ОБ ИНТЕГРАЛЕ ФЕЙНМАНА

Г. Н. Гестрин

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания движения частицы массы m во внешнем поле с потенциалом $v = v(\boldsymbol{r})$ на промежутке времени $(0, t)$. Р. Фейнман [1, 2] ввел величину

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{\tau \to 0} \left(\frac{2\pi i \hbar \tau}{m} \right)^{-\frac{3}{2}n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -(n)- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(-\tau v(r_k) + \frac{m}{2\tau} |r_k - r_{k-1}|^2 \right)} \times$$

$$\times \psi_0(\boldsymbol{r}_0)\, d\boldsymbol{r}_0 \ldots d\boldsymbol{r}_{n-1}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{x}$, $n\tau = t$, $\psi_0(\boldsymbol{r}_0)$ — функция из $L_2(R_3)$ с единичной нормой, постулировав при этом, что квадрат ее модуля задает плотность вероятности обнаружения частицы в точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени t, если в начальный момент такое распределение вероятностей задано функцией $\psi_0(\boldsymbol{r}_0)$ и за все время t частица не подвергалась наблюдению. В ряде важных случаев формальной конструкции (1.1) можно придать точный смысл, выяснив одновременно связь фейнмановского способа описания движения с обычным шредингеровским. Для гладкого ограниченного потенциала указанное обоснование проведено Ю. Л. Далецким [3]. При более широких предположе-

---

* Входящее в показатель экспоненты выражение

$$\frac{m}{2\tau} \sum_{k=0}^{n} |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_{k-1}|^2 - \sum_{k=0}^{n} v(\boldsymbol{r}_k)\tau$$

представляет собой разностный аналог действия вдоль траектории.

ниях (условия Като [4]) оно содержится в статье Э. Нельсона [5]. Исходной является формула

$$e^{At} = \lim_{\Delta t_k \to 0} \prod_{k=1}^{n} e^{A_0 \Delta t_k} e^{B \Delta t_k} \quad \left(t = \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k\right), \tag{1.2}$$

(здесь $A = A_0 + B$ — производящий оператор полугруппы $T_t = e^{At}$), справедливая при определенных условиях, разные варианты которых получены Ю. Л. Далецким и Троттером [6, 7]. Применение этой формулы осуществляется по следующей простой схеме [5]. Рассматривая самосопряженные операторы

$$\frac{\hbar}{2m}\Delta, \quad \frac{1}{\hbar}v, \quad \frac{\hbar}{2m}\Delta - \frac{1}{\hbar}v^* \tag{1.3}$$

и порождаемые ими группы унитарных операторов

$$P^t_m = e^{it\frac{\hbar}{2m}\Delta}, \quad Q^t_v = e^{-i\frac{t}{\hbar}v}, \quad U^t_{m,v} = e^{it\left(\frac{\hbar}{2m}\Delta - \frac{1}{\hbar}v\right)}, \tag{1.4}$$

в силу упомянутой формулы (1.2) для любого $\psi_0 \in L_2(R_3)$ и любого t можем написать

$$U^t_{m,v}\psi_0 = \lim_{n\to\infty}\left(P^{\frac{t}{n}}_m Q^{\frac{t}{n}}_v\right)^n \psi_0 \tag{1.5}$$

в смысле сильной сходимости. С другой стороны, оператор P^t_m как разрешающий для задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\hbar}{2m}\Delta u; \quad u|_{t=0} = \psi_0 \tag{1.6}$$

представим в виде

$$P^t_m\psi_0 = \left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{im}{2t}|x-y|^2}\psi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}, \tag{1.7}$$

если $\psi_0 \in L_2 \cap L_1$. Подставляя P^t_m из (1.7) и Q^t_v из (1.4) в (1.5), придем с точностью до порядка интегрирования, устанавливаемого в (1.5), к (1.1). Таким образом, для потенциалов Като (1.5) служит точным определением (1.1), а сама величина $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ совпадает с обычной волновой функцией. В цитируемых работах [3] и [5] имеются и другие подходы к определению интеграла по траекториям. В [3] уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\Delta u - \frac{i}{\hbar}vu \tag{1.8}$$

