ОБ ОЦЕНКЕ НОРМЫ ПРОЕКТОРА В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. М. Бочтейн, В. Э. Кацнельсон

Пусть C — банахово пространство функций, непрерывных на окружности $|\zeta| = 1$ с нормой

$$\|x\| = \sup_{|\zeta|=1} |x(\zeta)|,$$

и пусть C^+ и C^- — подпространства пространства C, состоящие из функций, удовлетворяющих соответственно условиям

$$\int_0^{2\pi} x(e^{i\theta})\, e^{ik\theta}\, d\theta = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\int_0^{2\pi} x(e^{i\theta})\, e^{ik\theta}\, d\theta = 0 \quad (k = 0, -1, -2, \ldots).$$

Как известно, подпространства C^+ и C^- имеют нулевое пересечение, сумма этих подпространств — плотное в C линейное многообразие, но это многообразие не совпадает с C, и проектор из $C^+ + C^-$ на C^+ неограничен (более того, не существует никакого ограниченного проектора из C на C^+ [1, гл. 9]). Пространство C^+ естественным образом отождествляется с пространством функций, аналитических в круге $|\zeta| < 1$ и непрерывных в замыкании этого круга, а пространство C^- — с пространством функций, аналитических при $|\zeta| > 1$, непрерывных при $|\zeta| \geqslant 1$ и обращающихся в нуль при $\zeta = \infty$.

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки круга $|\zeta| < 1$, E^- — подпространство C^- порожденное функциями $1/\zeta - z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, что сумма подпространств C^+ и E^- — прямая, и так как подпространство E^- конечномерно, то проектор $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, действующий в пространстве E и проектирующий E на C^+ параллельно E^-, ограничен. (При каждом фиксированном наборе точек $z_1, \ldots, z_n$ из круга $|\zeta| < 1$).

Настоящая работа посвящена получению оценки сверху для нормы проектора $P(z_1, \ldots, z_n)$, зависящей лишь от количества n точек z_k, но не от их расположения в круге $|\zeta| < 1$. Аналогичная задача рассматривалась ранее одним из авторов [3].

Теорема. *Для любых $z_1, z_2, \ldots, z_n$, лежащих в круге $|\zeta| < 1$, справедлива оценка*

$$\| P(z_1, z_2, \ldots, z_n) \| \leqslant C \cdot n^2,$$

где $C < \infty$ — абсолютная константа.

Доказательство. Пусть

$$\Phi(\zeta) \in E, \ \|\Phi\| = 1, \ \Phi(\zeta) = \Phi^+(\zeta) + \Phi^-(\zeta), \tag{1}$$

где $\Phi^+ \in C^+$, $\Phi^- \in C^-$. Тогда $P\Phi = \Phi^+$ и

$$\| P(z_1, z_2, \ldots, z_n) \| = \sup_{\Phi \in E,\ \|\Phi\| = 1} \ \sup_{|z| < 1} |(P\Phi)(z)|.$$

Таким образом, для доказательства теоремы нам нужно получить оценку для $\Phi^+(z)$ из (1), равномерную по $z, z_1, \ldots, z_n$ из круга $|\zeta| < 1$ и по Φ из единичного шара пространства E.

Значение функции $\Phi^+ = P\Phi$ в фиксированной точке z круга $|\zeta| < 1$ является линейным функционалом L_z в пространстве E. По интегральной формуле Коши

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\Phi^+(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\Phi^-(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,$$

и значит,

$$L_z\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Phi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \ (\Phi \in E).$$

Пусть f_z — функционал на пространстве C, порождаемый мерой $\frac{1}{2\pi i(\zeta - z)}\, d\zeta$. Тогда $L_z(\Phi) = f_z(\Phi)$. Пусть $E^\perp$ — аннулятор подпространства $E \subset C$, т. е. множество всех функционалов из C^*, обращающихся в нуль на E. Пространство E^* канонически изометрически изоморфно пространству $C^*/E^\perp$, и функционал $L_z \in E^* = C^*/E^\perp$ принадлежит классу смежности, порожденному функционалом $f_z \in C^*$. Поэтому

$$\| L_z \| = \inf_{g \in E^\perp} \| f_z - g \|_{C^*}. \tag{2}$$

Опишем теперь аннулятор $E^\perp$ подпространства E. Пусть $g \in E^\perp$, g порождается мерой $d\mu(\zeta)$. Так как $E \supset C^+$, то $E^\perp \subset C^{+\perp}$, и по теореме М. и Ф. Риссов [2, гл. II, § 5; 1, гл. IV], мера $d\mu(\zeta)$ абсолютно непрерывна и имеет вид $d\mu(\zeta) = g(\zeta)\,d\zeta$, где $g(\zeta)$ — функция, принадлежащая классу Харди H^1 в единичном круге. Так как мера $d\mu(\zeta) = g(\zeta)\,d\zeta$ аннулирует функции $1/\zeta - z_1, \ldots, 1/\zeta - z_n$, то функция $g(\zeta)$ обращается в нуль в точках $z_1, \ldots, z_n$. Легко видеть, что, наоборот, если функция $g(\zeta) \in H$ обращается в нуль в точках $z_1, \ldots, z_n$, то функционал, порождаемый мерой $g(\zeta)\,d\zeta$, принадлежит $E^\perp$. Таким образом,

