О ФАКТОРИЗАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ—СТИЛЬТЬЕСА

Н. С. Ландкоф

Пусть $V(t)$ — произвольная вещественная функция ограниченной вариации на всей оси t, равная нулю при $t < 0$. Обозначим $\mathfrak{U}$ класс функций

$$F(w) = \int_0^\infty e^{-2\pi i t w} dV(t), \quad (\operatorname{Im} w \leqslant 0). \tag{1}$$

Далее, пусть a_j $(j = 1, 2, \ldots)$ — нули функции $F(w)$. В силу вещественности $V(t)$ множество нулей $F(w)$ симметрично относительно мнимой оси. В дальнейшем будем нумеровать нули $F(w)$ так, чтобы $a_{2n} = -\bar{a}_{2n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Хорошо известно, что произведение Блашке

$$B(w) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{a_k}\right)\left(1 - \frac{w}{\bar{a}_k}\right)^{-1}$$

сходится.

Мы займемся следующим вопросом: в каких случаях возможно представление

$$F(w) = B(w) F_1(w), \tag{2}$$

где $F_1(w) \in \mathfrak{U}$?

Заметим, что этот вопрос возникает в теории линейных электрических фильтров *.

Следует иметь в виду, что, вообще говоря,

$$B(w) \bar{\in} \mathfrak{U},$$

и, как нам известно, нет достаточно общих условий, гарантирующих включение $B(w) \in \mathfrak{U}$. Именно поэтому доказываемая ниже теорема представляет, возможно, интерес.

---

* Н. С. Ландкоф. К общей теории линейных фильтров. ДАН СССР, 146, № 4 (1962).

Лемма. *Если функция* $F(w)$ *содержит конечное число нулей* a_j ($j = 1, 2, \ldots, 2N$), *то представление* (2) *имеет место.*

Доказательство. Следующее соотношение:

$$\left(1-\frac{w}{\bar{a}_1}\right)\left(1-\frac{w}{a_1}\right)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t w} dg_{a_1}(t) \quad (\operatorname{Im} w \leqslant 0), \tag{3}$$

где

$$g_{a_1}(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{a_1}{\bar{a}_1}\right) e^{2\pi i a_1 t}, & (t \leqslant 0) \\ 1 & (t > 0), \end{cases}$$

легко проверяется прямой подстановкой. Из него и из (1) следует, что

$$F(w)\left(1-\frac{w}{\bar{a}_1}\right)\left(1-\frac{w}{a_1}\right)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i w t} dV_1(t),$$

где

$$V_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t-\tau)\, dg_{a_1}(\tau) =$$

$$= \frac{a_1}{\bar{a}_1} V(t) + \left(1-\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right) 2\pi i a_1 \int_{-\infty}^{0} V(t-\tau)\, e^{2\pi i a_1 \tau} d\tau.$$

При $t > 0$ получаем, что

$$V_1(t) = \frac{a_1}{\bar{a}_1} V(t) + \left(1-\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right) 2\pi i a_1 e^{2\pi i a_1 t} \int_{t}^{\infty} V(\tau)\, e^{-2\pi i a_1 \tau} d\tau,$$

между тем как при $t \leqslant 0$

$$V_1(t) = \left(1-\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right) 2\pi i a_1 e^{2\pi i a_1 t} \int_{0}^{\infty} V(\tau)\, e^{-2\pi i a_1 \tau} d\tau =$$

$$= \left(1-\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right) e^{2\pi i a_1 t} \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi i a_1 \tau} dV(\tau) = 0,$$

ибо a_1 есть корень

$$F(w) = \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi i w \tau} dV(\tau).$$

Следовательно,

$$F(w)\left(1-\frac{w}{\bar{a}_1}\right)\left(1-\frac{w}{a_1}\right)^{-1} = \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi i w t} dV_1(t),$$

и повторяя $2N$ раз это рассуждение, получим

$$F^{(1)}(w) = F(w) \prod_{j=1}^{2N} \left(1-\frac{w}{\bar{a}_j}\right)\left(1-\frac{w}{a_j}\right)^{-1} =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi i t w} dV_{2N}(t),$$

