ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Е. Я. Хруслов

Выделим в трехмерном пространстве R_3 замкнутое множество $F^{(n)}$ и рассмотрим в области $R_3 \setminus F^{(n)}$ краевую задачу

$$\Delta u^{(n)}(x) = f(x) \quad x \in R_3 \setminus F^{(n)}, \tag{1}$$

$$u^{(n)}(x) = 0 \quad x \in \partial (R_3 \setminus F^{(n)}), \tag{2}$$

$$u^{(n)}(x) \to 0 \quad x \to \infty, \tag{3}$$

где функция $f(x) \in L_2(R_3)$ и финитна, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Лапласа, в котором производные следует понимать как обобщенные $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in R_3$. Будем предполагать, что множество $F^{(n)}$ — регулярно относительно задачи Дирихле в области $R_3 \setminus F^{(n)}$. Тогда решение задачи (1) — (2) — (3), как известно, непрерывно на $R_3 \setminus F^{(n)}$ и, доопределяя его нулем на множестве $F^{(n)}$, получим непрерывную во всем пространстве функцию $u^{(n)}(x)$. В дальнейшем всюду через $u^{(n)}(x)$ будем обозначать решение задачи (1)—(2)—(3), продолженное нулем на $F^{(n)}$.

Рассмотрим некоторую последовательность множеств $F^{(n)}$ $(n \to \infty)$ и соответствующую последовательность функций $u^{(n)}(x)$. В работе [1] была установлена следующая

Теорема 1. *Пусть при $n \to \infty$ в каждой точке $x \in R_3$ выполняется такое условие:*

$$\lim_{\rho \to 0} \varliminf_{n \to \infty} \frac{C^{(n)}(x, \rho)}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} = \lim_{\rho \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{C^{(n)}(x, \rho)}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} = c(x), \tag{*}$$

где $C^{(n)}(x, \rho)$ — ньютонова емкость множества $F^{(n)} \cap \overline{K(x, \rho)}$, а $K(x, \rho)$ — открытый шар радиуса ρ с центром в точке x; $c(x)$ — непрерывная в R_3 функция.

Тогда в любой ограниченной области $\Omega \subset R_3$ последовательность $u^{(n)}(x)$ сходится в метрике $L_2(\Omega)$ к функции $v(x)$, стремящейся к нулю при $x \to \infty$ и удовлетворяющей всюду в R_3 уравнению

$$\Delta v(x) - c(x) v(x) = f(x), \tag{4'}$$

где $f(x)$ — та же функция, что и в уравнении (1).

Таким образом, условие (*) является достаточным для сходимости последовательности функций $u^{(n)}(x)$ к функции $v(x)$, удовлетворяющей в R_3 уравнению (4′). Другого вида достаточные условия устанавливались также в работе [2].

В данной заметке мы покажем, что условие (*) является также и необходимым. При этом рассмотрим несколько более общую ситуацию, охватывающую сразу теоремы 1 и 3 работы [1].

Прежде чем сформулировать основной результат, напомним необходимое нам определение ньютоновой емкости множества.

Емкостью компакта $K \subset R_3$ называется число

$$C(K) = \max_{\nu} \nu(K) = \max_{\nu} \int_K d\nu(\xi),$$

где максимум берется по множеству мер, сосредоточенных на K, и потенциал которых $U^{\nu}(x)$ всюду не превосходит единицы:

$$U^{\nu}(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\nu(\xi)}{|x - \xi|} \leqslant 1.$$

Оказывается [3], что для любого компакта K существует мера γ, сосредоточенная на K, такая, что

$$C(K) = \gamma(K),$$

и потенциал $U^{\gamma}(x)$ ее всюду не превосходит 1, а в регулярных точках K равен 1. Эта мера называется равновесной мерой компакта.

Емкость $C(G)$ любого борелевского множества определяется так:

$$C(G) = \sup_{K \subset G} C(K),$$

где K — компакт.

