6}\int_{\zeta_1^{(0)}}^{\zeta_1}\frac{\Phi'^2(u)\,du}{\Phi(u)} + \text{const},$$

$$\operatorname{Re}\omega(\zeta) > \frac{\pi}{2}\int_{\zeta_1^{(0)}}^{\zeta_1}\frac{du}{\Phi(u)} - \frac{\pi}{2}\int_{\zeta_1^{(0)}}^{\zeta_1}\frac{\Phi'^2(u)\,du}{\Phi(u)} + \text{const}.$$

Так как

$$|\psi'_x(e^{-x})| = |\rho\psi'(\rho)| < |\psi + \rho\psi'(\rho)| = s'(\rho) < \frac{\pi}{8(n+1)},$$

то при $x > x_1 = -\ln\rho(t_1)$ будем иметь на основании теоремы Варшавского

$$\operatorname{Re}\omega(x+iy) > \frac{\pi}{2}\int_{x_1}^{x}\frac{dt}{\psi(e^{-t})} - \frac{\pi}{2}\int_{x_1}^{x}\frac{\psi_t'^2(e^{-t})\,dt}{\psi(e^{-t})} + \text{const} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{p}^{\rho_1}\frac{dv}{v\psi(v)} - \frac{\pi}{2}\int_{p}^{\rho_1}\frac{v^2\psi'^2(v)}{v\psi(v)}\,dv + \text{const} > \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{16}\right)\cdot\int_{\rho}^{\rho_1}\frac{dv}{s(v)} + \text{const} >$$

$$> \frac{\pi}{4}\int_{\tilde t(\rho_1)}^{\tilde t(\rho)}\frac{16d\cdot\tilde\sigma(\tau)\,d\tau}{\pi\tau\tilde\sigma(\tau)\cdot 2d} + \text{const} = 2\ln\tilde t(\rho) + \text{const}, \tag{6.4}$$

где функция $\tilde t(\rho)$ является обратной к функции

$$\rho = \frac{16d}{\pi}\int_{t}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\tilde\sigma(\tau)}.$$

Принимая во внимание (6.4), получим

$$\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(x+iy)\right\}=\exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{Re}w(x+iy)\right\}\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Im}w(x+iy)\right)\geq$$
$$\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\exp(\ln\tilde{t}(\rho)+\mathrm{const})=\alpha\tilde{t}(\rho), \qquad (6.5)$$

где постоянную α можно считать в силу неоднозначности выбора $w(z)$ большей, чем β.

Если учесть, что $\tilde{t}(\rho)=\tilde{m}\left(\frac{2d}{\rho\psi(\rho)}\right)$, неравенство (6.5) запишется в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(x+iy)\right\}\geq\alpha\tilde{m}\left(\frac{2d}{\rho\psi(\rho)}\right). \qquad (6.6$$

Тогда в силу (6.4)

$$\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(x+iy)\right\}>\ln_{(x>\tilde{x}_1)}|F_1(\lambda(\xi(z(x+i\psi(e^{-x})))))|. \qquad (6.7)$$

Покажем теперь, что неравенство (6.7) будет иметь место всюду в области

$$U\{\xi:|\psi|<\psi(\rho),\ \rho<\rho(t_1)\}.$$

Введем новую систему координат $(\rho_*,\ \psi_*)$ с полюсом в точке $\tau\,(\tau>0)$ и рассмотрим область

$$U_\tau\{\xi:|\psi_*|<\psi(\rho_*),\ \rho_*<\rho(t_1)\}.$$

Так как $\rho\sin\psi=\rho_*\sin\rho_*$, то на основании неравенств (6.2), (6.3), (6.6) всюду на Γ_* будут выполнены неравенства

$$\ln\left|F_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\right|\leq\frac{\gamma_1}{\rho^{n+2}|\sin\psi|^{n+2}}\sum_{p=1}^{n}\nu\left(\frac{\gamma_2}{\rho|\sin\psi|},\ T_p\right)=$$
$$=\frac{\gamma_1}{\rho_*^{n+2}|\sin\psi_*(\rho_*)|^{n+2}}\sum_{p=1}^{n}\nu\left(\frac{\gamma_2}{\rho_*|\sin\psi_*(\rho_*)|},\ T_p\right)\leq$$
$$\leq\beta\tilde{m}\left(\frac{2d}{\rho_*\psi_*}\right)<\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(x_\tau+iy_\tau)\right\},$$

где $x_\tau=-\ln\rho_*$, $y_\tau=\psi_*$.

