ОБ УСЛОВИЯХ МОНОГЕННОСТИ НЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М. Т. Бродович

В статье используются следующие обозначения:

$\mathrm{Fr}(D)$ — граница множества D;

$\mathrm{Int}(D)$ — внутренность множества D;

$C(D)$ — дополнение к множеству D по отношению к плоскости;

$\overline{D}$ — замыкание множества D;

$\mathrm{Ls}B_n$ — верхний топологический предел последовательности множеств B_n;

$\rho(z_1, z_2)$ — расстояние между точками z_1 и z_2, $\rho(z, A) = \inf\limits_{\xi \in A} \rho(z, \xi)$, $\rho(A, B) = \inf\limits_{\xi A, \eta \in B} \rho(\xi, \eta)$;

$[\widehat{t_1 t_2}]$ — величина угла между лучами t_1, t_2, заключенная между 0 и π.

1. В этой работе исследуются условия, достаточные для аналитичности функции комплексного переменного $f(z)$, определенной в области D.

Теорема 1, доказанная в этой работе, примыкает к кругу вопросов, рассматриваемых в [1—3].

Так как теорема, доказанная ниже,— обобщение теоремы Д. Е. Меньшова для случая, когда функция $f(z)$ не предполагается непрерывной, приведем условие K'' Меньшова и его теорему из [2].

Согласно теореме Меньшова, функция $f(z)$, определенная в области D, удовлетворяет условию K'' в точке $z \in D$, если из этой точки выходят три луча $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, лежащие на разных прямых, вдоль которых

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z + \Delta z \in t_i(z)}} \left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| = k(z) < \infty \ (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Теорема Меньшова. *Если функция $f(z)$ непрерывна, однолистна в области D, в каждой точке $z \in D$, исключая, возможно, счетное множество точек, удовлетворяет условию K'', то либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ аналитична в области D.*

Теорема Меньшова без предположения непрерывности функции, вообще говоря, не верна, как показывает следующий пример:

$$f(z) = \begin{cases} z, & z \in D_1 \\ z+1, & z \in D_2, \end{cases}$$

где $D = D_1 \bigcup D_2$ и

$$D_1 = \underset{(x,\, y)}{E}\left(0 < x \leqslant \frac{1}{2},\ 0 < y < 1\right),\quad D_2 = \underset{(x,\, y)}{E}\left(\frac{1}{2} < x < 1,\ 0 < y < 1\right).$$

Введем новое условие K^*. Функция $f(z)$ удовлетворяет условию K^* в точке $z \in D$, если из этой точки выходят три луча $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, не принадлежащие одной полуплоскости, вдоль которых выполняется условие (1).

В этой работе доказана

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ однолистна в области D и в каждой точке $z \in D$ удовлетворяет условию K^*, то либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ аналитична в области D.*

§ 2. ***Лемма 1.*** *Пусть $f(z)$ — функция в области D и β — совершенное множество в D. Из каждой точки $z \in \beta$ выходят три луча $t_i(z)$ $(1 = 1, 2, 3)$, не принадлежащие одной полуплоскости, вдоль которых имеем*

$$\varlimsup_{\substack{\Delta z \to 0 \\ z+\Delta z \in t_i(z)}} \left|\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}\right| < \infty \ (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

тогда существует порция $\beta_0 \subset \beta$, на которой $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица.

Не желая загромождать изложение стандартными рассуждениями, мы будем ссылаться на доказательства лемм 12 и 13 из [3]. Приведем нужную нам формулировку леммы в следующей форме:

Лемма 12. *Пусть $f(z)$ — непрерывная функция в области D и β, $\beta \subset D$ — совершенное множество. Из каждой точки $z \in \beta$ выходят три луча $t_i(z)$, расположенные на разных прямых, вдоль которых имеет место (2).*

Тогда найдутся порция $\beta' \subset \beta$ и число $\sigma > 0$ такие, что из каждой точки $z \in \beta'$ выходят три луча $\tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, обладающие следующими свойствами:

1) $[\tau^i(z')^\wedge\tau_i(z'')] < \sigma$ *для любых* $z', z'' \in \beta'$;

2) $800\sigma < [\tau_i(z)^\wedge\tau_j(z)] < \pi - 800\sigma\, (i \neq j)\, (i, j = 1, 2, 3)$;

3) *расстояние от множества β' до границы области D больше σ;*

4) $\left|\dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\right| < \dfrac{1}{\sigma}$ *для каждой точки $z \in \beta'$ и всех $\xi \in \tau_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |\xi - z| < \sigma$.*

I. Из доказательства леммы 12 следует, что в условиях леммы 1 существует порция $\beta' \subset \beta$, которая содержит всюду плотное на себе множество точек, пусть $\tilde{\beta}$, на котором имеют место выводы 1), 2), 3), 4) леммы 12, для лучей $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$.

II. Повторяя доказательство леммы 13, получаем, что на множестве $\tilde{\beta} \cap \beta_0$, где β_0 порция β, $\beta_0 \subset \beta'$, функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица.

