К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. П. Петренко

1. Положим для мероморфной при $|z| < R$ функции $f(z)$

$$\ln^+ M(r, a, f) = \ln^+ \max_{|z|=r} \frac{1}{|f(z)-a|}, \quad a \neq \infty, \quad \ln^+ M(r, \infty, f) = \ln^+ \max_{|z|=r} |f(z)|$$

При $\alpha > 0$ $(r < R)$.

$$\Delta_\alpha(a, f) = \overline{\lim_{r\to R}} \frac{m(r, a, f)}{T^\alpha(r, f)},$$

$$\beta_\alpha(a, f) = \underline{\lim_{r\to R}} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{T^\alpha(r, f)}.$$

Напомним, что величины $\Delta_1(a, f) = \Delta(a, f)$ называются величинами дефектов $f(z)$ в смысле Ж. Валирона, а величины $\beta_1(a, f) = \beta(a, f)$ — величинами отклонений мероморфных функций [1, 2]. Если для некоторого a $\beta(a, f) > 0$, то мы говорим, что $f(z)$ имеет положительное отклонение от a (см. [2]).

Положим далее

$$\Delta_0(a, f) = \overline{\lim_{r\to R}} \frac{m(r, a, f)}{\ln T(r, f)},$$

$$\beta_0(a, f) = \underline{\lim_{r\to R}} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{\ln T(r, f)},$$

$$V^\alpha(f) = \{a : \Delta_\alpha(a, f) > 0\},$$

$$\Omega^{(\alpha)}(f) = \{a : \beta_\alpha(a, f) > 0\}.$$

Множество $\Omega^{(\alpha)}(f)$ назовем [3—5] множеством положительных отклонений мероморфной функции $f(z)$.

Положим далее при $k > 0$

$$V_k^{(0)}(f) = \{a : \Delta_0(a, f) > k\},$$

$$\Omega_k^{(0)}(f) = \{a : \beta_0(a, f) > k\},$$

$$\overline{\Omega_k^{(0)}(f)} = \{a : \beta_0(a, f) \geqslant k\}.$$

Из результатов работ [6, 7] следует, что множество $V^{(\alpha)}(f)$ при $\alpha > 0$ всегда является исключительным множеством в том смысле, что подавляющее большинство точек не принадлежит множеству $V^{(\alpha)}(f)$.

Действительно, имеют место следующие утверждения [6, 7].

Теорема А. *Для произвольной мероморфной при $|z| < R$ функции $f(z)$*

а) при $\alpha > 0{,}5$ множество

$$V^{(\alpha)}(f)$$

имеет внутреннюю логарифмическую емкость нуль;

б) при любом σ, $0 < \sigma \leqslant 2$, множество

$$V^{(0)}_{\frac{1}{\sigma}}(f)$$

имеет нулевую хаусдорфову меру размерности σ.*

---

* *См. [8 стр. 244].*

Следствие. *Для произвольной мероморфной при* $|z| < R$ *функции* $f(z)$ *множество*

$$V_1^{(0)}(f)$$

имеет линейную меру нуль.

Структура множества положительных отклонений $\Omega^{(\alpha)}(f)$ характеризуется следующей теоремой [4, 5].

Теорема Б. 1) *Если* $f(z)$ — *мероморфная при* $z \neq \infty$ *функция, тогда при* $\alpha > 0{,}5$ *множество*

$$\Omega^{(\alpha)}(f)$$

имеет внутреннюю логарифмическую емкость нуль.

2) *Если* $f(z)$ — *мероморфная при* $|z| < R$ *и имеет нижний порядок*** λ, *то при* $\alpha > 0{,}5 + \frac{3}{\lambda}$ *множество*

$$\Omega^{(\alpha)}(f) \ (\lambda > 0)$$

также имеет внутреннюю логарифмическую емкость нуль.

В приведенных теоремах структура множеств $V^{(\alpha)}(f)$, $\Omega^{(\alpha)}(f)$, $(\alpha > 0)$, $V_k^{(0)}(f)$ зависит соответственно от α и k. Проверка точности такой зависимости раскрывает глубокие асимптотические свойства мероморфных функций и поэтому имеет принципиальное значение для теории мероморфных функций.