где функции ограниченной вариации $V_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots, 2N)$ определяются рекуррентным соотношением

$$V_n(t) = \begin{cases} \frac{a_n}{\bar{a}_n} V_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{a_n}{\bar{a}_n}\right) 2\pi i a_n e^{2\pi i a_n t} \int\limits_0^\infty V_{n-1}(\tau) e^{-2\pi i a_n \tau} d\tau & (t > 0) \\ 0 & (t \leqslant 0). \end{cases}$$

Заметим, что функции $V_{2n}(t)$ и в частности $V_{2N}(t)$ вещественны. Это следует из принятого нами способа нумерации нулей $F(w)$ и вещественности свертки $g_a \ast g_{-\bar{a}}$. Последняя, как можно показать прямым подсчетом, будет при $t < 0$ даваться формулой

$$2\,\mathrm{Re}\,\frac{\bar{a}}{a} e^{2\pi i a t} - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{a}{a + \bar{a}} e^{2\pi i a t},$$

а при $t > 0$ равна 1.

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть* $a_j = \nu_j - i\mu_j$ $(\mu_j > 0, \ j = 1, 2, \ldots)$ *нули функции* $F(w)$. *Сделаем следующие предположения:*

(i) функция $V(t)$ *абсолютно непрерывна и* $V'(t)$ *имеет ограниченную вариацию на любом конечном интервале* $(0, b)$;

(ii) при некотором $\varkappa > 0$

$$\mu_j \geqslant \varkappa \ln j \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

(iii)

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\frac{\nu_j}{\mu_j}\right)^2 < \infty.$$

Тогда представление (1) имеет место.

Доказательство. Так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, введем последовательность функций ограниченной вариации

$$V_n(t) = \begin{cases} \frac{a_n}{\bar{a}_n} V_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{a_n}{\bar{a}_n}\right) 2\pi i a_n e^{2\pi i a_n t} \int\limits_t^\infty V_{n-1}(\tau) e^{-2\pi i a_n \tau} d\tau & (t > 0) \\ 0 & (t \leqslant 0). \end{cases} \tag{4}$$

$(n = 1, 2, \ldots; \ V_0(t) = V(t))$ и докажем ее компактность.

Будем считать, что $V(t) = 0$ при $t < \eta$ $(\eta > 0)$. Если это не так, то вместо $F(w)$ можем рассмотреть $e^{-i\eta w} F(w)$, что не повлияет на условия (i), (ii), (iii).

Положив

$$F^{(n)}(w) = F(w) \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{w}{\bar{a}_j}\right)\left(1 - \frac{w}{a_j}\right)^{-1},$$

из доказательства леммы усматриваем, что

$$F^{(n-1)}(w) = \int\limits_0^\infty e^{-2\pi i t w} dV_{n-1}(t).$$

Следовательно,

$$F^{(n-1)}(a_n) = \int\limits_0^\infty e^{-2\pi i t a_n} dV_{n-1}(t) = 0,$$

и из формулы (4) следует, что при всех n и $t < \eta$ $V_n(t) = 0$. Из этой же формулы можно без труда заключить, что если условие (i) выполнено для

$V_{n-1}(t)$, то оно выполняется и для $V_n(t)$. Следовательно, оно имеет место для всех $V_n(t)$.

Оценим теперь полную вариацию $V_n(t)$ на всей оси, которую будем обозначать $\operatorname{var} V_n$. Перепишем (4) при $t > 0$ в форме

$$V_n(t) = 2\pi i a_n e^{2\pi i a_n t} \int_t^\infty V_{n-1}(\tau) e^{-2\pi i a_n \tau} d\tau +$$

$$+ \frac{a_n}{\bar{a}_n} 2\pi i a_n e^{2\pi i a_n t} \int_t^\infty \{V_{n-1}(t) - V_{n-1}(\tau)\} e^{-2\pi i a_n \tau} d\tau =$$

$$= V_n^{(1)}(t) + V_n^{(2)}(t).$$

Функция $V_n^{(1)}(t)$ абсолютно непрерывна и

$$\operatorname{var} V_n^{(1)} = \int_0^\infty \left| \frac{dV_n^{(1)}}{dt} \right| dt.$$