Обозначим через $C^{(n)}(x, \rho)$ — ньютонову емкость множества $F^{(n)} \cap \overline{K(x, \rho)}$, где $K(x, \rho)$ — открытый шар радиуса ρ с центром в точке $x \in R_3$, т. е. $C^{(n)}(x, \rho) = C(F^{(n)} \cap \overline{K(x, \rho)})$. Аналогично $C^{(n)}(G) = C(F^{(n)} \cap G)$, где G — произвольное борелевское множество в R_3. Мы будем пользоваться также обозначением

$$\|u\|_{\Omega} = \int_{\Omega} |u(x)|\, dx.$$

Пусть Γ — некоторая замкнутая, дважды непрерывно дифференцируемая поверхность в R_3.

Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta v(x) - C(x) v(x) = f(x) \quad x \in R_3 \setminus \Gamma, \tag{4}$$

$$v_+(x) = v_-(x), \ \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_- = c_\Gamma(x) v(x) \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

$$v(x) \to 0 \qquad x \to \infty, \tag{6}$$

где $c(x)$ — непрерывная и неотрицательная функция в R_3; $c_\Gamma(x)$ — удовлетворяет тем же условиям на Γ; знаками $+$ и $-$ отмечены предельные значения функций с разных сторон поверхности Γ, нормаль n направлена в сторону, отмеченную знаком $+$; $f(x)$ — та же функция, что и в уравнении (1).

Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $\{u^{(n)}(x)\}$ — последовательность решений задачи (1)—(2)—(3) (продолженных нулем на $F^{(n)}$), а $v(x)$ — решение задачи (4)—(5)—(6). Тогда следующие условия I и II эквивалентны:*

I. Для любой функции $f(x)$ и любой ограниченной области $\Omega \subset R_3$

$$\| u^{(n)} - v \|_\Omega \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

II. Для любой точки $\xi \in \Gamma$ и любой точки $x \in R_3 \setminus \Gamma$:

а) $\displaystyle \lim_{\rho \to 0} \varliminf_{n \to \infty} \frac{C^{(n)}(\xi, \rho)}{\pi \rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{C^{(n)}(\xi, \rho)}{\pi\rho^2} = c_\Gamma(\xi);$

б) $\displaystyle \lim_{\rho \to 0} \varliminf_{n \to \infty} \frac{C^{(n)}(x, \rho)}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} = \lim_{\rho \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{C^{(n)}(x, \rho)}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} = c(x).$

Импликация $II \Rightarrow I$ была фактически доказана в работе [1]. Здесь мы докажем, что $I \Rightarrow II$. Но это просто вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 1. *Пусть в уравнении (1) $f(x) \leqslant 0$ и последовательность $\{u^{(n)}(x)\}$ при $n \to \infty$ сходится к некоторой функции $w(x)$, так что для любой ограниченной области $\Omega \subset R_3$*

$$\| u^{(n)} - w \|_\Omega \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда почти всюду

$$w(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{|f(\xi)|}{|x - \xi|} d\xi - \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x - \xi|}, \tag{7}$$

где мера μ для любого замкнутого множества $T \subset R_3$ удовлетворяет неравенству

$$\mu(T) \geqslant \inf_{x \in T} w(x) \varlimsup_{n \to \infty} C^{(n)}(T). \tag{8}$$

Лемма 2. *Если выполнены условия леммы 1 и, кроме того, $w(x)$ — непрерывная функция, то равенство (7) имеет место всюду, и для любого открытого множества E не пересекающееся с множеством $O_w = \{x \in R_3;\ w(x) = 0\}$*

$$\mu(E) \leqslant \sup_{x \in E} w(x) \varliminf_{n \to \infty} C^{(n)}(E)(1 + \varepsilon(E)). \tag{9}$$

При этом $\varepsilon(E) > 0$ и $\varepsilon(E) \to 0$, когда диаметр E стремится к нулю, а само E находится в любой ограниченной области, лежащей на положительном расстоянии от множества O_w.

