О ХАРАКТЕРИСТИКАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕВЫХ ТОЧЕК ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Л. И. Ронкин

Распределение корней целой функции $f(w)$ одного комплексного переменного w часто характеризуется с помощью функции $n_f(t)$, равной числу корней (с учетом кратности) функции $f(w)$ в круге $|w| \leqslant t$.

Для целых функций n переменных $(n > 1)$ аналоги функции $n_f(t)$ рассматривались Кнезером [1], Лелоном [2], Штоллем [3], Ронкиным [4, 5]. Покажем, что функции, рассматривавшиеся Лелоном и Кнезером, тождественны друг другу и, в отличие от случая $n = 1$, непрерывны.

Пусть $f(z)$ — целая функция в C^n. Обозначим через P_{n-1} пространство, точками которого являются комплексные лучи:

$$\varkappa = \{z;\ z = (z_1, \ldots, z_n), z_i = w\lambda_i,\ w \in C^1\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ определяет луч $\varkappa$. Обозначим также через $f(w; \varkappa)$, где $w \in C^1$, сужение функции $f(z)$ на луче $\varkappa$. Если $\lambda \in C^n$ определяет $\varkappa$, то

$$f(w;\ \varkappa) = f\left(\frac{w\lambda}{|\lambda|}\right), \tag{1}$$

где $|\lambda| = \sqrt{|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2}$. Через $n_f(t; \varkappa)$ обозначим число корней (с учетом кратности) функции $f(w; \varkappa)$ в круге $|w| \leqslant t$. Используя (1), функцию $n_f(t; \varkappa)$ можно определить как число корней соответствующей функции $f(w\lambda)$ в круге $|w| \leqslant \frac{t}{|\lambda|}$. Заметим, что при $f(0) \neq 0$ функция $n_f(t; \varkappa)$ при любом фиксированном t является ограниченной на P_{n-1}. Действительно, если $\varkappa_j \to \varkappa_0^*$ при $j \to \infty$, то в каждом круге $|w| \leqslant t$ последовательность $f(w; \varkappa_j)$ равномерно сходится к функции $f(w; \varkappa_0) \not\equiv 0$, и поэтому равенство

$$\lim_{j \to \infty} n_f(t;\ \varkappa_j) = \infty$$

противоречит теореме Гурвица о числе корней предельной функции.

Скорость роста функции $n_f(t; \varkappa)$ характеризует, очевидно, густоту расположения нулевых точек функции на луче. Чтобы охарактеризовать распределение нулевых точек рассматриваемой функции во всем пространстве C^n, возьмем, следуя Кнезеру [1] (см. также [3], [5]), усреднение функции $n_f(t; \varkappa)$ по всему пространству P_{n-1}, т. е. положим

$$n_f(t) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{P_{n-1}} f(w;\ \varkappa)\, dW_{2n-2},$$

где dW_{2n-2} — элемент объема в пространстве P_{n-1}, который при $\lambda_n = 1$ определяется равенством

$$dW_{2n-2} = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \frac{d\lambda_1 \wedge d\bar{\lambda}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{\lambda}_{n-1}}{(1 + |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_{n-1}|^2)^n},$$

а

$$W_{2n-2} = \int\limits_{P_{n-1}} dW_{2n-2}.$$

Теорема 1. *Для любой целой функции $f(z)$ в C^n функция $n_f(t)$ является непрерывной.*

---

* Окрестности лучей $\varkappa$ в P_{n-1} строятся естественным образом по окрестностям в C^n, определяющих их точек λ.

Доказательство. Рассматриваемая теорема, очевидно, будет доказана, если мы покажем, что при любом $t > 0$

$$\int\limits_{P_{n-1}} l(t;\ \varkappa)\, dW_{2n-2} = 0, \tag{2}$$

где $l(t;\ \varkappa)$ — число корней функции $f(w;\ \varkappa)$ на окружности $|w| = t$. В свою очередь, равенство (2) справедливо тогда и только тогда, когда множество $A_t = \chi_f \cap \{z;\ |z| = t\}$, где $\chi_f = \{z;\ f(z) = 0\}$, имеет на сфере $S_t = \{z;\ |z| = t\}$ нулевую $(2n-2)$-мерную меру Лебега. Предположим, что это не так. Тогда на сфере S_t существует обыкновенная точка z^0* множества χ_f, в любой окрестности которой на S_t пересечение $S_t \cap \chi_f$ имеет положительную $(2n-2)$-мерную меру Лебега. Так как z^0 — обыкновенная точка множества χ_f, то в некоторой окрестности V_{z^0} в C^n этой точки множество χ_f представляется в виде

$$\chi_f \cap V_{z^0} = \{z;\ z_i = \underset{(i=1,\ 2,\ n)}{\varphi_i(\zeta)},\ \zeta \in C^{n-1},\ |\zeta| < 1\}, \tag{3}$$