Ввиду того что точка τ не является особой точкой функции $F_1\left(\frac{1}{\xi}\right)$, а $\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(x_\tau+iy_\tau)\right\}\to+\infty$ при $\rho_*\to0$, на последовательности дуг с центром в τ, соединяющих точки границы области U_τ при $\rho_*\to0$, будет выполнено неравенство

$$\ln\left|F_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\right|<\operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(x_\tau+iy_\tau)\right\}.$$

За счет неоднозначности выбора $w(z)$ можно добиться, что и при $\rho_*=\rho(t_1)$ это неравенство будет выполняться.

На основании принципа максимума для субгармонических функций можно утверждать, что это же неравенство будет справедливым и всюду в U_τ. Перейдем к пределу при $\tau \to 0$, тогда всюду в U будет выполнено неравенство

$$\ln\left|F_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\right| \le \operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}\,w(x+iy)\right\}. \tag{6.8}$$

Воспользуемся сейчас теоремой Варшавского для того, чтобы оценить сверху $\operatorname{Re} w(x+jy)$

$$\operatorname{Re} w(x+iy) < \frac{\pi}{2}\int_{x_1}^{x}\frac{dt}{\psi(e^{-t})} + \frac{\pi}{6}\int_{x_1}^{x}\frac{\psi_t'^2(e^{-t})\,dt}{\psi(e^{-t})} + \text{const} <$$

$$< \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{64}\right)\int_{\rho}^{\rho_1}\frac{dv}{s(v)} + \text{const} < 5\int_{\tilde{t}(\rho_1)}^{\tilde{t}(\rho)}\frac{d\tau}{\tau} + \text{const} = 5\ln\tilde{t}(\rho) + \text{const}. \tag{6.9}$$

В силу (6.8) и (6.9) всюду в области U можно установить оценку

$$\ln\left|F_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\right| \le \exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{Re} w(x+iy)\right\}\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Im} w(x+iy)\right) \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{Re} w(x+iy)\right\} < B\exp(3\ln\tilde{t}(\rho)). \tag{6.10}$$

Отметим, что неравенство (6.10) справедливо и в области

$$\left\{\xi : \rho < \rho(t_1),\ |\psi| < \frac{\pi}{2n}\right\}.$$

Действительно, если возьмем точку $\xi_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}\left(\rho_0 < \rho(t_1),\ \psi(\rho_0) < |\psi_0| < \frac{\pi}{2n}\right)$, то на основании оценки (6.2) получим

$$\ln\left|F_1\left(\frac{1}{\xi_0}\right)\right| \le \frac{\gamma_1}{\rho_0^{n+2}|\sin n\psi_0|^{n+2}}\sum_{p=1}^{n}\nu\left(\frac{\gamma_2}{\rho_0|\sin n\psi_0|},\ T_p\right) \le$$

$$\le \frac{\gamma_1}{\rho_0^{n+2}|\sin\psi(\rho_0)|^{n+2}}\cdot\sum_{p=1}^{n}\nu\left(\frac{\gamma_2}{\rho_0|\sin\psi(\rho_0)|},\ T_p\right) < B\exp(3\ln\tilde{t}(\rho_0)).$$

Возвращаясь к переменной λ, будем иметь

$$\ln|F_1(\lambda)| < B\exp\left(3\ln\tilde{t}\left(\frac{1}{r}\right)\right). \tag{6.11}$$