Покажем сначала, как из этих лемм вытекает утверждение теоремы (I $\Rightarrow$ II). Поскольку в условии I теоремы функция $f(x)$ — произвольна, выберем $f(x) \leqslant 0$ $(f(x) \neq 0)$. Тогда решение задачи (4)—(5)—(6) $v(x)$ непрерывно, и, пользуясь принципом максимума и неотрицательностью функций $c(x)$ и $c_\Gamma(x)$, нетрудно показать, что оно всюду положительно. Кроме того, с помощью формулы Грина его можно представить в виде

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{|f(\xi)|}{|x - \xi|} d\xi - \frac{1}{4\pi} \int \frac{c(\xi)\, v(\xi)}{|x - \xi|} d\xi - \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{c_\Gamma(\xi)\, v(\xi)}{|x - \xi|} dS_\xi. \tag{10}$$

Теперь воспользуемся леммами 1 и 2. Пусть x_0 — произвольная точка в R_3. Выберем $E = K(x_0, \rho)$ и $T = \overline{K(x_0, \rho)}$. Так как $c(x)$ и $v(x)$ непрерывны в R_3, а $c_\Gamma(\xi)$ на поверхности Γ, то из условия 1 теоремы, представлений (7) и (10) и неравенств (8) и (9) следует, что при достаточно малых ρ

$$\int\limits_{K(x_0,\rho)} c(\xi)\,v(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\Gamma\cap K(x_0,\rho)} c_\Gamma(\xi)\,v(\xi)\,dS_\xi \geqslant v(x_0)\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,C^{(n)}(x_0,\rho)\,(1+\varepsilon_1(\rho))$$

и

$$\int\limits_{K(x_0,\rho)} c(\xi)\,v(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\Gamma\cap K(x_0,\rho)} c_\Gamma(\xi)\,v(\xi)\,dS_\xi \leqslant v(x_0)\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\,C^{(n)}(x_0,\rho)\,(1+\varepsilon_2(\rho)),$$

где $\varepsilon_1(\rho)$ и $\varepsilon_2(\rho)$ стремятся к нулю при $\rho\to 0$. Отсюда сразу получаем, что для любой точки $x_0\in\Gamma$ выполняется условие а), для любой точки $x_0\notin\Gamma$ — условие б), таким образом, доказано, что $\mathrm{I}\Rightarrow\mathrm{II}$.

Теперь приведем доказательство лемм.

Доказательство леммы 1. Воспользовавшись методом выметания [3], получим представление для решения задачи (1)—(2)—(3). Функция

$$U^f(x) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{|f(\xi)|}{|x-\xi|}\,d\xi$$

удовлетворяет в R_3 уравнению $\Delta U^f(x) = -|f(x)| = f(x)$. Поэтому, выметая меру $|f(\xi)|\,d\xi$, сосредоточенную в области $R_3\setminus F^{(n)}$ на множестве $F^{(n)}$, и оставляя меру $|f(\xi)|\,d\xi$, сосредоточенную на $F^{(n)}$, неизменной, получим на $F^{(n)}$ меру $\mu^{(n)}$, с помощью которой решение задачи (1) — (2) — (3) может быть представлено в виде

$$u^{(n)}(x) = U^f(x) - \frac{1}{4\pi}\int\frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|}.$$

При этом также выполняется условие $u^{(n)}(x) = 0$ при $x\in F^{(n)}$.

Согласно принципу выметания,

$$\int d\mu^{(n)}(\xi) \leqslant \int |f(\xi)|\,d\xi. \tag{11}$$

Из этого неравенства следует, что множество мер $\{\mu^{(n)}\}$ слабо компактно [3], а значит, найдется такая подпоследовательность $\{n_k\}$, что для любой непрерывной и финитной функции $\varphi(x)$

$$\lim_{n=n_k\to\infty}\int\varphi(\xi)\,d\mu^{(n)}(\xi) = \int\varphi(\xi)\,d\mu(\xi),$$

где μ — мера, и в силу (11)

$$\int d\mu(\xi) \leqslant \int |f(\xi)|\,d\xi. \tag{11'}$$

Так как $U^f(x)\geqslant 0$, то, согласно принципу максимума,

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} \leqslant U^f(x),$$

и, значит, для любого ограниченного множества $G\subset R_3$

$$\|u^{(n)}\|_G = \|U^f\|_G - \int R_G(\xi)\,d\mu^{(n)}(\xi) > 0, \tag{12}$$

где

$$R_G(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_G\frac{dx}{|x-\xi|}$$