Для доказательства леммы 1 докажем

Утверждение 1. Для каждой точки $z \in \beta_0$ существует последовательность точек $z_n \to z$, $\{z_n\} \subset \beta_0 \cap \tilde{\beta}$ такая, что $f(z_n) \to f(z)$.

Пусть $z \in \beta$ и $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$ — три луча, соответствующие этой точке, согласно условию леммы 1.

Так как $\tilde{\beta} \cap \beta_0$ всюду плотно на β_0, то существует последовательность $\{z_n\}$, $z_n \to z$, $\{z_n\} \subset \tilde{\beta} \cap \beta_0$.

Существует угол $[t_i(z) \hat{} t_j(z)]$ $i \neq j$, $(i, j = 1, 2, 3,)$, пусть $[t_1(z) \hat{} t_2(z)]$, в котором содержится подпоследовательность последовательности $\{z_n\}$ (в противном случае, в силу (2), утверждение 1 очевидно); сохраним для нее обозначение $\{z_n\}$.

Построим углы $\angle Azt_1(z)$ и $\angle Bzt_2(z)$, раствором по 100σ (σ как в лемме 12) и так, чтобы лучи Az и Bz лежали вне угла $[t_1(z) \hat{} t_2(z)]$. Тот из углов, определяемых лучами Az и Bz, который содержит внутри лучи $t_1(z)$ и $t_2(z)$, обозначим $\angle AzB$. Очевидно, $\angle AzB < \pi + 200\sigma$.

Пусть $\tilde{z} \in \tilde{\beta}$, $\tilde{t}_i = t_i(\tilde{z})$ $(i = 1, 2, 3)$. Из I, 2) леммы 12 и того, что лучи $\tilde{t}_i$ не лежат в одной полуплоскости, следует, что они не заключены в секторе раствора $< \pi + 800\sigma$.

Если точку $\tilde{z}$ и лучи $\tilde{t}_i = t_i(\tilde{z})$ $(i = 1, 2, 3)$ параллельно перенести так, чтобы $\tilde{z}$ совпала с z, то один из лучей $\tilde{t}_i$, пусть $\tilde{t}_1$, будет лежать вне угла $\angle AzB$. Построим угол с вершиной в точке z, раствора 2σ, с биссектрисой $\tilde{t}_1$, обозначим его $\angle DzC$. Весь $\angle DzC$ лежит вне $[t_1(z) \hat{} t_2(z)]$. В силу I и 1) леммы 12 направления, лучей $t_1(z_n)$ такие, что лучи того же направления, выходящие из z, попадают в $\angle DzC$. Следовательно, каждый из лучей $t_1(z_n)$ пересекает в некоторой точке z_n' либо $t_1(z)$, либо $t_2(z)$.

Пусть на луче $t_1(z)$ имеем последовательность точек $z_{n_k}' \neq z$, если $z_{n_k}' = z$ доказательство аналогично. Существует k_0 такое, что если $k > k_0$, то $0 < |z_{n_k}' - z_{n_k}| < \sigma$. В силу I и 4) леммы 12 для этих $k > k_0$ имеем $|f(z_{n_k}') - f(z_{n_k})| < \frac{1}{\sigma} |z_{n_k}' - z_{n_k}|$. Так как, в силу (2), $f(z_{n_k}') \to f(z)$ (очевидно, $z_{n_k}' \to z$), $|z_{n_k}' - z_{n_k}| \to 0$, то $f(z_{n_k}) \to f(z)$. Утверждение 1 доказано.

Из II и утверждения 1 легко следует, что для функции $f(z)$ выполняется условие Липшица на порции β_0. Лемма 1 доказана.

§ 3. В условиях теоремы 1 из леммы 1 следует, что в области D существует всюду плотное открытое множество точек, на котором $f(z)$ — гомеоморфизм. На каждой компоненте этого множества в силу теоремы Меньшова либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ — аналитична. Пусть G_1 — открытое множество точек аналитичности функции $f(z)$ в D, G_2 — аналогичное множество для функции $\overline{f(z)}$. Очевидно, $G_1 \cup G_2$ всюду плотно в D. Легко видеть, что замкнутое множество $D - (G_1 \cup G_2) = \beta$ совершенно в D.

Предположим, что $\beta \neq 0$. В соответствии с леммой 1 существует порция $\beta_0 \subset \beta$, определяемая открытым кругом d, $\overline{d} \subset D$, на которой функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица.

По теореме Меньшова на β имеется всюду плотное множество точек разрыва функции $f(z)$. Пусть $z_0 \in \beta_0$ — одна из них.

Цель дальнейших рассуждений — показать, что в наших условиях функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0. Последнее, очевидно, завершит доказательство теоремы 1.

В дальнейшем будем считать функцию $f(z)$ ограниченной в D. В противном случае будем рассматривать функцию $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - f(z^*)}$, где $z^* \in (D - \overline{d}) \cap (G_1 \cup G_2)$.