регуляризуется с помощью замены i на $i + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ в коэффициенте при лапласиане, после чего строится интеграл по квазимере, порождаемой фундаментальным решением уравнения $u'_t = \frac{1}{2m}(i + \varepsilon)\Delta u$, а затем ε устремляется к нулю. Как формула (1.2), так и описанные методы определения интеграла [3, 8, 9, 10] нашли применение в исследовании представимости континуальными интегралами фундаментальных решений и решений задач Коши для широких классов эволюционных уравнений. В работе [11] аналогичный вопрос решен и для уравнения Шредингера в вариационных производных.

В [5] показано, что если в (1.8) сделать положительную мнимую добавку к массе m и определить P^t_m формулой (1.7), Q^t_v — формулой (1.4), то

* $\Delta = U^{-1}|\lambda|^2 U$, U — оператор Фурье—Планшереля.

предел (1.5) существует для всех $\psi_0 \in L_2(R_3)$ и операторы $U^t_{m,\varepsilon}$ образуют непрерывную полугруппу. При этом потенциал $v(\boldsymbol{r})$ может иметь сколь угодно высокие сингулярности. Оказывается, что при стремлении мнимой добавки к нулю, предел такого интеграла существует почти для всех действительных значений массы, когда приближение к вещественной оси происходит по некасательному направлению. Пример притягивающего потенциала r^{-2} показывает, что предел (1.5) для действительных значений массы может не существовать.

В настоящей работе рассматривается для простоты случай одной частицы, находящейся во внешнем поле. Дается определение интеграла Фейнмана, отличное от только что приведенных. В частности, оно применимо к ограниченным снизу потенциалам, квадратично суммируемым в каждой конечной области пространства. Показано, что из существования интеграла в таком смысле вытекает определенный способ построения самосопряженного расширения оператора $\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - v$.

Переходим к точному изложению.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА И ЕГО СВЯЗЬ С ПОЛУГРУППОЙ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

Обозначая через U оператор Фурье—Планшереля, действующий в пространстве $L_2(R_3)$, через τ — положительное число, введем в $L_2(R_3)$ унитарный оператор T_τ, положив

$$T_\tau\psi_0 = e^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}U^{-1}\left\{e^{-i\tau|\lambda|^2}Ue^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}\psi_0\right\}, \tag{2.1}$$

где

$$v_\tau(x) = \begin{cases} v(x), & \text{если } |v(x)| \leqslant \tau^{-\frac{1}{4}}, \\ \operatorname{sign} v(x)\,\tau^{-\frac{1}{4}}, & \text{если } |v(x)| > \tau^{-\frac{1}{4}}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Определим далее оператор $R_\tau(t)$ для $t \geqslant 0$ равенством

$$R_\tau(t) = T_\tau^k;\quad k\tau \leqslant t < (k+1)\tau;\quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Пусть для любого $T > 0$ и любого $\psi_0 \in L_2(R_3)$

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^T \| R_\tau(t)\psi_0 - T(t)\psi_0\|^2_{L_2(R_3)}\,dt = 0 \tag{2.4}$$

и предельный оператор $T(t)$ сильно непрерывен при каждом $t \geqslant 0$. Будем называть $T(t)\psi_0$ интегралом Фейнмана. Формальным основанием определения (2.4) является тот факт, что если в (2.1) заменить операторы U и U^{-1} обычными интегралами Фурье и, подставив в (2.3), соответствующим образом изменить порядок интегрирований, то получим

$$T_\tau^k\psi_0 = (4\pi i\tau)^{-\frac{3k}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sim (k) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left\{\frac{|x-s_{k-1}|^2}{4\tau}+\cdots+\frac{|s_1-s_0|^2}{4\tau}-\tau\sum_{j=1}^{k-1}v_\tau(s_j)-\frac{\tau}{2}(v_\tau(\vec{x})+v_\tau(\vec{s}_0))\right\}}\times$$

$$\times\,\psi_0(s_0)\,ds_0\,\ldots\,ds_{n-1}. \tag{2.5}$$

Как видно из сравнения (2.5) и (1.1) (мы приняли в этом параграфе $2m = 1$ и $\hbar = 1$), подынтегральные выражения отличаются лишь индексом τ у потенциала и множителем $\exp\frac{i\tau}{2}(-v_\tau(\boldsymbol{x}) + v_\tau(s_0))$, стремящимся к единице при