непрерывная и стремящаяся к нулю на бесконечности функция. Пользуясь слабой сходимостью мер $\mu^{(n)}$ и неравенством (11), устанавливаем, что

$$\lim_{n=n_k\to\infty}\int R_G(\xi)\,d\mu^{(n)}(\xi) = \int R_G(\xi)\,d\mu(\xi). \tag{13}$$

Отсюда в силу (12) следует, что для любого ограниченного $G \subset R_3$

$$\int R_G(\xi)\, d\mu(\xi) \leqslant \| U^f \|_G,$$

и, значит, почти всюду

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|} \leqslant U^f(x).$$

Учитывая это, из (12) и (13) заключаем, что

$$\lim_{n=n_k \to \infty} \| u^{(n)} \|_G = \| u \|_G,$$

где

$$u(x) = U^f(x) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|}.$$

Так как множество G произвольно, то из условия леммы следует, что почти всюду

$$w(x) = u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{|f(\xi)|}{|x-\xi|} d\xi - \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|},$$

и представление (7) доказано.

Теперь докажем неравенство (8). Пусть T — произвольное замкнутое множество в R_3. Построим последовательность замкнутых множеств $\{T_i,$ $i = 1, 2, \ldots\}$ таких, что $T \subset T_i$, $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \ldots$, $T = \bigcap T_i$, а множество T_{i+1} находится на положительном расстоянии от $R_3 \setminus T_i$ для любого i. Будем предполагать, что найдется возрастающая последовательность номеров $n = n'$ таких, что множества $T \cap F^{(n)}$ не пусты (в противном случае неравенство (8) очевидно). Выберем произвольную точку $x \in F^{(n)} \cap T$ и, учитывая, что $u^{(n)}(x) = 0$ при $x \in F^{(n)}$, запишем

$$U^f(x) - \frac{1}{4\pi} \int_{R_3 \setminus T_i} \frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} - \frac{1}{4\pi} \int_{T_i} \frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} \quad x \in T \cap F^{(n)}.$$

Введем непрерывную и неотрицательную в R_3 функцию $\psi_i(x)$, равную 1 на множестве $R_3 \setminus T_i$ и нулю на множестве $T_{i+1} (T_i \supset T_{i+1} \supset T)$ и всюду не превосходящую 1. Тогда в силу положительности мер $\mu^{(n)}$ из предыдущего равенства вытекает

$$\frac{1}{4\pi} \int_{T_i} \frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} \geqslant U^f(x) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\psi_i(\xi)}{|x-\xi|} d\mu^{(n)}(\xi) \quad x \in T \cap F^{(n)}.$$

Так как при $x \in T$ функции $v_i(\xi) = \psi_i(\xi) |\xi - x|^{-1}$ равностепенно непрерывны в R_3 и равномерно стремятся к нулю при $\xi \to \infty$, то из слабой сходимости мер $\mu^{(n)}$ и неравенства (11) получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int_{T_i} \frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} \geqslant U^f(x) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\psi_i(\xi)}{|x-\xi|} d\mu(\xi) + \varepsilon(n), \tag{14}$$

$$x \in T \cap F^{(n)},$$

где $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Учитывая, что функция

$$u_i(x) = U^f(x) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\psi_i(\xi)}{|x-\xi|} d\mu(\xi)$$

непрерывна на множестве T и $0 \leqslant \psi_i(\xi) \leqslant 1$, из представления (7) и неравенства (14) заключаем, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_{T_i} \frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} \geqslant \inf_{x \in T} w(x) + \varepsilon(n), \quad x \in T \cap F^{(n)}.$$

Пусть $\nu^{(n)}$ — произвольная мера, сосредоточенная на $T \cap F^{(n)}$, потенциал которой всюду не больше единицы. Тогда, интегрируя предыдущее неравенство по этой мере, получим

$$\int_{T_i} d\mu^{(n)}(\xi) \geqslant [\inf_{x \in T} w(x) + \varepsilon(n)] \int_T d\nu^{(n)}(\xi),$$

а в силу определения емкости компакта $T \cap F^{(n)}$

$$\int_{T_i} d\mu^{(n)}(\xi) \geqslant [\inf_{x \in T} w(x) + \varepsilon(n)]\, C^{(n)}(T).$$