С другой стороны, мы можем построить в z-плоскости полосу по s-числам операторов A_p $(p = 0, 1, \dots, n-1)$ и получить, сохраняя обозначения первой интерполяционной теоремы, следующую оценку:

$$\ln|F_1(\lambda(x+a+i\eta(x)))|_{(a>0)} < \alpha t(x).$$

Докажем, что из условия (6.1) следует существование последовательности $x_l \to +\infty$, такой, что для любого a, начиная с некоторого $l_0(a)$, будет выполняться неравенство

$$\exp\left(3\ln\tilde{t}\left(\frac{1}{e^{x_l+a}}\right)\right) < \alpha_1 t(x_l). \tag{6.12}$$

Вначале покажем, что из условия (6.1) следует

$$\lim_{\overline{k\to\infty}} \frac{\int\limits_1^k \frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln\left(\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)}\right)^{-1}} = 0, \tag{6.13}$$

где через $\sigma(t)$ обозначена, как и в первой интерполяционной теореме, функция, обратная к функции

$$m(t) = t\int\limits_0^t \sum_{p=0}^{n-1} \nu(\tau, A_p)\, d\tau.$$

Пусть

$$\tilde{m}_1(t) = \max\{t^{n+2};\ \nu(t, (1+S)A_0H);\ \ldots, \nu(t, (1+S)A_{n-1}H)\}$$

и

$$\tilde{m}_2(t) = n\tilde{m}_1^2(t). \tag{6.14}$$

Тогда

$$\tilde{m}(t) \le nt^{n+2} \max_{0\leqslant p\leqslant n-1} \nu(t, (1+S)A_pH) \leqslant \tilde{m}_2(t). \tag{6.15}$$

Пусть $\tilde{\sigma}_i(t)$ — функция, обратная к функции $\tilde{m}_i(t)$ $(i=1, 2)$. Тогда, как и в первой интерполяционной теореме, показывается, что

$$\tilde{\sigma}_1\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \tilde{\sigma}_2(t) \le \tilde{\sigma}(t),$$

и поэтому

$$\int\limits_k^\infty \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)} \le \int\limits_k^\infty \frac{dt}{t\tilde{\sigma}_2(t)} = \int\limits_k^\infty \frac{dt}{t\tilde{\sigma}_1\left[\sqrt{\frac{t}{n}}\right]} = 2\int\limits_{\sqrt{\frac{k}{n}}}^\infty \frac{dt}{t\tilde{\sigma}_1(t)} \le$$

$$\le 2\left(\int\limits_{\sqrt{\frac{k}{n}}}^\infty \frac{dt}{t^{\frac{n+3}{n+2}}} + \sum_{p=0}^{n-1}\int\limits_{\sqrt{\frac{k}{n}}}^\infty \frac{dt}{t\tilde{\sigma}^{(p)}(t)}\right), \tag{6.16}$$

где функция $\tilde{\sigma}^{(p)}(t)$ — функция, обратная к $\nu(t, (1+S)A_pH)$. Так как $\tilde{\sigma}^{(p)}(t) = s_j^{-1}((1+S)A_pH)$ при $j-1 \le t < j$, то оценка (6.16) приводится к виду

$$\int\limits_k^\infty \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)} \le 2\left(\frac{(n+2)\,n^{\frac{1}{2(n+2)}}}{k^{\frac{1}{2(n+2)}}} + \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=\left[\sqrt{\frac{k}{n}}\right]}^\infty s_{j+1}\left(1+S)A_pH\right)\int\limits_j^{j+1}\frac{dt}{t}\right) \le$$

$$\le 2\left(\frac{(n+2)\,n^{\frac{1}{2(n+2)}}}{k^{\frac{1}{2(n+2)}}} + 2\,\|1+S\|\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=\left[\sqrt{\frac{k}{n}}\right]}^\infty s_j(A_pH)(2j-1)^{-1}\right)^* \tag{6.17}$$

* [a], как обычно, означает целую часть числа a.