$\tau \to 0$. Не выясняя строгих оснований, оправдывающих определение (2.4), заметим некоторые важные свойства оператора $T(t)$, непосредственно следующие из (2.4). Из (2.1) находим

$$\lim_{\tau\to 0} \| T_\tau \psi - \psi \| = 0, \tag{2.6}$$

$$T_\tau^* \psi = \overline{T_\tau \overline{\psi}}. \tag{2.7}$$

Действительно,

$$\| T_\tau \psi - \psi \|^2 = \int_{R_3} \left| e^{-\frac{i\tau}{2} v_\tau(x)} U^{-1} \left\{ e^{-i\tau|\lambda|^2} U e^{-\frac{i\tau}{2} v_\tau(x)} \psi \right\} - \psi(x) \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 4 \int_{R_3} | e^{-i\tau|\lambda|^2} - 1 |^2 \left| U \left(e^{-\frac{i\tau}{2} v_\tau(x)} - 1 \right) \psi(x) \right|^2 d\lambda + 4 \int_{R_3} | e^{-i\tau|\lambda|^2} - 1 |^2 | U\psi |^2 d\lambda +$$

$$+ 2 \int_{R_3} | e^{i\tau v_\tau(x)} - 1 |^2 | \psi(x) |^2 dx \leqslant 24 \int_{R_3} | e^{\frac{i\tau v_\tau(x)}{2}} - 1 |^2 | \psi(x) |^2 dx +$$

$$+ 4 \int_{R_3} | e^{-i\tau|\lambda|^2} - 1 | | U\psi |^2 d\lambda.$$

Отсюда сразу выводится (2.6). Свойство (2.7) получается из равенства

$$T_\tau^* \psi = T_\tau^{-1} \psi = e^{\frac{i\tau}{2} v_\tau(x)} U^{-1} \left\{ e^{i\tau|\lambda|^2} U e^{\frac{i\tau}{2} v_\tau(x)} \psi \right\} \tag{2.8}$$

прямой проверкой.

Так как из (2.4) для любых f и g, принадлежащих $L_2(R_3)$, и любого $T > 0$ следует

$$\lim_{\tau\to 0} \int_0^T (R_\tau(t) f,\ R_\tau(t) g)\, dt = \int_0^T (T(t) f,\ T(t) g)\, dt,$$

то

$$\sum_{k=0}^{m-1} \tau (T_\tau^k f,\ T_\tau^k g) + (T - m\tau)(T_\tau^m f,\ T_\tau^m g) = T(f, g) = \int_0^T (T(t) f,\ T(t) g)\, dt,$$

где $m\tau \leqslant T < (m+1)\tau$. Значит, для любого $t \geqslant 0$

$$(T(t) f,\ T(t) g) = (f, g), \tag{2.9}$$

т. е. $T(t)$ — изометрический оператор. Далее из (2.7) видно, что

$$R_\tau^*(t) \psi = \overline{T_\tau^k \overline{\psi}} = \overline{R_\tau(t) \overline{\psi}}, \tag{2.10}$$

и в силу (2.4)

$$\lim_{\tau\to 0} \int_0^T \| R_\tau^*(t) \psi - \overline{T(t) \overline{\psi}} \|_{L_2(R_3)}^2 dt = 0. \tag{2.11}$$

С другой стороны,

$$\lim_{\tau\to 0} \int_0^T (R_\tau(t) f, \psi)\, dt = \lim_{\tau\to 0} \int_0^T (f, \overline{R_\tau(t) \overline{\psi}})\, dt =$$

$$= \int_0^T (T(t) f, \psi)\, dt = \int_0^T (f, \overline{T(t) \overline{\psi}})\, dt,$$