Так как последовательность мер $\mu^{(n)}$ слабо сходится к мере μ, а множество T_i замкнутое, то [3]

$$\mu(T_i) = \int_{T_i} d\mu(\xi) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{T_i} d\mu^{(n)}(\xi)$$

и, следовательно,

$$\mu(T_i) \geqslant \inf_{x \in T} w(x) \overline{\lim_{n\to\infty}} C^{(n)}(T).$$

Поскольку множества T_i выбраны так, что $T = \cap T_i$, то отсюда вытекает неравенство (8), и таким образом, лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. В силу леммы 1 имеем почти всюду

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu(\xi)}{|x - \xi|} = U^f(x) - w(x). \qquad (7')$$

Так как μ — мера, то в левой части равенства стоит супергармоническая функция [3], а в правой части по условию — непрерывная функция. Но если супергармоническая функция почти всюду равна непрерывной функции, то она сама непрерывна, и следовательно, (7′), а вместе с ним и (7), выполняется всюду.

Пусть G — ограниченное открытое множество из R_3, находящееся на положительном расстоянии от множества $O_w = \{x \in R_3,\ w(x) = 0\}$. Тогда при $x \in G$

$$w(x) \geqslant \alpha > 0. \qquad (15)$$

Рассмотрим произвольное открытое множество $E \subset G$. Будем предполагать, что множество $F^{(n)} \cap E$ не пусто, начиная с некоторого n. В противном случае найдется подпоследовательность $\{n'\}$ такая, что $\mu^{(n')}(E) = 0$. А так как $\mu^{(n)}(E) \geqslant 0$ и $\mu(E) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu^{(n)}(E)$ [3], то, учитывая еще (15), сразу получаем неравенство (9).

Построим последовательность компактов $\{k_i\}$ таких, что $K_i \subset K_{i+1}$, $K_i \subset E$, $E = \cup K_i$ и K_i находится на положительном расстоянии от $R_3 \setminus K_{i+1}$.

Запишем условие $u^{(n)}(x) = 0$ при $x \in K_i \cap F^{(n)}$ в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_{K_i} \frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x - \xi|} = U^f(x) - \frac{1}{4\pi} \int_{R_3 \setminus K_i} \frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x - \xi|} \quad x \in K_i \cap F^{(n)}.$$

Как и выше, введем непрерывные в R_3 функции $\varphi_i(x)$, удовлетворяющие условиям: $0 \leqslant \varphi_i(x) \leqslant 1$, $\varphi_i(x) = 1$ при $x \in R_3 \setminus K_{i+1}$ и $\varphi_i(x) = 0$ при $x \in K_i$. Тогда из предыдущего равенства получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int_{K_i} \frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x - \xi|} \leqslant U^f(x) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varphi_{i+1}(\xi)}{|x - \xi|} d\mu^{(n)}(\xi) \quad x \in K_i \cap F^{(n)}.$$

Поскольку при $x \in K_i$ функции $\varphi_{i+1}(\xi)\,|\,\xi - x\,|^{-1}$ равностепенно непрерывны в R_3 и равномерно стремятся к нулю при $\xi \to \infty$, то отсюда в силу слабой сходимости мер $\mu^{(n)}$ к μ и (11) вытекает, что

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_i}\frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} \leqslant U^f(x) - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\varphi_{i+1}(\xi)}{|x-\xi|}\,d\mu(\xi) + \varepsilon(n), \quad x \in K_i \cap F^{(n)},$$

где $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как $\varphi_{i+1}(x) \geqslant 0$ и $\varphi_{i+1}(x) = 1$ при $x \in R_3 \setminus E$, то из этого неравенства получаем

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_i}\frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} \leqslant U^f(x) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{R_3\setminus E}\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|} + \varepsilon(n) \quad x \in K_i \cap F^{(n)},$$

откуда в силу (7) следует, что

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R_i}\frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} \leqslant \omega(x) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{E}\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|} + \varepsilon(n) \quad x \in K_i \cap F^{(n)}. \tag{16}$$

