ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ «К ВОПРОСУ О КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ» *

П. Е. Левин

Нами были установлены необходимые и достаточные условия единственности решения задачи Коши для уравнения

$$P(D_x, D_t) U(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{m} P_k(D_x) D_t^k U(x, t) = 0, \tag{1}$$

где $P(S, \lambda)$ — многочлен с постоянными коэффициентами, $S_k(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} \lambda^{\gamma_{kn}}$ — разложение его корней в окрестности бесконечно удаленной точки, в случае $P_m(S) \not\equiv \mathrm{const}$, $P_m(0) \neq 0$; $a_k = \min |\mathrm{Re}\, a_{k0}| > 0$ в классе функций экспоненциального типа по t

$$\gamma_{k_0} = 0$$

$$|D_x^k U(x, t)| \leqslant CF(x) \exp\{\beta t\}, \tag{2}$$

$k = 0, 1, \ldots, N - 1$; $\beta > 0$; $t \geqslant 0$; $-\infty < x < \infty$; $F(x)$ — непрерывная функция. Эта задача возникла из теоремы 2 работы [1].

---

* См. статью П. Е. Левина в сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 8. Изд-во Харьковск. ун-та, 1969.

Аналогичная задача возникает и для разностного аналога уравнения (1):

$$P(\Delta,\ D_t)\,U(x,\ t) = 0;\ \Delta U(x,\ t) = U(x+1,\ t) - U(x,\ t) \tag{3}$$

в случае $\prod\limits_k \gamma_{k0} = 0$, $A = \min\ \ln|a_{k0}|| > 0$. Исследование ее можно провести по той же схеме, которая была предложена в нашей работе, а именно: для тех корней $S_k(\lambda)$ полинома $P(S,\ \lambda)$, у которых $\gamma_{k0} = 0$, $|\ln|a_{k0}|| = A$, введем функцию

$$g_k(\lambda) = \operatorname{sign}(\ln|a_{k0}|)\ln|1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0}^{-1} a_{kn} \lambda^{\gamma_{kn}}$$

и множество $D_k = \{\lambda : g_k(\lambda) > 0\}$, а также число $\delta = \max \gamma_{k1}$:

I $\delta < 0$; для всех D_k: $\sup\limits_{\lambda \in D_k} \operatorname{Re}\lambda = \infty$

II $\delta < 0$; существует $g_k(\lambda) \leqslant 0$; $(\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0)$

III $\delta = 0$ (существует $S_k(\lambda) = a_{k0}$, $|\ln|a_{k0}|| = A$).

Теорема 1. *Чтобы решение задачи Коши для уравнения (3) в классе (2) с* $F(x) = \exp\{\alpha|x|\}$ *в случаях II или III было единственным, необходимо и достаточно* $\alpha < A$.

Теорема 2. *Для единственности решения задачи Коши для уравнения (3) в случае I в классе (2) с* $F(x) = \exp\{[A + f(|x|)]|x|\}$, *где* $f(|x|) > 0$ — *непрерывная функция, необходимо и достаточно*

$$\inf_{|x| \geqslant 0} f(|x|) = 0.$$

Теорема 3. *Для единственности решения задачи Коши для уравнения (3) в случае II в классе (2) с*

$$F(x) = \exp\left\{A|x| - \int^{|x|} H(t)\,dt\right\},$$

где $H(t) > 0$, *непрерывная, монотонная, стремящаяся к нулю при* $t \to \infty$ *функция, достаточно*

$$\int^{\infty} [H(t)]^{1-\frac{1}{\delta}}\,dt = \infty. \tag{4}$$

В случаях, когда для $g_k(\lambda) \leqslant 0$ удается получить оценки $g_k(\lambda) \leqslant C_k|\lambda|^{\alpha_k}$ $(C_k < 0;\ \alpha_k \leqslant \gamma_{k1})$ и или при $\tau \geqslant \tau_0 > 0$, или при $\tau \leqslant -\tau < 0$ $g_k(\sigma_0 + i\tau)| \leqslant |C_k||\tau|^{\alpha_k}$, справедлив результат теоремы 3 с заменой δ на $\alpha = \max \alpha_k$, причем (4) является также и необходимым условием единственности.

Поступила 18 июня 1969 г.