и значит, для любого $t \geqslant 0$

$$T^*(t) \psi = \overline{T(t) \overline{\psi}}. \tag{2.12}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{T_2}\int_s^{T_1+s}(R_\tau(t)f, g)\,dt\,ds. \tag{2.13}$$

Внутренний интеграл здесь не превышает величины $T_1\|f\|\cdot\|g\|$. Поэтому

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^{T_2}\int_s^{T_1+s}(R_\tau(t)f, g)\,dt\,ds = \int_0^{T_2}\int_s^{T_1+s}(T(t)f, g)\,dt\,ds =$$

$$= \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(T(t+s)f, g)\,dt\,ds. \tag{2.14}$$

Пусть s и t — любые два числа из промежутков $(0, T_2)$ и $(0, T_1)$ соответственно и при этом

$$j\tau \leqslant t < (j+1)\tau,\quad l\tau \leqslant s < (l+1)\tau, \tag{2.15}$$

так что $(j+l)\tau \leqslant t+s < (j+l+2)\tau$. Тогда

$$(R_\tau(s)R_\tau(t)f, g) = \begin{cases} (R_\tau(t+s)f, g), \text{ если } (j+l)\tau \leqslant t+s < (j+l+1)\tau, \\ (T_\tau^{-1}R_\tau(t+s)f, g), \text{ если } (j+l+1)\tau \leqslant t+s < (j+l+2)\tau. \end{cases} \tag{2.16}$$

В обоих случаях

$$|(R_\tau(s)R_\tau(t)f, g) - (R_\tau(t+s)f, g)| \leqslant |(R_\tau(t+s)f, T_\tau g - g)| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|\,\|T_\tau g - g\|,$$

и следовательно,

$$\left|\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(R_\tau(s)R_\tau(t)f, g)\,dt\,ds - \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(R_\tau(t+s)f, g)\,dt\,ds\right| \leqslant T_1T_2\|f\|\,\|T_\tau g - g\|.$$

Отсюда из (2.13) и (2.14) выводим, вспоминая (2.6),

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(R_\tau(s)R_\tau(t)f, g)\,dt\,ds = \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(T(t+s)f, g)\,dt\,ds. \tag{2.17}$$

Однако из (2.4) и (2.11) получается

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(R_\tau(s)R_\tau(t)f, g)\,dt\,ds = \lim_{\tau\to 0}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(R_\tau(t)f, R_\tau^*(s)g)\,dt\,ds =$$

$$= \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(T(t)f, T^*(s)g)\,dt\,ds = \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}(T(s)T(t)f, g)\,dt\,ds. \tag{2.18}$$

Сравнивая (2.17) и (2.18), имеем окончательно для любых $t \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$

$$T(t+s) = T(t)\cdot T(s). \tag{2.19}$$

Легко убедиться, что $T(0) = E$. В самом деле, из (2.9) и (2.12) для любого g можем написать

$$T(0)\overline{T(0)\cdot g} = \bar{g}, \text{ или } T(0)\cdot A\cdot T(0) = A,$$

где через A обозначен оператор сопряжения. Учитывая равенство $T^2(0) = T(0)$, находим

$$AT(0) = T(0)A\cdot T^2(0) = T(0)AT(0) = A,$$

откуда сразу следует требуемое. Покажем теперь, что оператор $T(t)$ унитарен. Необходимо проверить, что он отображает $L_2(R_3)$ на все $L_2(R_3)$. Пусть при некотором $t_0 > 0$ это не имеет места. Тогда найдется элемент $g \neq 0$ такой, что $(T(t_0)f, g) = 0$ для всех $f \in L_2(R_3)$. Тогда

$$T^*(t_0)g = \overline{T(t_0)\cdot\overline{g}} = 0 \text{ и } T(t_0)\cdot\overline{g} = 0,$$