Введем обозначение

$$\bar{\varepsilon}(E) = \sup_{x \in E}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{E}\frac{d\mu(\xi)}{|x-\xi|}.$$

Тогда из (16) и (15) получаме

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{K_i}\frac{d\mu^{(n)}(\xi)}{|x-\xi|} \leqslant \sup_{x \in E}\omega(x)\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}(E) + \varepsilon(n)}{\alpha}\right) \quad x \in K_i \cap F^{(n)}.$$

Отсюда, как известно (см., например, [1]), следует, что

$$\mu^{(n)}(K_i) \leqslant \sup_{x \in E}\omega(x)\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}(E) + \varepsilon(n)}{\alpha}\right)C^{(n)}(K_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in E}\omega(x)\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}(E) + \varepsilon(n)}{\alpha}\right)C^{(n)}(E).$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем, что

$$\mu^{(n)}(E) \leqslant \sup_{x \in E}\omega(x)\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}(E) + \varepsilon(n)}{\alpha}\right)C^{(n)}(E). \tag{17}$$

Так как E — открытое множество, а $\mu^{(n)}$ слабо сходятся к мере μ, то имеет место неравенство [3]

$$\mu(E) \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty}\mu^{(n)}(E).$$

Отсюда, учитывая (17), получаем неравенство (9), где

$$\varepsilon(E) = \frac{\bar{\varepsilon}(E)}{\alpha}.$$

Нам осталось показать, что $\bar{\varepsilon}(E)$ (а значит, и $\varepsilon(E)$) стремятся к нулю, когда диаметр E стремится к нулю.

Предположим противное. Тогда найдется последовательность множеств $E_i \subset G$ и последовательность точек $x_i \in E_i$ таких, что диаметры E_i стремятся к нулю при $i \to \infty$ и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{E_i}\frac{d\mu(\xi)}{|x_i-\xi|} > \varepsilon.$$

Так как множество G ограничено, то можно выбрать подпоследовательность $\{x_i\}$, которая сходится к некоторой точке $x_0 \in \overline{G} : x_i \to x_0$. Отсюда следует, что для шара $K(x_0, \rho)$ любого радиуса $\rho > 0$, начиная с некоторого номера $i(\rho)$, будет выполняться неравенство

$$\int\limits_{K(x_0, \rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_i - \xi|} > \varepsilon \quad i \geqslant i(\rho). \tag{18}$$

Запишем теперь равенство (7) в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_{K(x_0, \rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x - \xi|} = U^f(x) - w(x) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R_3 \setminus K(x_0, \rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x - \xi|}.$$

Так как по условию леммы функция $w(x)$ — непрерывна, то отсюда легко получаем, что функция

$$R(x, \rho) = \int\limits_{K(x_0, \rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x - \xi|}$$

ограничена и непрерывна во всех внутренних точках шара $K(x_0, \rho)$. Поэтому из (18) следует, что для любого $\rho > 0$

$$R(x_0, \rho) = \int\limits_{K(x_0, \rho)} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0 - \xi|} > \varepsilon. \tag{19}$$

Из ограниченности $R(x, \rho)$ в точке x_0 вытекает, что $\mu(x_0) = 0$, и значит, имеет место равенство

$$R(x_0, \rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_i} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0 - \xi|} < \infty,$$

где

$$\Delta_i = K(x_0, \rho_i) \setminus K(x_0, \rho_{i+1}); \quad \rho_1 = \rho, \ \rho_i \to 0$$

при $i \to \infty$. В силу сходимости ряда

$$R(x_0, \rho_N) = \sum_{i=N}^{\infty} \int\limits_{\Delta_i} \frac{d\mu(\xi)}{|x_0 - \xi|} \to 0 \text{ при } N \to \infty,$$

что противоречит (19). Лемма доказана.

В заключение автор выражает признательность проф. В. А. Марченко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Я. Хруслов. Первая краевая задача в областях со сложной границей. Записки механико-математического факультета ХГУ и ХМО, т. 32, 1966.

2. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. Краевые задачи с мелкозернистой границей. Математический сборник, т. 65 (107), (1964), 458—472.

3. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. Физматгиз. М., 1966.

Поступила 17 июня 1969 г.