$$E^\perp = \{\, g(\zeta)\,d\zeta : g \in H^1,\ g(z_k) = 0\ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $B(\zeta)$ — произведение Бляшке в единичном круге, построенное по нулям $z_1, \ldots, z_n$:

$$B(\zeta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\zeta - z_k}{1 - \bar{z}_k\zeta}.$$

Как известно, всякая функция $g(\zeta)$, принадлежащая H^1 и обращающаяся в нуль в точках $z_1, \ldots, z_n$, имеет вид $g(\zeta) = B(\zeta) \cdot h(\zeta)$, где $h(\zeta) \in H^1$, и наоборот, всякая функция, имеющая такой вид, принадлежит H^1 и обращается в нуль в точках $z_1, \ldots, z_n$. Поэтому

$$E^\perp = \{B(\zeta)\,h(\zeta)\,d\zeta : h(\zeta) \in H^1\}.$$

Из (2) и из полученного описания $E^\perp$ вытекает, что

$$\|L_z\| = \inf_{h \in H^1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \left|\frac{1}{\zeta - z} - B(\zeta)\,h(\zeta)\right| \cdot |d\zeta|.$$

Так как $|B(\zeta)| = 1$ при $|\zeta| = 1$, то

$$\|L_z\| = \inf_{h \in H^1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \left|\frac{1}{(\zeta - z)\,B(\zeta)} - h(\zeta)\right| \cdot |d\zeta|. \tag{3}$$

Будем рассматривать функцию $\frac{1}{(\zeta - z)\,B(\zeta)}$ как элемент пространства L^1 на окружности $|\zeta| = 1$ $\left(\text{по мере } \frac{1}{2\pi}|d\zeta|\right)$. Формула (3) показывает, что расстояние от $\frac{1}{(\zeta - z)\,B(\zeta)} \in L^1$ до подпространства $H^1 \subset L^1$ равно $\|L_z\|$.

Так как $L^{1*} = L^\infty$, а $H^{1\perp} = H^\infty$, то по теореме Хана—Банаха это расстояние равно правой части следующего равенства:

$$\|L_z\| = \sup_{\varphi \in H^\infty;\ \|\varphi\|_{H^\infty} = 1} \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{1}{(\zeta - z)\,B(\zeta)}\,\varphi(\zeta)\,d\zeta\right|. \tag{4}$$

Для оценки сверху sup в правой части (4) мы воспользуемся следующим утверждением, принадлежащим И. Шуру [4, см. также 5, гл. 10, § 2].

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки круга $|\zeta| < 1$, и пусть $\varphi \in H^\infty$, $\|\varphi\|_{H^\infty} = 1$. Тогда существует произведение Бляшке $C(\zeta)$, состоящее не более чем из n множителей Бляшке, интерполирующее функцию $\varphi(\zeta)$ в точках $z_1, \ldots, z_n$:

$$C(z_k) = \varphi(z_k)\ \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $\varphi(\zeta)$ — фиксированная функция из H^∞, $\|\varphi\|_{H^\infty} = 1$ и $C(\zeta)$ — произведение Бляшке, интерполирующее φ в точках $z_1, \ldots, z_n$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1}{(\zeta-z)\,B(\zeta)}\varphi(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1}{(\zeta-z)}\;\frac{C(\zeta)}{B(\zeta)}d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1}{(\zeta-z)}\cdot\frac{\varphi(\zeta)-C(\zeta)}{B(\zeta)}d\zeta.$$

Функция $\frac{\varphi(\zeta)-C(\zeta)}{B(\zeta)}$ аналитична в круге $|\zeta|<1$, и так как $|B(\zeta)|=1$ $|C(\zeta)|=1$, $|\varphi(\zeta)|\leqslant 1$ $(|\zeta|=1)$, то

$$\sup_{|\zeta|<1}\left|\frac{\varphi(\zeta)-C(\zeta)}{B(\zeta)}\right|\leqslant 2.$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta-z}\cdot\frac{\varphi(\zeta)-C(\zeta)}{B(\zeta)}\,d\zeta\right|=\left|\frac{\varphi(z)-C(z)}{B(z)}\right|\leqslant 2$$