где функции $\varphi_i(\zeta)$ — аналитические в шаре $|\zeta| < 1$ и такие, что $z_i^0 = \varphi_i(0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а ранг их якобиевой матрицы равен $n-1$. Из сделанных предположений о множестве $A_t \cap V_{z^0}$ следует, что в шаре $|\zeta| < 1$ множество A' тех точек ζ, в которых

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\zeta)\, \overline{\varphi_i}(\zeta) = 1,$$

имеет положительную $(2n-2)$-мерную меру Лебега. Положительную меру Лебега будет иметь также и множество A'' точек плотности множества A'. В каждой точке $\zeta \in A''$ производные функции $\varphi_i(\zeta)$, очевидно, могут быть вычислены по значениям этих функций лишь на множестве A'. Поэтому в каждой точке множества A'' имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial \overline{\zeta}_j} = 0,\ j = 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Ранг якобиевой матрицы функций $\varphi_i(\zeta)$ равен $n-1$. Не нарушая общности, можно считать, что в шаре $|\zeta| < 1$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \zeta_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \zeta_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

и, следовательно, уравнения (4) разрешимы относительно функций $\varphi_1\varphi_n^{-1}, \ldots, \varphi_{n-1}\varphi_n^{-1}$. Обозначив $\varphi_i\varphi_n^{-1} = \psi_i$ и решив систему (4), получим, что на множестве A'' $\psi_i(\zeta) = \overline{F}_i(\zeta)$, где $F_i(\zeta)$ — некоторые функции, аналитические в шаре $|\zeta| < 1$. Из равенства $\psi_i(\zeta) = \overline{F}_i(\zeta)$, $\zeta \in A''$ следует, что на множестве A'' $\operatorname{Re}\psi_i(\zeta) = \operatorname{Re} F(\zeta)$. Вновь используя то обстоятельство, что производные рассматриваемых функций могут быть вычислены по их значениям в точках множества A'', а также то, что плюригармонические функции $\operatorname{Re}\psi_i$ и $\operatorname{Re} F_i$ являются аналитическими функциями вещественных переменных $\operatorname{Re}\zeta_j$, $\operatorname{Im}\zeta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, заключаем, что равенство $\operatorname{Re}\psi_i(\zeta) = \operatorname{Re} F_i(\zeta)$ имеет место всюду в шаре $|\zeta| < 1$. Следовательно, $\operatorname{Im}\psi_i(\zeta) = \operatorname{Im} F_i(\zeta) + \mathrm{const}$. Но на A'' $\psi_i(\zeta) = \overline{F}_i(\zeta)$, и значит, в шаре

* Об обыкновенных точках аналитических множеств см. [6, 7].

$|\zeta| < 1$ $\operatorname{Im}\psi_i(\zeta) \equiv \mathrm{const}$, откуда немедленно следует, что в рассматриваемом шаре функции $\psi_i(\zeta) \equiv \mathrm{const}$. Таким образом, при некоторых константах $c_1, \ldots, c_{n-1}$ имеют место равенства

$$\varphi_i(\zeta) = c_i \varphi_n(\zeta) \ \forall \zeta \in \{\zeta;\ |\zeta| < 1\},\ i = 1, \ldots n-1.$$

Отсюда, используя (3), получаем, что $|\varphi_n(\zeta)| \equiv \mathrm{const}$, и значит, функция $\varphi_n(\zeta)$, как и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, также тождественна некоторой постоянной, что приводит к очевидному противоречию со сделанными относительно этих функций предположениями. Теорема доказана.

Характеристика распределения нулевых точек целых функций многих переменных, введенная Лелоном, строится способом, отличным от способа построения функции $n_f(t)$. Именно такой характеристикой Лелон объявляет функцию

$$\nu_f(t) = (2n-2)\frac{\mu_f(t)}{t^{2n-2}},$$

где $\mu_f(t)$ — ассоциированная по Риссу субгармонической функции $\ln|f(z)|$ мера шара $\{z;\ |z| \leqslant t\}$, т. е.

$$\mu_f(t) = \frac{(n-1)!}{2(2n-2)\pi^n}\int\limits_{|z|<t} \Delta \ln|f(z)|\, dV_{2n}.$$

Здесь, как обычно,

$$\Delta = 4\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i},$$

а dV_{2n} — элемент объема в пространстве C^n. При этом, конечно, функция $\ln|f(z)|$ рассматривается как обобщенная.