Итак, $z_0 \in \beta_0$ — точка разрыва функции $f(z)$. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $\delta > 0$ имеем

$$f(\{z : |z - z_0| < \delta\}) \cap \{w : |w - w_0| \geqslant \varepsilon\} \neq 0, \quad w_0 = f(z_0). \tag{3}$$

Пусть $K = \{z : |z - z_0| < \delta\}$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\overline{K} \subset d$; при этом, очевидно, $\overline{K} \cap \beta \subset \beta_0$;

2) $f(\overline{K} \cap \beta) \subset \left\{w : |w - w_0| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, что возможно в силу 1) и того, что $f(z)$ на β_0 удовлетворяет условию Липшица;

3) $\{z : |z - z_0| = \delta\} \cap \beta \neq 0$, что возможно, так как $z_0 \in \beta$ и β — совершенное множество.

Из 2) следует, что $G = f(K) \cap \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ — открытое множество. Пусть G_k — компоненты G. В z-плоскости каждая из областей $f^{-1}(G_k) = D_k$, $D_k \subset K$ принадлежит множеству G_1 либо G_2.

Утверждения §§ 4, 5, 6 нужны для доказательства.

Лемма 2. *Для всякой области D_k и всякой точки $z \in \mathrm{Fr}(D_k) \cap K$ имеет место следующее: $Lsf(z_n) \subset \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ для всякой последовательности $\{z_n\}$, $\{z_n\} \subset D_k$, $z_n \to z$.*

Будем считать, что $D_k \subset G_1$.

§ 4. В этом параграфе приведены некоторые нужные утверждения о границе области D_k.

Утверждение 2. Множество $Fr(D_k) \cap G_1$ всюду плотно на $Fr(D_k)$.

Пусть $z' \in Fr(D_k)$, $\delta_1 > 0$, $K_1 = \{z : |z - z'| < \delta_1\}$, $z_1 \in K_1 \cap D_k$ и $\rho(z' z_1) < \frac{\delta_1}{2}$. Существует $\delta_2 > 0$ такое, что $K_2 = \{z : |z - z_1| < \delta_2\}$ — наибольший круг, для которого $K_2 \cap F_r(D_k) = 0$. Очевидно, $\delta_2 < \frac{\delta_1}{2}$ и $K_2 \subset K_1$. Легко видеть также, что $K_2 \subset D_k$ и на $F_r(K_2)$ имеется точка $z'' \in F_r(D_k)$. Согласно условию K^*, один из лучей $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, пусть $t_1(z'')$ пересечет круг K_2. Очевидно, $f(t_1(z'') \cap K_2) \subset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Так как вдоль луча $t_1(z'')$ выполняется (1), то $f(z'') \subset \left\{w : |w - w_0| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, что вместе с 2) § 3 позволяет заключить, что точка $z'' \in G_1$. Утверждение 2 доказано.

Аналогично получаем

Утверждение 3. Если $\tilde{z} \in F_r(D_k)$ и на одном из лучей $t_i(\tilde{z})$ $(i = 1, 2, 3)$ имеется последовательность точек $z_n \to \tilde{z}$, $\{z_n\} \subset D_k$, то $\tilde{z} \in G_1$.

Утверждение 4. Если $\tilde{z} \in K \cap F_r(D_k) \cap G_1$, то $f(\tilde{z}) \subset \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Для доказательства достаточно заметить, что $f(\tilde{z}) \in F_r(G_k)$, и так как G_k — компонента G, то $f(\tilde{z}) \overline{\in} \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Утверждение 5. Область D_k не имеет внутренней границы, т. е. каждая точка $z \in \mathrm{Fr}(D_k)$ граничная для $IntC(D_k)$.

Достаточно показать, что каждая точка $z \in Fr(D_k) \cap K$ граничная для $\mathrm{Int}\, C(D_k)$. Согласно утверждению 2, существует последовательность точек $z_n \to z$, $\{z_n\} \in K \cap Fr(D_k) \cap G_1$. В силу утверждения 4, каждая точка z_n граничная для $IntC(D_k)$, а значит, таковой является точка z.

Утверждение 6. Область D_k односвязна.

Пусть k — любая компонента множества $Fr(D_k)$, пусть P — любая компонента множества $C(D_k)$; $\{d_p\}$ — совокупность компонент открытого множества $\mathrm{Int}\, C(D_k)$. Очевидно, $\bigcup k = Fr(D_k)$, $\bigcup P = C(D_k)$, $\bigcup d_p = \mathrm{Int}\, C(D_k)$.

Рассмотрим некоторое P. Из $P \cap d_p \neq 0$ следует $\overline{d}_p \subset P$, из $P \cap k \neq 0 \to k \subset P$. Легко видеть, что каждая компонента P содержит только одну компоненту k. Для каждого P имеем $P \cap K \neq 0$. Если предположить, что $P \cap K = 0$ для некоторого P, то $P = \{z : |z - z_0| \geqslant \delta\}$, и если $k \subset P$, то $k = \{z : |z - z_0| = \delta\}$. В силу условия K^* и утверждения 3, для точек $\{z : |z - z_0| = \delta\}$ имеем $\{z : |z - z_0| = \delta\} \subset G_1$, что противоречит 3) § 3. Далее, легко видеть, что из $P \cap K \neq 0$ следует $k \cap K \neq 0$, где $k \subset P$. Для каждой компоненты k имеем $k \cap K \cap G_1 \neq 0$. Действительно, пусть $z \in k \cap K$, $z_1 \in D_k$ и $\rho(z_1, z) < \rho(z_1, Fr(K))$. Существует круг C с центром в точке z_1, $\bar{C} \subset K$ такой, что $C \cap P = 0$, $(\bar{C} - C) \cap P \neq 0$. Учитывая утверждение 3, легко видеть, что $(\bar{C} - C) \cap P \subset k \cap K \cap G_1$, где $k \subset P$. Рассмотрим в w-плоскости компоненту открытого множества $\operatorname{Int} C(G_k)$, например g, которая содержит $\left\{w : |w - w_0| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Очевидно, $Fr(g) \subset Fr(G_k)$ и

$$Fr(G_k) \cap \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subset Fr(g). \tag{4}$$