Эта работа посвящена в основном изучению структуры множества

$$\overline{\Omega_k^{(0)}(f)}$$

для мероморфных при $z \neq \infty$ функций конечного порядка.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого* ρ, $0 < \rho < \infty$ *существует мероморфная при* $z \neq \infty$ *функция* $f(z)$ *порядка* ρ, *для которой линейная мера множества*

$$\overline{\Omega_{0,5}^{(0)}(f)}$$

положительная.

Теорема 2. *Для любого* ρ, $0 < \rho < \infty$ *существует мероморфная при* $z \neq \infty$ *функция* $f(z)$ *порядка* ρ *и множество* G_{σ_0}, *имеющее положительную меру Хаусдорфа размерности*

$$\sigma_0 = \frac{1}{\log_2 3} < 1,$$

для которой

$$\overline{G_{\sigma_0} \subseteq \Omega_{0,5}^{(0)}(f)}.$$
$$\overline{\sigma_0}$$

2. Доказательство теорем 1 и 2 проводится с помощью некоторой модификации примеров типа примеров А. А. Гольдберга (см. [3, 9—11] и др.).

Докажем теорему 1.

Как известно, каждое действительное число a из промежутка (1, 2) может быть единственным образом представлено в виде

$$a = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(a)}{2^k}, \tag{2.1}$$

** Напомним, что нижним порядком мероморфной при $|z| < R$ функции $f(z)$ называется (см. [7])

$$\lambda = \varliminf_{r \to R} \frac{\ln T(r, f)}{\ln \frac{1}{R - r}}, \text{ если } R \neq \infty, \ \lambda = \varliminf_{r \to \infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} \text{ при } R = \infty.$$

где $\alpha_k(a)$ — последовательность, состоящая из 0 и 1, причем в 1 встречается бесконечное число раз. Для каждого натурального числа

$$n = \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k \cdot 2^{k-1} \; (\alpha_k = 0,1) \tag{2.2}$$

определим

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{q(n)} \frac{\alpha_k}{2^k}. \tag{2.3}$$

Таким образом, между множеством целых неотрицательных чисел и множеством $\{b_n\}$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие ($b_0 = 1$). Положим теперь [9, стр. 150]

$$\begin{gathered} c_n = \eta_n = \frac{K_1}{n \ln^2(1+n)}, \; n = 1, 2, \ldots, \\ \eta_0 = \eta_1, \; \varphi_n = \pi \sum_{\nu=0}^{n-1} \eta_\nu, \; n = 1, 2, \ldots, \\ \varphi_0 = 0, \; K_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(1+n)}, \\ S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n, \end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\{b_n\}$ — последовательность, определенная соотношением (2.3). Пусть далее

$$\begin{gathered} g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n b_n \exp(ze^{-i\varphi_n}), \\ g_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp(ze^{-i\varphi_n}), \\ f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}; \end{gathered} \tag{2.5}$$

$f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция первого порядка. Мы имеем [9, стр. 152]

$$T(r, f) \leqslant 2r + O(1), \tag{2.6}$$

и при

$$|\arg z - \varphi_n| \leqslant \frac{\pi}{3} \eta_n \; (|z| = r > r_0)$$

$$|f(z) - b_n| \leqslant C_1 n \ln^2(1+n) \exp\left(-\frac{2}{3} r\eta_n^2\right), \tag{2.7}$$

где всюду дальше буквы C с индексами означают положительные постоянные, зависящие лишь от рассматриваемой функции, а буквы K с индексами — абсолютные положительные постоянные.

Выберем теперь любое $a \in [1,2]$. Представление (2.1) этого числа порождает последовательность целых неотрицательных чисел

$$\begin{gathered} n_1(a) = \alpha_1(a); \; n_2(a) = \alpha_1(a) + 2\alpha_2(a); \; \ldots \\ n_\nu(a) = \alpha_1(a) + 2\alpha_2(a) + \cdots + 2^{\nu-1}\alpha_\nu(a); \; \ldots \end{gathered} \tag{2.8}$$

Так как в представлении для a $\alpha_\nu(a)$ принимают 1 бесконечное число раз, то

$$\lim_{\nu \to \infty} n_\nu(a) = \infty.$$

Теперь выберем любое r ($l^2 < r_0 < r < \infty$) и рассмотрим следующие два возможных случая расположения последовательности $\{n_\nu(a)\}_{\nu=1}^{\infty}$.