Теорема 2. *Для любой целой функции $f(z)$ имеет место равенство*

$$n_f(t) = \nu_f(t).$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма

Лемма 1. *Пусть $\varphi(w)$ — целая функция в C^1. Тогда*

$$n_\varphi(t) = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{|w|\leqslant t} \Delta \ln|\varphi(w)|\, dw \wedge d\bar{w}.$$

Это утверждение, вытекающее из того, что $\Delta \ln|w| = 2\pi\delta(w)$, является хорошо известным, и поэтому мы приводим его здесь без доказательства.

Наряду с леммой 1 нами будет использована

Лемма 2. *Для любой дважды непрерывно дифференцируемой в C^n функции $u(z)$ имеет место равенство*

$$4\int\limits_{|z|<t} \alpha \wedge \beta^{n-1} = \frac{1}{t^{2n-2}}\int\limits_{|z|<t} \Delta u\, dV_{2n},$$

где

$$\alpha = \frac{i}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} dz_p \wedge d\bar{z}_q,$$

а

$$\beta = \frac{i}{2}\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial^2 \ln \sum\limits_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} dz_p \wedge d\bar{z}_q.$$

Эта лемма является частным случаем утверждения, содержащегося в [8] (Lelong), и потому, как и лемма 1, приводится здесь без доказательства.

Пусть $f(z)$ — функция, данная в условии теоремы 2. Тогда функция $\ln|f(z)|$ — плюрисубгармоническая в C^n, и значит, ее можно представить в виде

$$\ln|f(z)| = \lim_{m\to\infty} u_m(z),$$

где $u_m(z)$ — монотонно убывающая последовательность бесконечно дифференцируемых плюрисубгармонических функций. В силу известных* свойств положительных обобщенных функций и интегралов от них для тех $\lambda \in C^n$ и $t > 0$, для которых $f(w\lambda) \neq 0$ при $|w| = \frac{t}{|\lambda|}$, имеем

$$\int\limits_{|w|<\frac{t}{|\lambda|}} \Delta_w \ln|f(w\lambda)|\,dV_2 = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{|w|<\frac{t}{|\lambda|}} \Delta_w u_m(w\lambda)\,dV_2. \tag{5}$$

При доказательстве непрерывности функции $n_f(t)$ было показано, что множество тех точек $\varkappa \in P_{n-1}$, в которых $n_f(t;\ \varkappa) - n_f(t-0;\ \varkappa) > 0$, имеет в P_{n-1} нулевую меру. Поэтому при $\lambda_n = 1$ равенство (5) может не выполняться лишь на множестве, имеющем в C^{n-1} нулевую меру Лебега. Заметим также, что, как нетрудно видеть, интегралы, стоящие в правой части этого равенства, при любом фиксированном t равномерно ограничены на каждом компакте $K \subset C^{n-1}$, не содержащем начала координат. Учитывая эти замечания, лемму 1, равенство (5) и задавая лучи $\varkappa$ посредством точек λ с $\lambda_n = 1$, получаем, что

$$n_f(t) = \frac{1}{W_{2n-2}} \int\limits_{P_{n-1}} n_f(t;\ \varkappa)\, dW_{2n-2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi W_{2n-2}} \int\limits_{P_{n-1}} \Bigg(\int\limits_{|w|<\frac{t}{|\lambda|}} \Delta_w \ln|f(w\lambda)|\,dV_2 \Bigg) dW_{2n-2} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{i}{2}\right)^n}{\pi W_{2n-2}} \lim_{m\to\infty} \int\limits_{C^{n-1}_{(\lambda)}} \int\limits_{|w|<\frac{t}{|\lambda|}} \frac{\partial^2 u_m(w\lambda)}{\partial w\,\partial\bar{w}}\, \frac{dw\wedge d\bar{w}\wedge\cdots\wedge d\bar{\lambda}_{n-1}}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{n-1}|\lambda_j|^2\right)^n} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{i}{2}\right)^n}{\pi W_{2n-2}} \lim_{m\to\infty} \int\limits_{C^{n-1}_{(\lambda)}} \int\limits_{|w|<\frac{t}{|\lambda|}} \frac{\sum\limits_{p,\,q=1}^{n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial z_p\,\partial\bar{z}_q}\lambda_p\bar{\lambda}_q}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{n-1}|\lambda_j|^2\right)^n}\, dw\wedge\cdots\wedge d\bar{\lambda}_{n-1}. \tag{6}$$

В последнем интеграле произведем замену переменных:

$$z_1 = w\lambda_1,\ \ldots,\ z_{n-1} = w\lambda_{n-1},\ z_n = w.$$

После некоторых элементарных преобразований получим

$$n_f(t) = \frac{2\left(\frac{i}{2}\right)^n}{\pi W_{2n-2}} \lim_{m\to\infty} \int\limits_{|z|<t} \frac{\sum\limits_{p,\,q=1}^{n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial z_p\,\partial\bar{z}_q} z_p\bar{z}_q}{|z|^{2n}}\, dz_1\wedge d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_n.$$

* См., например, [9].