а значит, в силу группового свойства (2.19) будет верно и равенство $T(s)\overline{g} = 0$ для $s \geqslant t_0$. Но, обращаясь к (2.4), найдем

$$0 = \lim_{\tau\to 0}\int_s^T \|R_\tau(t)\overline{g}\|^2 dt = (T-s)\|g\|^2, \text{ т. е. } g = 0.$$

Таким образом, установлено, что семейство операторов $T(t)$ является непрерывной унитарной полугруппой. Такая полугруппа (даже в предположении измеримости) обладает самосопряженным производящим оператором $\tilde{H}$ [12]. При этом для любого $f \in D_{\tilde{H}}$

$$\frac{dT(t)f}{dt} = i\tilde{H}T(t)f. \tag{2.20}$$

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛА

В этом параграфе предполагается суммируемость потенциала с квадратом в каждой конечной области. Фиксируя какое-нибудь $t_0 > 0$, возьмем гильбертово пространство функций $\psi(x, t)$, определенных на $R_3 \times [0, t_0]$ и суммируемых с квадратом (H_{t_0}):

$$\|\psi\|^2_{H_{t_0}} = \int_0^{t_0}\int_{R_3} |\psi(x, t)|^2 dx\, dt. \tag{3.1}$$

Для введенной в предыдущем параграфе функции $R_\tau(t)\psi_0$

$$\|R_\tau(t)\psi_0\|^2_{H_{t_0}} = t_0. \tag{3.2}$$

Пространство H_{t_0} сепарабельно. Поэтому всякое ограниченное множество в нем слабо компактно. Существует стремящаяся к нулю подпоследовательность значений $\tau \to 0$, для которой соответствующая подпоследовательность $\{R_\tau(t)\psi_0\}$ слабо сходится к некоторой предельной функции $\psi(x, t) \in H_{t_0}$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть G — произвольная ограниченная область пространства R_3, $g(x, t)$ — финитна при каждом t из $[0, t_0]$ с носителем G, причем в цилиндре $\overline{G} \times [0, t_0]$ существуют и непрерывны $g'_t(x, t)$, $g''_{t^2}(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial t}\Delta g(x, t)$, $\Delta^2 g(x, t)$ и кроме того $g(x, t_0) = 0$.*

Тогда справедливо тождество

$$-\int_0^{t_0}\int_G \psi(x, t)\overline{g'_t(x, t)}\, dx\, dt - \int_G \psi_0(x)\overline{g(x, 0)}\, dx =$$

$$= i\int_0^{t_0}\int_G \psi(x, t)(\Delta\overline{g} - v\overline{g})\, dx\, dt. \tag{3.3}$$

Доказательство. Положим для краткости $g(x, k\tau) = g_k(x)$ и

$$\psi_{k+1}(x) = T_\tau\psi_k(x). \tag{3.4}$$

Умножим скалярно обе части (3.4) на $\exp\left(\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)\right)\ \overline{g_k(x)}$ и просуммируем по всем k от 0 до $n-1$, где $n\tau \leqslant t_0 < (n+1)\tau$. Получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_G \psi_{k+1}(x)\overline{g_k(x)}e^{\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_G \psi_k(x)\overline{g_k(x)}e^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{R_3}(e^{-i\tau|\lambda|^2}-1+i\tau|\lambda|^2)Ue^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}\psi_k(x)\overline{Ug_k}\,d\lambda -$$
$$-i\tau\sum_{k=0}^{n-1}\int_{R_3}|\lambda|^2Ue^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}\psi_k(x)\overline{Ug_k}\,d\lambda. \tag{3.5}$$

Так как для достаточно гладкой финитной функции $g_k(x)$

$$(-1)^s|\lambda|^{2s}Ug_k = U(\Delta^s g_k), \tag{3.6}$$

то

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{R_3}(e^{-i\tau|\lambda|^2}-1+i\tau|\lambda|^2)Ue^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}\psi_k(x)\overline{Ug_k}\,d\lambda\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\tau^2}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{R_3}\left|Ue^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}\psi_k(x)\right||U\Delta^2 g_k|\,d\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\tau}{2}\|\psi_0\|\max_{x,t}|\Delta^2 g(x,t)|\sqrt{\operatorname{mes} G} = O(\tau). \tag{3.7}$$