1. При данном r ($r_0 < r < \infty$) найдется хотя бы одно $n_\nu(a)$ такое, что

$$\frac{1}{2}\frac{r^{1/2}}{\ln^4 r} \leqslant n_\nu(a) \leqslant \frac{r^{1/2}}{\ln^4 r}. \tag{2.9}$$

В этом случае будем оценивать величину отклонения $f(z)$ от a при

$$|\arg z - \varphi_{n_\nu(a)}| \leqslant \frac{\pi}{3}\eta_{n_\nu(a)} \ (|z| = r).$$

В силу (2.1) и (2.3)

$$0 \leqslant a - b_{n_\nu(a)} \leqslant \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^\nu}. \tag{2.10}$$

С другой стороны, в силу (2.2), (2.8) и (2.9)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{r^{1/2}}{\ln^4 r} \leqslant n_\nu(a) \leqslant \sum_{k=0}^{\nu-1} 2^k = 2^\nu - 1. \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) получаем

$$0 \leqslant a - b_{n_\nu(a)} \leqslant \frac{2\ln^4 r}{r^{1/2}}.$$

Учитывая (2.4), (2.7), (2.9) и это последнее неравенство, получаем в этом случае для выбранного a и для всех z, таких что

$$|\arg z - \varphi_{n_\nu(a)}| \leqslant \frac{\pi}{3}\eta_{n_\nu(a)} \ (|z| = r),$$

$$|f(z) - a| \leqslant \frac{2\ln^4 r}{r^{1/2}} + C_1 n_\nu(a)\ln^2(1 + n_\nu(a))\exp\left(-\frac{2}{3} r\eta^2_{n_\nu(a)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\ln^4 r}{r^{1/2}} + C_2\frac{r^{1/2}}{\ln^4 r}\ln^2(1 + r)\exp\left\{-\frac{2}{3}\ln^4(1 + r)\right\} \leqslant C_3\frac{\ln^4 r}{r^{1/2}}. \tag{2.12}$$

Итак, в рассмотренном случае

$$\ln^+ M(r, a, f) \geqslant \frac{1}{2}\ln r + O(\ln\ln r). \tag{2.13}$$

Пусть теперь при выбранном a и r соотношение (2.9) не выполняется ни при одном $n_\nu(a)$ ($n_\nu(a) \neq 0$).

Здесь мы должны различать два случая:

1. Имеется хотя бы одно $n_\nu(a) < \frac{1}{2}\frac{r^{1/2}}{\ln^4 r}$ ($r_0 < r$ — фиксировано).

Пусть

$$\max_{n_\nu(a) < \frac{1}{2}\frac{r^{1/2}}{\ln^4 r}} n_\nu(a) = n_\mu(a) < \frac{1}{2}\frac{r^{1/2}}{\ln^4 r} \tag{2.14}$$

и $n_{\mu+j}(a)$ — первое число, определенное соотношением (2.8), большее чем $n_\mu(a)$. Очевидно, в нашем случае

$$n_{\mu+j}(a) > \frac{r^{1/2}}{\ln^4 r}. \tag{2.15}$$

Будем теперь оценивать величину отклонения $f(z)$ от числа a при

$$|\arg z - \varphi_{n_\mu(a)}| < \frac{\pi}{3}\eta_{n_\mu(a)} \ (|z| = r).$$

Мы имеем

$$0 \leqslant a - b_{n_\mu(a)} = \sum_{k=\mu+i}^{\infty} \frac{\alpha_k(a)}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^{\mu+i-1}}$$

и в силу (2.8) и (2.15)

$$\frac{r^{1/2}}{\ln^4 r} < \sum_{\nu=1}^{\mu+i} = 2^{\nu-1} = 2^{\mu+i} - 1.$$

Поэтому

$$0 \leqslant a - b_{n_\mu(a)} \leqslant \frac{2\ln^4 r}{r^{1/2}}. \tag{2.16}$$

Оценки (2.7), (2.14) и (2.16) дают

$$|f(z) - a| \leqslant \frac{2\ln^4 r}{r^{1/2}} + C_1\eta_\mu(a)\ln^2(1+\eta_\mu(a))\exp\left(-\frac{2}{3}r\eta^2_{n_\mu(a)}\right) \leqslant C_3\frac{\ln^4 r}{r^{1/2}},$$

$$\left(|\arg z - \varphi_{n_\mu(a)}| \leqslant \frac{\pi}{3}\eta_{n_\mu(a)}\right).$$

Таким образом, мы снова получаем оценку (2.13).