Но

$$\frac{dV_n^{(1)}}{dt} = (2\pi i a_n)^2 e^{2\pi i a_n t} \int_t^\infty V_{n-1}(\tau) e^{-2\pi i a_n \tau} d\tau - 2\pi i a_n V_{n-1}(t) =$$

$$= (2\pi i a_n)^2 e^{2\pi i a_n t} \int_t^\infty \{V_{n-1}(\tau) - V_{n-1}(t)\} e^{-2\pi i a_n \tau} d\tau,$$

или, интегрируя по частям:

$$\frac{dV_n^{(1)}}{dt} = 2\pi i a_n e^{2\pi i a_n t} \int_t^\infty e^{-2\pi i a_n \tau} dV_{n-1}(\tau) = 2\pi i a_n \int_t^\infty e^{2\pi i a_n (t-\tau)} dV_{n-1}(\tau). \tag{5}$$

Поэтому

$$\operatorname{var} V_n^{(1)} = 2\pi |a_n| \int_0^\infty dt \left| \int_t^\infty e^{2\pi i a_n (t-\tau)} dV_{n-1}(\tau) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi |a_n| \int_0^\infty dt \int_t^\infty e^{2\pi \mu_n (t-\tau)} |dV_{n-1}(\tau)| =$$

$$= 2\pi |a_n| \int_0^\infty |dV_{n-1}(\tau)| \int_0^\tau e^{2\pi \mu_n (t-\tau)} dt =$$

$$= \frac{|a_n|}{\mu_n} \int_0^\infty (1 - e^{-2\pi \mu_n \tau}) |dV_{n-1}(\tau)| < \frac{|a_n|}{\mu_n} \operatorname{var} V_{n-1}.$$

Функцию $V_n^{(2)}(t)$ преобразуем также, интегрируя по частям:

$$V_n^{(2)}(t) = -\frac{a_n}{\bar{a}_n} \int_t^\infty e^{2\pi i a_n (t-\tau)} dV_{n-1}(\tau) = -\frac{a_n}{\bar{a}_n} \int_0^\infty e^{-2\pi i a_n \tau} dV_{n-1}(t+\tau).$$

Пусть точки $0 < t_1 < \cdots < t_r = B$ образуют какое-либо разбиение интервала $(0, B)$. Тогда

$$V_n^{(2)}(t_k) - V_n^{(2)}(t_{k-1}) = -\frac{a_n}{\bar{a}_n} \int_0^\infty e^{-2\pi i a_n \tau} d\{V_{n-1}(t_k + \tau) - V_{n-1}(t_{k-1} + \tau)\}.$$

В силу (i) комплексная функция $V_{n-1}(t)$ распадается не более чем на четыре вещественные выпуклые убывающие компоненты:

$$V_{n-1}(t) = v_{n-1}^{(1)}(t) - v_{n-1}^{(2)}(t) + iv_{n-1}^{(3)}(t) - iv_{n-1}^{(4)}(t).$$

Для того, чтобы не загромождать обозначений, будем вести выкладку, считая, что $V_{n-1}(t)$ заменена одной из этих компонент. Полученную оценку для $\operatorname{var} V_n^{(2)}$ нужно будет в конце умножить на 4. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |V_n^{(2)}(t_k) - V_n^{(2)}(t_{k-1})| \leqslant \int_0^\infty e^{-2\pi\mu_n\tau} d\{V_{n-1}(\tau + B) - V_{n-1}(\tau)\},$$