и

$$-2+\sup_{C}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1}{(\zeta-z)}\cdot\frac{C(\zeta)}{B(\zeta)}d\zeta\right|\leqslant\sup_{\varphi\in H^\infty,\ \|\varphi\|_{H^\infty}=1}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)\,B(\zeta)}d\zeta\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2+\sup_{C}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1}{(\zeta-z)}\cdot\frac{C(\zeta)}{B(\zeta)}d\zeta\right|,\tag{5}$$

где sup справа и слева берется по всевозможным произведениям Бляшке C степени * не выше n. Пусть $R(\zeta)=\frac{C(\zeta)}{B(\zeta)}$. $R(\zeta)$ — рациональная функция степени не выше чем $2n$, имеющая n полюсов внутри окружности $|\zeta|=1$, и не более, чем n полюсов вне этой окружности, и $|R(\zeta)|=1$ $(|\zeta|=1)$. Пусть $R(\zeta)=R^+(\zeta)+R^-(\zeta)$, где $R^+(\zeta)\in C^+$, $R^-(\zeta)\in C^-$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{1}{(\zeta-z)}\cdot R(\zeta)\,d\zeta=R^+(z).$$

Из (4) и (5) следует, что

$$-2+\sup_{R\in R}|R^+(z)|\leqslant\|L_z\|\leqslant 2+\sup_{R\in R}|R^+(z)|.$$

Здесь sup берется по множеству R_n всех рациональных функций $R(\zeta)$ вида $R(\zeta)=B(\zeta)/C(\zeta)$, где C пробегает множество всех произведений Бляшке степени не выше n. Пусть

$$M_n=\sup_{|z|<1}\sup_{R\in R_n}|R^+(z)|.$$

Ниже будет показано, что $M_n\leqslant(1+2\pi^2 n)^2$. Так как $\|P\|=\sup_{|z|<1}\|L_z\|$, то

$$\|P(z_1,z_2,\ldots,z_n)\|\leqslant 2+(1+2\pi^2 n)^2.$$

Теорема доказана.

Лемма. *Пусть*

$$M_n=\sup_{|z|<1}\sup_{R\in R_n}|R^+(z)|,$$

где R_n — множество всех рациональных функций $R(\zeta)$ вида $R(\zeta)=C(\zeta)/B(\zeta)$, $C(\zeta)$ и $B(\zeta)$ — произведения Бляшке в единичном круге степени не выше n. Тогда

$$M_n\leqslant(1+2\pi^2 n)^2.\tag{6}$$

* Степенью рациональной функции называется наибольшая из степеней ее числителя и знаменателя. Степень произведения Бляшке, очевидно, совпадает с количеством сомножителей Бляшке, из которых состоит это произведение.

Доказательство. Пусть

$$R(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} r_k e^{ik\theta}$$

разложение функции $R(e^{i\theta})$ в ряд Фурье. Тогда

$$R^+(\zeta) = \sum_{k\geqslant 0} r_k \zeta^k \ (|\zeta| < 1), \text{ и } \sup_{|\zeta|\leqslant 1} |R^+(\zeta)| \leqslant \sum_{k\geqslant 0} |r_k|.$$

Пусть

$$B(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ik\theta}, \quad C(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{0} c_k e^{ik\theta}$$

разложения в ряд Фурье функций $B(e^{i\theta})$ и $C^{-1}(e^{i\theta})$. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r_k| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{0} |c_k|\right).$$

Покажем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \leqslant 1 + 2\pi^2 n.$$

Очевидно, $|b_0| \leqslant 1$. Воспользуемся теперь известной оценкой Харди Литтльвуда [1, глава V] для суммы модулей коэффициентов Тейлора аналитической в единичном круге функции через ее вариацию на окружности:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \leqslant \pi \operatorname*{var}_{0}^{2\pi} B(e^{i\theta}). \tag{7}$$

Вариация функции $B(e^{i\theta})$ на сегменте $[0, 2\pi]$ равна ее степени, умноженной на 2π, так как при изменении θ от 0 до 2π точка $B(e^{i\theta})$ двигается по единичной окружности, против часовой стрелки, совершая n оборотов. Отсюда вытекает оценка (7). Оценка для $\sum_{k=-\infty}^{0} |c_k|$ получается аналогично.

Авторы предполагают, что оценка (6) неточна и имеет место оценка $M_n \leqslant C \cdot \ln(n+1)$, где $C < \infty$ — абсолютная константа.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. ИЛ, М., 1963.
2. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций. ГИТТЛ. М.—Л., 1950.
3. В. Э. Кацнельсон. О некоторых операторах, действующих в пространствах, порожденных функциями $1/t - z_k$. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
4. I. Schur. Uber Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind. Journal für reine und angew. Math, 147, 1917, 205—232.
5. Дж Л. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. ИЛ. М., 1961.

Поступила 8 июня 1969 г.