Множество $Fr(g)$ связно, так как G_k — область. Поставим в соответствие каждой компоненте k границы $Fr(D_k)$ в w-плоскости континуум k', получаемый как объединение всех множеств вида $\operatorname{Ls} f(z_n)$, где $z_n \in D_k$ и $Lsz_n \subset k$. Итак,

$$\operatorname{Fr}(G_k) = \operatorname{Fr}(g) \cup \{\cup k'\}. \tag{5}$$

Так как $k \cap K \cap G_1 \neq 0$, то в соответствии с утверждением 4 и уравнением (4) имеем $k' \cap \operatorname{Fr}(g) \neq 0$. Отсюда в силу (5) из связности $\operatorname{Fr}(g)$ и множеств k' следует связность $\operatorname{Fr}(G_k)$. Область D_k односвязна вместе с G_k. Утверждение 6 доказано.

§ 5. Продолжим изучение границы области D_k. Из определения областей D_k, G_k и утверждения 4 легко следует

Утверждение 7. Если $z \in \operatorname{Fr}(D_k) \cap G_1$, то в окрестности этой точки $\operatorname{Fr}(D_k)$ — простая жорданова дуга.

Утверждение 8. Граница области D_k состоит только из достижимых точек.

Предположим, что носитель некоторого простого конца, пусть континуум k, состоит больше чем из одной точки. В силу утверждения 7 $k \subset \beta$.

Цель всех построений и рассуждений § 5, приводимых ниже, состоит в том, чтобы показать существование точки $z \in k$, для которой выполняется предположение утверждения 3; тогда два заключения $z \in G_1$, $k \subset \beta$ содержат противоречие.

Пусть z_1, $z_2 \in k$ и пусть $\{z_n^1\}$, $\{z_n^2\} \subset D_k$ — последовательности, сходящиеся к z_1, z_2 соответственно.

Существуют непересекающиеся простые жордановы дуги λ_n, $\lambda_n \subset D_k$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, соединяющие соответственные точки z_n^1, z_n^2 такие, что $\operatorname{Ls} \lambda_n \subset k$.

Действительно, если отобразить конформно область D_k на внутренность единичного круга, то последовательностям $\{z_n^{(1)}\}$, $\{z_n^{(2)}\}$ будут соответствовать $\{\zeta_n^{(1)}\}$, $\{\zeta_n^{(2)}\}$, сходящиеся к некоторой точке ζ единичной окружности. Соединим соответствующие точки $\zeta_n^{(1)}$, $\zeta_n^{(2)}$ внутри единичного круга непересекающимися простыми жордановыми дугами, стягивающимися к ζ (легко убедиться, что это возможно); их прообразы в z-плоскости дадут нужные дуги λ_n.

Можно считать, что последовательности $\{z_n^{(1)}\}$, $\{z_n^{(2)}\}$ такие, что существуют простые жордановы дуги γ_i, $\{\overline{z_n^{(i)}}\} \subset \gamma_i$ с концами в $z_1^{(i)}$, z_i $(i = 1, 2)$, при этом

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = O \tag{6}$$

и $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \lambda_1$ — простая жорданова дуга.

Для каждой дуги λ_n существует дуга $\hat{\lambda}_n$ такая, что $\hat{\lambda}_n \subset \lambda_n$ и

$$\gamma_1 \bigcap \hat{\lambda}_n = \hat{z}_n^{(1)},\ \gamma_2 \bigcap \hat{\lambda}_n = \hat{z}_n^{(2)}. \tag{7}$$

Считаем, что дуги $\hat{\lambda}_n$ такие, что последовательности (7) сходятся соответственно к точкам $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$. Очевидно, $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2 \in k$ и $\hat{z}_1 \in \gamma_1$, $\hat{z}_2 \in \gamma_2$. (8)

Пусть $\tilde{g}$ — область, дополнительная к дуге $\gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup \lambda_1$. Отобразим область $\tilde{g}$ конформно посредством отображения $w(z)$ на внутренность единичного круга E. При этом дуги $\hat{\lambda}_n - (z_n^{(1)} \bigcup z_n^{(2)})$ отобразятся на дуги $\beta_n \subset E$; $\bar{\beta}_n$ — простые непересекающиеся жордановые дуги с концами на окружности $\bar{E} - E$. Пусть β_{n_k} — подпоследовательность последовательности β_n и g_{n_k} — одна из компонент $E - \beta_{n_k}$. Подпоследовательность β_{n_k} выбрана так, чтобы $\forall k g_{k+1} \supset g_k$. Поэтому $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} g_{n_k}$ — область.