так что

$$\operatorname*{var}_{(0,\,B)} V_n^{(2)} \leqslant -\int_0^\infty e^{-2\pi\mu_n\tau} dV_{n-1}(\tau) + e^{2\pi\mu_n B}\int_B^\infty e^{-2\pi\mu_n\tau} dV_{n-1}(\tau) <$$

$$< -\int_0^\infty e^{-2\pi\mu_n\tau} dV_{n-1}(\tau). \tag{6}$$

Но

$$0 < -\int_0^\infty e^{-2\pi\mu_n\tau} dV_{n-1}(\tau) = -\int_\eta^\infty e^{-2\pi\mu_n\tau} dV_{n-1}(\tau) \leqslant e^{-2\pi\mu_n\tau} \operatorname{var} V_{n-1},$$

так что

$$\operatorname{var} V_n^{(2)} \leqslant 4e^{-2\pi\mu_n\eta} \operatorname{var} V_{n-1},$$

и окончательно

$$\operatorname{var} V_n \leqslant \left(\frac{|a_n|}{\mu_n} + 4e^{-2\pi\mu_n\eta}\right) \operatorname{var} V_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{|a_k|}{\mu_k} + 4e^{-2\pi\mu_k\eta}\right) \operatorname{var} V.$$

Покажем, что из условий (ii) и (iii) вытекает сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|a_k|}{\mu_k} + 4e^{-2\pi\mu_k\eta}\right).$$

Действительно,

$$\frac{|a_k|}{\mu_k} + 4e^{-2\pi\mu_k\eta} = \left(1 + \frac{\nu_k^2}{\mu_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 4e^{-2\pi\mu_k\eta} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\nu_k^2}{\mu_k^2} + O\left(\frac{1}{k^{2\pi\eta\varkappa}}\right),$$

и если выбрать $\eta > \frac{1}{2\pi\varkappa}$, то условие сходимости будет выполнено. Итак,

$$\operatorname{var} V_n \leqslant M \operatorname{var} V \text{ при всех } n.$$

Аналогичным образом убедимся в том, что при $N > N_0(\varepsilon)$

$$\operatorname*{var}_{t>N} V_n < \varepsilon. \tag{7}$$

Действительно, принимая во внимание (5), получим, как и выше,

$$\operatorname*{var}_{t>N} V_n^{(1)} = \int_N^\infty \left|\frac{dV_n^{(1)}}{dt}\right| dt < \frac{|a_n|}{\mu_n} \operatorname*{var}_{t>N} V_{n-1},$$

в то время как (ср. (6); запись — для одной из убывающих компонент)

$$\operatorname*{var}_{(N,\,B)} V_n^{(2)} \leqslant -\int\limits_0^{\infty} e^{-2\pi\mu_n\tau} dV_{n-1}(\tau+N) =$$

$$= -e^{2\pi\mu_n N}\int\limits_N^{\infty} e^{-2\pi\mu_n\tau} dV_{n-1}(\tau) \leqslant \operatorname*{var}_{t>N} V_{n-1}.$$

Поэтому, как и выше,

$$\operatorname*{var}_{t>N} V_n \leqslant M \operatorname*{var}_{t>N} V,$$

откуда вытекает (7).

Итак, семейство $\{V_n(t)\}$ компактно. Это позволяет в равенстве

$$e^{-i\tau_n\omega}F(\omega)\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{\omega}{\bar{a}_j}\right)\left(1-\frac{\omega}{a_j}\right)^{-1} = \int\limits_{\eta}^{\infty} e^{-2\pi i t\omega} dV_n(t)$$

сделать предельный переход по некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$, что приводит к формуле

$$F_1(\omega) = F(\omega)\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega}{\bar{a}_j}\right)\left(1-\frac{\omega}{a_j}\right)^{-1} = \int\limits_0^{\infty} e^{-2\pi i t\omega} dW(t),$$

где $W(t)$ — функция ограниченной вариации на полуоси $(0, \infty)$. Заметим, что в силу единственности функции $F_1(\omega)$ предельная функция $W(t)$ также единственна, и поэтому выбор подпоследовательности $\{n_k\}$ по существу не нужен. Это позволяет делать предельный переход по последовательности четных номеров $n = 2m$, откуда видна вещественность предельной функции $W(t)$. Теорема доказана.

Поступила 25 мая 1969 г.