и, следовательно, $\int\limits_{k}^{\infty} \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)} < \infty$, так как операторы $A_pH \in \mathfrak{S}_\omega (p = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Воспользуемся оценкой (4.18). Тогда с учетом (6.17) получим

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\int\limits_1^k \frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln\left(\int\limits_k^\infty \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)}\right)^{-1}} \leq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{const} + 4\sum\limits_{p=0}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{k} s_j(A_p)(2j-1)^{-1}}{\ln \dfrac{k^{\frac{1}{2(n+2)}}}{2(n+2)\, n^{\frac{1}{2(n+2)}}}} +$$

$$+ \varliminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{const} + 4\sum\limits_{p=0}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{k} s_j(A_p)(2j-1)^{-1}}{\ln (4\,\|\,1+S\,\|\sum\limits_{p=0}^{n-1}\sum\limits_{j=k}^{\infty}(2j-1)^{-1}\cdot s_j(A_pH))^{-1}}.$$

Числитель первого слагаемого в правой части неравенства всегда $o(\ln k)$, и поэтому первое слагаемое равно 0.

Так как

$$\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}(2j-1)^{-1}\cdot s_j(A_p) \leq \mathrm{const}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{\left[\sqrt{\frac{k}{n}}\right]}(2j-1)^{-1}\cdot s_j(A_p),$$

для доказательства этого можно использовать соотношение

$$\int\limits_0^k \frac{dx}{2x+1} < \sum_{j=1}^{k}(2j-1)^{-1} < 1 + \int\limits_1^k \frac{dx}{2x-1}\Bigg),$$

то, поскольку $\left[\sqrt{\frac{k}{n}}\right]$ пробегает все целые числа при $k\to\infty$, имеем

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{p=0}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{\left[\sqrt{\frac{k}{n}}\right]}(2j-1)^{-1}\cdot s_j(A_p)}{\ln\Bigg(\sum\limits_{p=0}^{n-1}\sum\limits_{j=\left[\sqrt{\frac{k}{n}}\right]}^{\infty}(2j-1)^{-1}\cdot s_j(A_pH))^{-1}} = 0.$$

Следовательно, равенство (6.13) справедливо, т. е. существует последовательность $k_l\to\infty$, такая, что

$$\frac{\int\limits_1^{k_l}\frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln\left(\int\limits_{k_l}^{\infty}\frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)}\right)^{-1}} = \varepsilon_l \begin{pmatrix}\varepsilon_l\to 0\\ l\to\infty\end{pmatrix}.$$

Покажем, что для последовательности

$$x_l = \frac{8c}{\pi}\int\limits_1^{k_l^4} \frac{dt}{t\sigma(t)} \tag{6.18}$$

будет выполнено неравенство (6.12).

В самом деле,

$$\frac{\int\limits_1^{k_l^4} \frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln\left(\int\limits_{k_l}^{\infty} \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)}\right)^{-1}} = \frac{\int\limits_1^{k_l} \frac{dt}{t\sigma(t)} + \int\limits_{k_l}^{k_l^4} \frac{dt}{t\sigma(t)}}{\ln\left(\int\limits_{k_l}^{\infty} \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)}\right)^{-1}} \leq \frac{\int\limits_1^{k_l} \frac{dt}{t\sigma(t)} + 3\frac{\ln k_l}{\sigma(k_l)}}{\ln\left(\int\limits_{k_l}^{\infty} \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)}\right)^{-1}} \leq 4\varepsilon_l.$$

Из последнего соотношения имеем

$$\ln\left(\int\limits_{k_l}^{\infty} \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)}\right)^{-1} \geq \frac{\pi x_l}{32\varepsilon_l},$$

и поэтому, начиная с некоторого $l_0(a)$, выполнено неравенство

$$\tilde{t}\left(\frac{1}{e^{x_l+a}}\right) \leq 1 + \max_{(i)} \left\{i : \left(\int\limits_i^{\infty} \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)}\right) \leq \frac{16d}{\pi} e^{x_l+a}\right\} =$$

$$= 1 + \max_{(i)} \left\{i : \ln\left(\int\limits_i^{\infty} \frac{dt}{t\tilde{\sigma}(t)}\right)^{-1} \leq \ln\frac{16d}{\pi} + x_l + a\right\} < 1 + k_l. \tag{6.19}$$

Так как $t(x_l) = k_l^4$, то из (6.19) следует неравенство (6.12), т. е. существует последовательность $x_l \to \infty$, такая, что при любом a, начиная с некоторого $l_0(a)$, имеет место неравенство

$$\ln|F_1(\lambda(x_l + a + iy))|_{(|y|<\eta(x_l))} < \operatorname{Re}\left\{\exp\frac{1}{2}w(x_l + iy)\right\}.$$

Осталось провести те же рассуждения, что и в первой интерполяционной теореме. Теорема доказана.