И также

$$i\tau\sum_{k=0}^{n-1}\int_{R_3}|\lambda|^2Ue^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}\psi_k(x)\overline{Ug_k}\,d\lambda = -i\tau\sum_{k=0}^{n-1}\int_G\psi_k(x)\overline{\Delta g_k}(x)\,dx -$$
$$-i\tau\sum_{k=0}^{n-1}\int_G\left(e^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}-1\right)\psi_k(x)\overline{\Delta g_k(x)}\,dx =$$
$$= -i\tau\sum_{k=0}^{n-1}\int_G\psi_k(x)\overline{\Delta g_k(x)}\,dx + O\left(\tau^{\frac{3}{4}}\right). \tag{3.8}$$

Преобразуем левую часть равенства (3.5)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_G \psi_{k+1}(x)\overline{g_k(x)}e^{\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_G \psi_k(x)\overline{g_k(x)}e^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_G(\psi_{k+1}(x)-\psi_k(x))\overline{g_k(x)}\,dx + \frac{i\tau}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_G(\psi_{k+1}(x)+\psi_k(x))\overline{g_k(x)}v_\tau(x)\,dx +$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_G\psi_{k+1}(x)\overline{g_k(x)}\left(e^{\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}-1-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)\right)dx -$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\int_G\psi_k(x)\overline{g_k(x)}\left(e^{-\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}-1+\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)\right)dx. \tag{3.9}$$

Пользуясь неравенствами

$$\left|e^{\pm\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}-1\mp\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)\right| \leqslant \frac{\tau^2 v_\tau^2(x)}{8} \leqslant \frac{\tau^{3/2}}{8}, \tag{3.10}$$

получим оценку

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_G \psi_s(x)\,\overline{g_k(x)}\left(e^{\pm\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)}-1\mp\frac{i\tau}{2}v_\tau(x)\right)dx\right|\leqslant\frac{\sqrt{\tau}}{8}\sqrt{\operatorname{mes}G}\max_{x,\,t}|g(x,t)|, \tag{3.11}$$

где $s=k+1,\,k$.

С учетом (3.7), (3.8), (3.11) перепишем формулу (3.5) в виде

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\int_G \psi_k(x)\,(\overline{g_k(x)}-\overline{g_{k-1}(x)})\,dx+\int_G\psi_n(x)\,\overline{g_{n-1}(x)}\,dx-\int_G\psi_0(x)\,\overline{g_0(x)}\,dx+$$

$$+\frac{i\tau}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_G\overline{g_k(x)}\,(\psi_{k+1}(x)+\psi_k(x))\,v_\tau(x)\,dx=$$

$$=i\tau\sum_{k=0}^{n-1}\int_G\psi_k(x)\,\overline{\Delta g_k(x)}\,dx+O(\sqrt{\tau}). \tag{3.12}$$

Так как

$$\left|\int_G\psi_n(x)\,\overline{g_{n-1}(x)}\,dx\right|\leqslant\max_x|g(x,\,(n-1)\tau)|\sqrt{\operatorname{mes}G} \tag{3.13}$$

и $g(x,\,t_0)=0$, то предел второго слагаемого в левой части (3.12) при $\tau\to 0$ равен нулю. Для вычисления пределов двух входящих туда слагаемых заметим, что по определению функций $\psi_k(x)$

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^{t_0}\int_G R_\tau(t)\,\psi_0\overline{g_t'(x,\,t)}\,dx\,dt=\int_0^{t_0}\int_G\psi(x,\,t)\,\overline{g_t'(x,\,t)}\,dx\,dt. \tag{3.14}$$