Пусть область g — прообраз области $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} g_{n_k}$ в z-плоскости. Тогда $\mathrm{Fr}(g)$ состоит из континуума $\mathrm{Ls}\,\hat{\lambda}_{n_k} = k_1 \subset k$ и дуги $\gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup \lambda_1$ или ее части. Так как последовательности (7) сходятся к $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$, то $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2 \in k_1$. Поэтому, учитывая (6), (8) и соотношение $k_1 \bigcap \lambda_1 = 0$, получаем, что k_1 содержит точки, не принадлежащие $\gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup \lambda_1$, и таким образом, существует открытый круг $C \subset g$ такой, что на $\mathrm{Fr}(C)$ имеется точка $\bar{z} \in k_1$. Один из лучей $t_i(\bar{z})$ $(i = 1, 2, 3)$, пусть $t_1(\bar{z})$, пересекает круг C. Соединим в области g некоторую точку интервала $t_1(\bar{z}) \bigcap C$ с точкой $\tilde{z} \in g \bigcap w^{-1}(g_{n_1})$ дугой так, чтобы дуга, соединяющая $\bar{z}$ и $\tilde{z}$, была простой жордановой дугой, например σ, $\sigma - \bar{z} \subset g$.

Дуга σ пересечет все дуги $\hat{\lambda}_{n_k}$ по последовательности точек z_{n_k}, $\mathrm{Ls}\, z_{n_k} \subset k_1 \bigcap \sigma = \bar{z}$.

Итак, на луче $t_1(\bar{z})$ имеется последовательность точек области D_k, сходящаяся к $\bar{z} \in k_1 \subset k$. Утверждение 8 доказано.

§ 6. Утверждение 9. Множество $\mathrm{Fr}(D_k) \bigcap \beta$ не более чем счетно.

Доказательство. В силу утверждения 8 имеем

$$\mathrm{Fr}(D_k) = M \bigcup N, \tag{9}$$

где $z \in M$, если z — носитель одной достижимой точки $\mathrm{Fr}(D_k)$, и $z \in N$ в противном случае.

В силу утверждения 7 $N \subset \beta$. Пусть $C = \mathrm{Fr}(D_k) - \{\bigcup\limits_p \mathrm{Fr}(d_p)\}$ (d_p — те же, что в утверждении 6). Очевидно, $C \subset \beta$. Отсюда, учитывая (9), имеем

$$\mathrm{Fr}(D_k) \bigcap \beta = \{\bigcup [N \bigcap \mathrm{Fr}(d_p)]\} \bigcup C \bigcup \{M \bigcap \beta\}. \tag{10}$$

А) Для любого p множество $N \bigcap \mathrm{Fr}(d_p)$ не более чем счетно.

Пусть $z \in N \bigcap \mathrm{Fr}(d_p)$. Существуют две простые жордановые дуги, пусть $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ определяющие разные достижимые точки $\mathrm{Fr}(D_k)$. Можно считать, что эти дуги выходят из одной точки $z_0 \in D_k$ и $\gamma_1(z) \bigcup \gamma_2(z) - z \subset D_k$, $\gamma_1(z) \bigcap \gamma_2(z) = \{z, z_0\}$. Пусть $\gamma(z) = \gamma_1(z) \bigcup \gamma_2(z)$, $\tilde{D}(z)$ — компонента $D_k - \gamma(z)$, для которой $D(z) \bigcap \mathrm{Fr}(d_p) = \{z\}$; $D(z)$ — компонента дополнения $\gamma(z)$, для которой $\tilde{D}(z) \subset \tilde{D}(z)$. Так как дуги $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ определяют разные достижимые точки $\mathrm{Fr}(D_k)$, то области $D(z)$ и $\tilde{D}(z)$ не совпадают. В силу утверждений 6 и 5 множество $\overline{\tilde{D}(z) - D(z)} = K(z)$ — континуум, содержащий внутренние точки.

Итак, каждой точке $z \in N \bigcap \mathrm{Fr}(d_p)$ можно поставить в соответствие континуум $K(z)$, причем для $z_1, z_2 \in N \bigcap \mathrm{Fr}(d_p)$, $z_1 \neq z_2$ имеем $K(z_1) \bigcap K(z_2) = 0$. Отсюда следует А).

Б) Множество C не более чем счетно. Так как $C \subset \beta$, то в силу утверждения 3 на каждом луче $t_i(z)$, $z \subset C$ имеется отрезок $\tau_i(z)$, $\tau_i(z) \ni z$ такой что $\tau_i(z) \cap D_k = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Отсюда в соответствии с утверждением 8 имеем

Утверждение α. Для каждой точки $z \in C$ существуют три простые жордановые дуги $\beta_j(z)$, соединяющие точку z с некоторой точкой 0, $0 \subset D_k$ такие, что $\beta_j(z) - z \in D_k$, $\beta_j(z) \cap \beta_i(z) = \{z, 0\}$, $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$, и разбивающие z-плоскость на три непересекающиеся области

$$G^j(z) \ (j = 1, 2, 3), \tag{11}$$

каждая из которых содержит по одному полусегменту $\tau_j(z) - z$.