2. Пусть не выполняется соотношение (2.14), т. е. при выбранных r и a

$$n_p(a) = \min_\nu n_\nu(a) > \frac{r^{1/2}}{\ln^4 r}. \tag{2.17}$$

В этом случае оценим отклонение $f(z)$ от a при

$$|\arg z| < \frac{\pi}{3}\eta_0 = \frac{\pi}{3}\eta_1.$$

Мы имеем, как и выше, в силу (2.17)

$$0 \leqslant a - b_0 = a - 1 \leqslant \frac{2\ln^4 r}{r^{1/2}} \tag{2.18}$$

и в силу (2.7)

$$|f(r) - 1| \leqslant C_4\exp\left(-\frac{2}{3}r\eta_1^2\right). \tag{2.19}$$

Оценка (2.13) снова следует из (2.18) и (2.19). Итак, в силу (2.6) и (2.13)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln^+ M(r,a,f)}{\ln T(r,f)} \geqslant \frac{1}{2} \tag{2.20}$$

при любом $a \in (1,2)$.

Итак, мы доказали оценку (2.20) для мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$ первого порядка. Доказательство оценки (2.20) для случая мероморфной при $z \neq \infty$ функции порядка $0 < \rho < 1$ проводится аналогично, если использовать вместо (2.5) функцию (см. [9, 11])

$$f_\rho(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_n b_n \psi_\rho(ze^{-i\varphi_n})}{\sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_\rho(ze^{-i\varphi_n})},$$

где

$$\psi_\rho(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n^{1/\rho}}\right),$$

$\{C_n\}$, $\{\varphi_n\}$ и $\{b_n\}$ — последовательности, определенные соотношениями (2.3) и (2.4). При этом мы должны заменить соотношение (2.9) на такое:

$$\frac{1}{2}\frac{r^{\rho/2}}{\ln^4 r} \leqslant n_\nu(a) \leqslant \frac{r^{\rho/2}}{\ln^4 r}.$$

При $\rho > 1$ следует рассмотреть функцию

$$f_\rho(z^n)\, n = 2,\ 3, \ldots$$

3. Докажем теперь теорему 2.

Пусть $E\left(\frac{3}{2}^{\infty}\right)$ [7, стр. 156] канторово совершенное множество $\left(E\left(\frac{3}{2}^{\infty}\right)\right.$ получается при удалении из сегмента $[0,1]$ интервалов $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \right.$ $\left.\cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right] \cup \ldots$ (см. [12, стр. 56]). Справедливы следующие утверждения (см. [7], [12]):

1) $E\left(\frac{3}{2}^{(\infty)}\right) = \left\{a : a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(a)}{3^k}\right\}$,

где $\alpha_k(a)$ принимает независимо два значения 0 и 2.

2) Логарифмическая емкость множества $E\left(\frac{3}{2}^{(\infty)}\right)$ удовлетворяет оценкам

$$\frac{1}{9} \leqslant C\left(E\left(\frac{3}{2}^{\infty}\right)\right) \leqslant \frac{1}{3}.$$

3) Множество $E\left(\frac{3}{2}^{\infty}\right)$ имеет положительную хаусдорфову меру $m_{\sigma_0}(E)$ размерности *

$$\sigma_0 = \frac{1}{\log_2 3} < 1.$$

При этом [7, стр. 162]

$$1 > m_{\sigma_0}(E) > \frac{1}{8}.$$

Выберем теперь множество

$$G_{\sigma_0} = \left\{a : a = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k(a)}{3^k}\right\}, \tag{3.1}$$

где $\omega_k(a)$ принимают независимо два значения 0 и 2, причем 2 встречается бесконечное число раз. Это множество получается параллельным переносом множества $E\left(\frac{3}{2}^{(\infty)}\right)$ и удалением из него счетного множества точек (удаляются те концы выбрасываемых интервалов, представление которых троичной дробью имеет 0 в периоде). Очевидно, множество G_{σ_0} продолжает обладать свойствами 2) и 3) множества $E\left(\frac{3}{2}^{(\infty)}\right)$.