В свою очередь, последний интеграл преобразуется к виду

$$\left(\frac{2}{i}\right)^n \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{|z|<t} \alpha \wedge \beta^{n-1},$$

где дифференциальные формы α и β те же, что и в лемме 2. Действительно,

$$\left(\frac{2}{i}\right)^n \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{|z|<t} \alpha \wedge \beta^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{|z|<t} \frac{2}{i} \alpha \wedge \left\{ \sum_{p,\,q=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} \ln \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j \, dz_p \wedge d\bar{z}_q \right\}^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{|z|<t} \left\{ \sum_{p,\,q=1}^{n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} dz_p \wedge d\bar{z}_q \right\} \wedge \tag{7}$$

$$\wedge \left\{ \frac{1}{|z|^2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j - \frac{1}{|z|^4} \sum_{p,\,q=1}^{n} \bar{z}_p z_q \quad dz_p \wedge d\bar{z}_q \right\}^{n-1} =$$

$$= \int\limits_{|z|<t} \frac{1}{|z|^{2n}} \sum_{p,\,q=1}^{n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} z_p \bar{z}_q dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n.$$

Далее, согласно лемме 2, имеем

$$\frac{1}{t^{2n-2}} \int\limits_{|z|<t} \Delta u_m \, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n =$$

$$= \frac{4}{(n-1)!} \int\limits_{|z|<t} \left\{ \sum_{p,\,q=1}^{n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} dz_p \wedge d\bar{z}_q \right\} \wedge \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} \ln \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j \, dz_p \wedge d\bar{z}_q \right\}^{n-1}. \tag{8}$$

Из (6), (7) и (8) немедленно следует, что

$$n_f(t) = \frac{1}{2\pi W_{2n-2}} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{t^{2n-2}} \int\limits_{|z|<t} \Delta u_m \, dV_{2n}.$$

Но

$$\frac{2(2n-2)\pi^n}{(u-1)!} \mu_f(t-0) \leqslant \lim_{m\to\infty} \int\limits_{|z|<t} \Delta u_m \, dV_{2n} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|z|\leqslant t} \Delta \ln |f| \, dV_{2n} = \frac{2(2n-2)\pi^n}{(n-1)!} \mu_f(t),$$

и поскольку функции $n_f(t)$ и $\mu_f(t)$ монотонные, а функция $n_f(t)$ еще и непрерывная, то

$$n_f(t) = \frac{2(2n-2)\pi^n}{(n-1)!\, 2\pi W_{2n-2}} \frac{\mu_f(t)}{t^{2n-2}} = (2n-2) \frac{\mu_f(t)}{t^{2n-2}} = \nu_f(t).$$

Теорема доказана.

Примечание. Теорема 2, очевидно, справедлива и тогда, когда функция $f(z)$ — не целая, а аналитическая в шаре $|z| < r$ с $r > t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kneser H. Zur Theorie der gebrochenen Functionen mehrerer Veränderlicher. Jahresbericht der Deutscen Math. Vereiningung, 48 (1938), 1—28.
2. Lelong P. Fonctions entieres (n variables) et fonctions plurisousharmonigues d'ordre fini dans C^n. J. d'Analyse, 12 (1965), 365—407.
3. Stoll W. Ganze Functionen endlicher ordnung mit gegebenen Nullstellen flächen. Math. Zeit schrift, 57 (1953), 211—237.
4. Л. И. Ронкин. Об аналоге канонического произведения Вейерштрасса для целых функций многих комплексных переменных. ДАН СССР, 175. № 4 (1967), 767—770.
5. Л. И. Ронкин. Об аналоге канонического произведения для целых функций многих переменных. Труды Московск. матем. о-ва. 18 (1968), 105—146.
6. Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, М., 1962.
7. М. Эрве. Функции многих комплексных переменных. Изд-во «Мир», М., 1965.
8. Lelong P. Integration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. Fr., 85, (1957), 239—262.
9. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. Изд-во «Наука», М., 1966.

Поступила 27 мая 1969 г.