Так же очевидно

Утверждение β. Пусть имеем последовательность $\{z_n\}$, $z_n \to z$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует ее подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$ такая, что для каждого фиксированного k, пусть k_0, угол с вершиной в точке $z_{n_{k_0}}$ и сторонами, проходящими через точки z_{n_k}, предшествующие $z_{n_{k_0}}$, меньше ε.

Для доказательства В) предположим, что C несчетно. Пусть C_n — множество точек $z \in C$, для которых $\min\limits_{i=1,2,3} \{\sup\limits_{z_1, z_2 \in \tau_i(z)} \rho(z_1, z_2)\} > \frac{1}{n}$ и $\min\limits_{\substack{i, j = 1, 2, 3 \\ i \neq j}} [\tau_i(z) \hat{\tau}_j(z)] > \frac{\pi}{n}$; тогда $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Существует множество C_{n_0} и последовательность точек $\{z_m\}$, $\{z_m\} \subset C_{n_0}$, сходящаяся к точке z, $z \in \mathrm{Fr}(D_k)$ такая, что для нее имеет место утверждение β при $\varepsilon = \frac{\pi}{n_0}$.

Для последовательности $\{z_m\}$ имеет место

Утверждение γ. Существует подпоследовательность последовательности $\{z_m\}$ (сохраним для нее обозначение $\{z_m\}$) такая, что для каждой ее точки имеется область $L(z_m)$, совпадающая с одной из областей (11), и такая, что

$$\overline{L(z_m)} \cap \tau_i(z_n) = 0 \text{ для } m < n, \tag{12}$$

при этом i $(i = 1, 2, 3)$ таково, что $\tau_i(z_n) - z_n \subset L(z_n)$.

Доказательство. Пусть $z_{m_1} = z_1$. Согласно утверждению α, для точки z_{m_1} существуют три области (11). Пусть $S(z_{m_1})$ — та из них, для которой $z \in S(z_{m_1})$, $z = \lim z_m$, $z \in \mathrm{Fr}(D_k)$; область $L(z_{m_1})$ — одна из двух оставшихся. В область $S(z_{m_1})$ попадают все точки $\{z_m\}$, начиная с некоторой; пусть $z_m \in S(z_{m_1})$ для $m \geqslant m_2$.

Согласно утверждению α, для точки z_{m_2} существуют три области (11). Область $S(z_{m_2})$ — та из них, для которой $z \in S(z_{m_2})$, область $L(z_{m_2})$ — та из двух оставшихся, для которой отрезок $\tau_i(z_{m_2}) - z_{m_2}$, принадлежащий ей, не содержит точки z_{m_1}. Пусть z_{m_3} — точка из $\{z_m\}$ такая, что $z_m \in S(z_{m_2})$ для $m \geqslant m_3$ и $m_2 < m_3$.

Согласно утверждению α, для точки z_{m_3} имеем три области (11). Область $S(z_{m_3})$ та из них, для которой $z \in S(z_{m_3})$. В силу определения последовательности $\{z_m\}$ и условия $m_1 < m_2 < m_3$ существует область $G^{(i)} z_{m_3} = L(z_{m_3})$, отличная от $S(z_{m_3})$, для которой отрезок $\tau_i(z_{m_3}) - z_{m_3}$, содержащийся в ней, не имеет ни z_{m_1}, ни z_{m_2}.

Далее, поступая аналогично как для $l = 3$, выберем точки z_{m_4}, z_{m_5}, ... и соответственно области $L(z_{m_4})$, $L(z_{m_5})$, ... Легко видеть, что для областей $L(z_{m_l})$ и сегментов $\tau_i(z_{m_l})$, $\tau_i(z_{m_l}) - z_{m_l} \subset L(z_{m_l})$ выполняется (12). Утверждение γ доказано.

Пусть последовательность точек $\{z_m\}$ и последовательность областей $L(z_m)$ такие, как в утверждении γ. Обозначим через τ_m тот из сегментов

$\tau_i(z_m)$, который удовлетворяет условию $\tau_m - z_m \subset L(z_m)$. Тогда (12) перепишется в виде

$$\overline{L(z_m)} \cap \tau_n = 0 \text{ для } n > m, \ \tau_n - z_n \subset L(z_n). \qquad (12')$$

Можно считать, что $[\tau_n \hat{\tau}_s] < \frac{\pi}{10^3}$ для любых n, s. Легко видеть, что $T = \mathrm{Ls}\, \tau_m$ — отрезок и в силу $\{z_m\} \subset C_{n_0}$ $\sup\limits_{z_1, z_2, \in T} \rho(z_1, z_2) \geqslant \frac{1}{n_0}$. Пусть $\hat{z} \in T$, $\hat{z} \neq z$, $z = \lim z_m$. Существуют последовательность $\{\hat{z}_{m_r}\}$, $\hat{z}_{m_r} \in \tau_{m_r}$, $\hat{z}_{m_r} \to \hat{z}$ и простая жорданова дуга λ, соединяющая точки $\hat{z}_{m_1}$ и $\hat{z}$, такая, что $\{\hat{z}_{m_r}\} \subset \lambda$, $\lambda \cap \{z_m\} = 0$. Отсюда в силу (12′) следует, что $\forall r$ между точками $\hat{z}_{m_r}$ и $\hat{z}_{m_{r+1}}$ имеется точка $\tilde{z}_r \in D_k$. Очевидно, $\tilde{z}_r \to \hat{z}$, $\hat{z} \in \mathrm{Fr}(D_k)$; следовательно, $T \subset \mathrm{Fr}(D_k)$. Так как $T = \mathrm{Ls}\, \tau_m$, $\tau_m \subset C(D_k)$, то T — носитель одного простого конца $\mathrm{Fr}(D_k)$, что противоречит утверждению 8. В) доказано.