Аналогично, как и выше, замечаем, что между множеством натуральных чисел

$$n = \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k 2^{k-1}\ (\alpha_k = 0,1) \tag{3.2}$$

---

* $E\left(\frac{3}{2}^{\infty}\right)$ имеет положительную φ-меру [7, стр. 160]. Легко проверить, что в нашем случае можно брать $\varphi(t) = t^{\sigma_0}$.

и множеством

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{q(n)} \frac{2\alpha_k}{3^k} \tag{3.3}$$

устанавливается взаимно-однозначное соответствие ($b_0 = 1$). Теперь аналогично строим функцию

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n b_n \exp(ze^{-i\varphi_n})}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \exp(ze^{-i\varphi_n})},$$

где $\{c_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ определяются соотношениями (2.4), а $\{b_n\}$ соотношением (3.3).

Каждое число $a \in G_{\sigma_0}$ в силу (3.1) и (3.2) порождает последовательность целых неотрицательных чисел

$$n_1(a) = \frac{\omega_1(a)}{2},\ n_2(a) = \frac{\omega_1(a)}{2} + 2\frac{\omega_2(a)}{2}, \ldots$$

$$n_\nu(a) = \frac{\omega_1(a)}{2} + \cdots + 2^{\nu-1}\frac{\omega_\nu(a)}{2}, \ldots$$

и, значит, последовательность

$$b_{n_\nu(a)} = 1 + \sum_{k=1}^{q(n_\nu(a))} \frac{\omega_k(a)}{3^k}.$$

Для каждого $a \in G_{\sigma_0}$ и любого фиксированного r ($r_0 < r < \infty$) рассмотрим такие же, как и выше, случаи расположения последовательности $\{n_\nu(a)\}_{\nu=1}^{\infty}$.

В 1-м случае, т. е. если найдется такое $n_\nu(a)$, что при выбранном r

$$\frac{1}{2}\frac{r^{1/2}}{\ln^4 r} \leqslant n_\nu(a) \leqslant \frac{r^{1/2}}{\ln^4 r},$$

будем оценивать отклонение $f(z)$ от числа a при

$$|\arg z - \varphi_{n_\nu(a)}| \leqslant \frac{\pi}{3}\eta_{n_\nu(a)}, \quad (|z| = r).$$

В этом случае мы имеем

$$0 \leqslant a - b_{n_\nu(a)} \leqslant 2\sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^\nu}.$$

В силу (2.11)

$$3^\nu = 2^{\nu \log_2 3} = 2^{\frac{\nu}{\sigma_0}} \geqslant \frac{1}{3}\frac{r^{\frac{1}{2\sigma_0}}}{\ln^{\frac{4}{\sigma_0}} r},$$

поэтому

$$0 \leqslant a - b_{n_\nu(a)} \leqslant \frac{3\ln^{\frac{4}{\sigma_0}} r}{r^{0,5\frac{1}{\sigma_0}}}.$$

Далее так же, как и при доказательстве оценки (2.12), получаем

$$|f(z) - a| \leqslant \frac{3\ln^{\frac{4}{\sigma_0}} r}{r^{0,5\frac{1}{\sigma_0}}} + C_1 n_\nu(a)\ln^2(1 + n_\nu(a))\exp\left(-\frac{2}{3} r\eta^2_{n_\nu(a)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \frac{1}{r^{0,5\cdot\frac{1}{\sigma_0}}}\cdot \ln^{\frac{4}{\sigma_0}} r,$$

т. е.

$$\ln^{+} M(r, a, f) \geqslant \frac{1}{2\sigma_0}\ln r + O(\ln\ln r). \tag{3.4}$$

Во втором случае оценка (3.4) получается как и выше.

Тем самым теорема 2 доказана.