Так как числитель в условии (6.1) всегда есть $o(\ln k)$, а знаменатель

$$\ln\left(\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=k}^{\infty}(2j-1)^{-1}\cdot s_j(A_pH)\right)^{-1} < \ln\left(\sum_{p=0}^{n-1}(2k-1)^{-1}\cdot s_k(A_pH)\right)^{-1},$$

то утверждение теоремы сохранится, если условие (6.1) заменить на следующее:

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\ln\left(\sum\limits_{p=0}^{n-1} s_k(A_pH)\right)^{-1}} < \infty. \tag{6.1^a}$$

Отметим, что если каждый из операторов A_pH ($p = 0, 1, \ldots; n-1$) имеет конечный нижний порядок

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\ln s_k^{-1}(A_pH)} < \infty,$$

то условие (6.1^a) будет выполнено. Тогда из теоремы (6.1) следует теорема о n-кратной полноте в $\mathfrak{H}$ системы собственных и присоединенных векторов пучка (1) при условии обратимости оператора $1 - A_0$ и принадлежности операторов A_iH ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) классу $\mathfrak{S}_p$ ($p > 0$).

Если операторы $A_p \in \mathfrak{S}_\omega$ ($p = 0, \ldots, n-1$), то условие (6.1) будет выполнено, и следовательно, из теоремы 6.1 вновь следует теорема 4.1 при условии, что оператор $1 - A_0$ обратим. Случаи $A_i \in \mathfrak{S}_\omega$ и $A_iH \in \mathfrak{S}_p$ являются как бы «крайними» случаями теоремы 6.1.

Для операторного пучка (1^a) надо в условиях теоремы заменить операторы A_pH на операторы HA_p ($p = 0, 1, \ldots, n-1$).

ЛИТЕРАТУРА

1 М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. ДАН СССР, 77, 1, 1951.

2. Дж. Э. Аллахвердиев. О полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов, близких к нормальным. ДАН СССР, 115, 2, 1957.

3. Ю. А. Палант. Об одном признаке полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов, ДАН СССР, 141, 3, 1961, 558—560.

4. А. С. Маркус. О кратной полноте и сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка, ДАН СССР, 163, 5, 1965.

5. М. Г. Крейн, Г. К. Лангер. К теории квадратичных самосопряженных операторов. ДАН СССР, 154, 6, 1964; О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. «Труды Международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды». Изд-во «Наука», 1969.

6. В. И. Мацаев. Несколько теорем о полноте корневых подпространств вполне непрерывных операторов. ДАН СССР, 155, 2, 1964.

7. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во «Наука», 1965.

8. Ky Fan. Maximum properties and inequalities for eigenvalues of completely continuons operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, 1951, 760—766.

9. H. Weyl. Inequalities between the two kinds of eigenvalues of linear transformation, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 35, 1949, 408—411.

10. Е. З. Могульский. Теорема полноты системы собственных и присоединенных векторов рационального операторного пучка. ИАН Арм. ССР, 6, 1968.

11. А. С. Маркус. О голоморфных оператор-функциях. ДАН СССР, 119, 6, 1958.

12. В. И. Мацаев. О росте целых функций, допускающих некоторые оценки снизу. ДАН СССР, 132, 2, 1960.

13. В. И. Мацаев. Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов. ДАН СССР, 154, 5, 1964.

14. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.

15. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. 2. Изд-во «Наука».

16. N. Levinson. Gap and density theorems, N. Y. 1940.

17. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции.

18. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, 1949.

19. Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Д. Пойа. Неравенства. ИЛ. 1948.

20. М. А. Евграфов. Аналитические функции. Изд-во «Наука», 1968.

21. Е. З. Могульский. О полноте системы собственных и присоединенных векторов операторного пучка. ДАН СССР, 183, 4, 1968.

Поступила 10 февраля 1970 г