С) Множество $M \cap \beta$ не более чем счетно.

При доказательстве используется

Утверждение δ. Если P — произвольное плоское множество, то множество точек P, изолированных по углу $> \pi$, не более чем счетно.

Можно считать множество P ограниченным. Пусть P_n — множество точек $z \in P$, изолированных по сектору раствора $> \pi + \frac{\pi}{n}$ и радиуса $> \frac{1}{n}$. Тогда $P = \bigcap P_n$. Так как каждое P_n конечно или пусто, то P — не более чем счетно.

Легко видеть, что если $z \in M$, то $\mathrm{contg}_{\overline{D}_k} z$ (см. [6], стр. 378) — замкнутый сектор. Если в некоторой точке $z \in \overline{D}_k \mathrm{contg}_{\overline{D}_k} z < \pi$, то эта точка изолированная по углу $> \pi$. Таких точек $\overline{D}_k$, согласно утверждению δ, счетное множество. Отсюда заключаем, что для всех $z \in M$, исключая, возможно, счетное множество, $\mathrm{contg}_{\overline{D}_k} z \geqslant \pi$. Из определения множества M следует, что для точки $z \in M$, для которой $\mathrm{contg}_{\overline{D}_k} z \geqslant \pi$, существует луч $t_i(z)$ $(i = 1, 2, 3)$, на котором имеется последовательность точек $\{z_n\}$. $z_n \to z$, $\{z_n\} \subset D_k$. В соответствии с утверждением 3 $z \in G_1$. С) доказано. Из (10), А), В), С) следует утверждение 9.

§ 7. В настоящем параграфе докажем лемму 2, сформулированную в конце § 3. В силу утверждения 4 лемму 2 достаточно доказать для точек $\mathrm{Fr}(D_k) \cap K \cap \beta$. Согласно утверждению 9, замкнутое множество $F = \mathrm{Fr}(D_k) \cap \beta$ не более чем счетно, следовательно, приводимое. Пусть $\{F_\omega\}$ — трансфинитная последовательность производных множества F. Пусть $\tilde{F}_1 = F - F_1$. Тогда обязательно из $F \cap K \neq 0$ следует $\tilde{F}_1 \cap K \neq 0$. Предположим, что для точки $z \in \tilde{F}_1 \cap K$ заключение леммы 2 не имеет места. Из утверждения 8 следует, что существует достижимая точка ζ, носителем которой является точка z такая, что соответствующий ей при отображении $w = f(z)$ граничный элемент содержит точки $\left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Так как ζ достижимая точка, т. е. граничный элемент первого рода согласно Каратеодори [4], то в любой окрестности точки z содержится область $g \subset D_k$, отсекаемая от D_k дугой γ, $\gamma \subset D_k$; при этом $\overline{\gamma}$ — простая жорданова дуга, $\overline{\gamma} \ni z$ и все точки каждой последовательности $\{z_n\}$, $\{z_n\} \subset D_k$, сходящейся к достижимой точке ζ, начиная с некоторой, принадлежат g. Так как $z \in K \cap \tilde{F}_1$, то будем считать, что $\overline{g} - z \subset G_1$ и $\overline{g} \subset K$. Область $f(g) \subset \subset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Граница $f(g)$ состоит из точек трех видов, а именно:

1) точек множества P, где $w \in P$, если $\rho(w, w_0) > \frac{\varepsilon}{2}$, и для любой последовательности $\{w_n\}$, $w_n \to w$, $\{w_n\} \subset f(g)$, последовательность $f^{-1}(w_n) \to z$; 2) точек дуги $f(\gamma)$, $f(\gamma) \subset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$; 3) точек, соответствующих точкам $G_1 \cap \mathrm{Fr}(D_k)$, и следовательно, расположенных на $\left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. В силу однолистности отображения $f(z)$ и того, что $\bar{\gamma} \subset G_1$, имеем

$$\rho(P, f(\bar{\gamma})) > 0. \qquad (13)$$

Пусть $\xi \in P$. В соответствии с (13) существует окрестность точки ξ, пусть N_ξ такая, что $N_\xi \cap f(\bar{\gamma}) = 0$, $\rho(N_\xi, w_0) > \frac{\varepsilon}{2}$, и таким образом, каждой последовательности $\{w_n\}$, $\{w_n\} \subset f(g)$, $\mathrm{Ls}\, w_n \subset \mathrm{Fr}(f(g)) \cap N_\xi$ в z-плоскости соответствует $z_n = f^{-1}(w_n)$, $z_n \to z$. На основании следствия теоремы 1 Lindelöf'а (см. стр. 99 [5]) заключаем, что $f^{-1}(w)$ постоянна в области $f(g)$, поэтому $P = 0$.