4. Как известно [13, 14], дефекты Р. Неванлинны целой функции $g(z)$ нижнего порядка $\lambda \leqslant 1$ удовлетворяют такому условию:

$$\delta(a, g)\begin{cases} = 0, & 0 \leqslant \lambda < 0{,}5, & (4.1)\\ \leqslant 1 - \sin\pi\lambda, & 0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1 & (4.2)\end{cases}$$

при любом $a \neq \infty$.

Оказывается, что для величин отклонений $g(z)$

$$\beta(a, g) = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln^{+} M(r, a, g)}{T(r, g)}$$

также имеют место аналоги оценок (4.1) и (4.2).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Если для мероморфной функции $f(z)$ нижнего порядка $\lambda \leqslant 1$*

$$\delta(\infty, f) = 1,$$

тогда при любом $a \neq \infty$

$$\beta(a, f)\begin{cases} = 0, & 0 \leqslant \lambda < 0{,}5, & (4.3)\\ \leqslant \pi\lambda\cdot(1 - \delta(a, g))\cdot|\operatorname{ctg}\pi\lambda|, & 0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1. & (4.4)\end{cases}$$

Действительно, оценка (4.3) следует из теоремы о росте мероморфных функций нижнего порядка $\lambda < 0{,}5$ [10, 14].

Оценку (4.4) можно получить, используя результаты работ [14, 15].

Действительно, в силу оценки (2.14_2) [15] имеем при $1 > \lambda \geqslant 0{,}5$

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln^{+}\left\{-\ln M(r, 0, f) + \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}\left[N(r, \infty, f) - \cos\pi\lambda\, N(r, 0, f)\right]\right\}}{\ln r} \geqslant \lambda.$$

Поэтому

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln M(r, 0, f)}{T(r, f)} \leqslant \pi\lambda|\operatorname{ctg}\pi\lambda|\cdot(1 - \delta(0, f)) + \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}(1 - \delta(\infty, f)). \tag{4.5}$$

Оценка (4.4) при $a = 0$ следует из (4.5). Если $a \neq 0, \infty$, тогда следует рассмотреть функцию $g(z) - a$.

Следствие. *Если $g(z)$ — целая функция нижнего порядка λ, то при*

$$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0 < \frac{3}{4}$$

и любом $a \neq \infty$

$$\beta(a, g) \leqslant \pi\lambda(1 - \varkappa(\lambda_0)), \quad (1 > \varkappa(\lambda_0) > 0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Петренко. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. ДАН СССР, **184**, № 5, (1969).

2. В. П. Петренко. Величины отклонений мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы. ДАН СССР, **187**, № 1, (1969).

3. В. П. Петренко. Изучение структуры множества положительных отклонени мероморфных функций, ч. I. Изв. АН СССР, сер. матем. **33**, № 6, 1969.
4. В. П. Петренко. Изучение структуры множества положительных отклонени мероморфных функций, ч. II. Изв. АН СССР, сер. матем. **34**, № 1, 1970.
5. В. П. Петренко. О структуре множества положительных отклонений мероморф ных функций. ДАН СССР, 180, № 4, 1969.
6. L. Ahlfors. Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theori der meromorphen Funktionen, Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys. — math., **5**, № 16, 1—1 (1931).
7. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. М.— Л., 1941.
8. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. Физматгиз, М., 1966
9. У. К. Хейман. Мероморфные функции. Физматгиз, М., 1966.
10. А. А. Гольдберг. О *дефектах мероморфных функций.* ДАН СССР, **98**, № 3 893—895 (1954).
11. А. А. Гольдберг. О множестве дефектных значений мероморфных функ ций конечного порядка. «Украинск. матем. ж.» **11**, № 4, 438—443 (1959).
12. И. П. Натансон. Теория функций вещественного переменного. М., 1957.
13. A. Edrei, W. H. J. Fuchs. The deficiencies of meromorphic functions of order less then one, Duke Math. J., **27**, № 3, 233—249 (1960).
14. И. В. Островский. О дефектах мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы. ДАН СССР, **150**, № 1, 32—35 (1963).
15. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Некоторые теоремы о росте меро морфных функций. Зап. матем. отд. физ-матем. ф-та ХГУ и ХМО, **27**, сер. 4, 3—3 (1961).

Поступила 11 июня 1969 г.