Пусть $\tilde{F}_2 = F_1 - F_2$. Из $F_1 \cap K \neq 0$ следует $\tilde{F}_2 \cap K \neq 0$. Рассуждая как выше, получаем, что для точек $\tilde{F}_2 \cap K$ имеет место заключение леммы 2. Для каждой достижимой точки ζ с носителем $z \in \tilde{F}_2 \cap K$ в любой окрестности точки z существует область g такая, как в случае $z \in \tilde{F}_1 \cap K$, причем можно считать в силу утверждения 9, что $\bar{\gamma} \subset G_1$.

Пользуясь трансфинитной индукцией, легко показать, что заключение леммы 2 верно для всякого $\tilde{F}_{\omega+1} = F_\omega - F_{\omega+1}$. Лемма 2 доказана.

§ 8. Функция $f(z)$ ограничена в открытом круге $d \supset \bar{K}$ (см. § 3). Отсюда следует, что интеграл Дирихле функции $f(z)$ конечен на множестве $K \cap (G_1 \cup G_2)$. В силу теоремы Фубини существует ρ_0 $(0 < \rho_0 < \delta)$ такое, что

$$\sum_s \text{дл.}\, f(\delta_s) < \infty, \qquad (14)$$

где δ_s — открытые дуги, составляющие множество $\{z : |z - z_0| = \rho_0\} - \beta$.

Пусть $K_{\rho_0} = \{z : |z - z_0| < \rho_0\}$ — новая окрестность точки z_0. Множества $D_k \cap K_{\rho_0}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — открытые. Рассматриваем только те из них, для которых

$$f(D_k \cap K_{\rho_0}) \cap \{w : |w - w_0| \geqslant \varepsilon\} \neq 0. \qquad (15)$$

Для $\forall k\, \mathrm{Fr}(D_k \cap K_{\rho_0})$ состоит из точек $\mathrm{Fr}(D_k) \cap K$, для которых имеет место заключение леммы 2, и точек открытых дуг δ_{k_s}, $\delta_{k_s} \subset \delta_s$. Отсюда в силу (14) следует, что $\overline{f(\delta_{k_s})}$ — простые жордановые дуги, $f(\delta_{k_s}) \subset \subset \left\{w : |w - w_0| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, с концами на $\left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Так как только конечное число дуг $f(\delta_{k_s})$ имеет длину больше некоторого фиксированного числа, то

$$\mathrm{Fr}[f(D_k \cap K_{\rho_0})] = \{\bigcup_s f(\delta_{k_s})\} \cup \left[\mathrm{Fr}(f(D_k \cap K_{\rho_0})) \cap \left\{w : |w - w_0| = \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right]. \quad (16)$$

Если учесть (15), то

$$\sum_s \text{дл.}\, f(g_{k_s}) \geqslant \varepsilon. \qquad (17)$$

Как известно,

$$\overline{f(D_k \cap K_{\rho_0})} = f(D_k \cap K_{\rho_0}) \cup \mathrm{Fr}(f(D_k \cap K_{\rho_0})). \qquad (18)$$

Из (18), (16) и соотношения $\delta_{k_s} \subset G_1 \cup G_2$ следует, что замкнутое множество $\sigma_k = \overline{f(D_k \cap K_{\rho_0})} \cap \{w : |w - w_0 \geqslant \varepsilon\}$ состоит из образов точек множества $G_1 \cap \overline{K}_{\rho_0}$ или $G_2 \cap \overline{K}_{\rho_0}$. Так как в силу (14) и (17) имеется конечное число множеств $D_k \cap K_{\rho_0}$, удовлетворяющих (15), то множество $\sigma = \bigcup \sigma_k$ — замкнутое.

Очевидно, множество $f^{-1}(\sigma)$ — замкнуто, $f^{-1}(\sigma) \subset \overline{K}_{\rho_0} \cap \{G_1 \cup G_2\}$ и $z_0 \overline{\in} f^{-1}(\sigma)$. Пусть $\delta_0 = \rho(z_0 f^{-1}(\sigma))$, $\delta_0 > 0$. Тогда имеем $f(\{z : |z - - z_0| < \delta_0\}) \subset \{w : |w - w_0| < \varepsilon\}$, что противоречит (3) § 3. Теорема 1 доказана.

Автор выражает благодарность А. П. Копылову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bohr H. Über streckentreue und konforme Abbildung, Math. Ztschr: 1 (1918).

2. Menchoff D. Sur les fonctions monogénes, Bull. Soc. math de France. 59 (1931).

3. Ю. Ю. Трохимчук. Непрерывные отображения и условия моногенности. Физматгиз, М., 1963.

4. Carathéodory C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann. 73 (1912).

5. К. Каратеодори. Конформное отображение. ГТТИ, М., 1934.

6. С. Сакс. Теория интеграла. ИЛ, М., 1949.

Поступила 11 июня 1969 г.