Однако

$$\int_0^{t_0}\int_G R_\tau(t)\,\psi_0\overline{g_t'(x,\,t)}\,dx\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_G\psi_k(x)\,[\overline{g_{k+1}(x)}-\overline{g_k(x)}]\,dx+O(\tau)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\int_G\psi_k(x)\,[\overline{g_k(x)}-\overline{g_{k-1}(x)}]\,dx+\sum_{k=1}^{n-1}\int_G\psi_k(x)\,[\overline{g_{k+1}(x)}-2\overline{g_k(x)}+$$

$$+\overline{g_{k-1}(x)}]\,dx+O(\tau)=\sum_{k=1}^{n-1}\int_G\psi_k(x)\,[\overline{g_k(x)}-\overline{g_{k-1}(x)}]\,dx+O(\tau). \tag{3.15}$$

Следовательно,

$$\lim_{\tau\to 0}\sum_{k=1}^{n-1}\int_G\psi_k(x)\,[\overline{g_k(x)}-\overline{g_{k-1}(x)}]\,dx=\int_0^{t_0}\int_G\psi(x,\,t)\cdot\overline{g_t'(x,\,t)}\,dx\,dt. \tag{3.16}$$

Подобно этому, исходя из предельного соотношения

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^{t_0}\int_G R_\tau(t)\,\psi_0\,\overline{g(x,\,t)}\,v_\tau(x)\,dx\,dt=\int_0^{t_0}\int_G\psi(x,\,t)\,\overline{g(x,\,t)}\,v(x)\,dx\,dt\,^*, \tag{3.17}$$

---

* Здесь мы воспользовались оценкой

$$\left|\int_0^{t_0}\int_G R_\tau(t)\,\psi_0\overline{g(x,\,t)}\,(v_\tau(x)-v(x))\,dx\,dt\right|\leqslant t_0\max_{x,\,t}|g(x,\,t)|\,\|v_\tau-v\|\to 0,$$

так как $v_\tau(x)\to v(x)$ почти всюду и $(v_\tau(x)-v(x))^2\leqslant 4v^2(x)$.

а также используя равенство

$$\int_0^{t_0}\int_G R_\tau(t)\,\psi_0\,\overline{g(x,t)}\,v_\tau(x)\,dx\,dt = \frac{\tau}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_G \overline{g_k(x)}\,(\psi_{k+1}(x) + \psi_k(x))\,v_\tau(x)\,dx + O(\tau^{3/4}),$$

найдем

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\tau}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_G g_{k+1}\overline{(x)}\,(\psi_{k+1}(x)+\psi_k(x))\,v_\tau(x)\,dx = \int_0^{t_0}\int_G \psi(x,t)\,\overline{g(x,t)}\,v(x)\,dx\,dt. \tag{3.18}$$

Наконец, сравнивая сумму в правой части (3.12) с интегралом

$$\int_0^{t_0}\int_G R_\tau(t)\,\psi_0\,\overline{\Delta g(x,t)}\,dx\,dt, \tag{3.19}$$

устанавливаем равенство

$$\lim_{\tau\to 0}\tau\sum_{k=0}^{n-1}\int_G \psi_k(x)\,\overline{\Delta g_k(x)}\,dx = \int_0^{t_0}\int_G \psi(x,t)\,\overline{\Delta g(x,t)}\,dx\,dt. \tag{3.20}$$

Собирая оценки (3.13), (3.16), (3.18) и (3.20) и переходя к пределу в (3.12) при $\tau\to 0$, завершаем доказательство. Тем самым показано, что предельная функция $\psi(x,t)$ слабо сходящейся подпоследовательности $\{R_\tau(t)\,\psi_0\}$ является обобщенным решением задачи Коши для уравнения Шредингера. Если выполнены какие-либо условия, обеспечивающие единственность такого решения, то известным образом устанавливается сходимость всей последовательности. Это имеет место, когда в дополнение к предположению о суммируемости с квадратом потенциала в каждой конечной области требуется существенная самосопряженность оператора $-\Delta + v$.

Лемма 2. *Пусть $g(x)$ — произвольная достаточно гладкая финитная функция с носителем G, λ — любое комплексное число. Тогда для почти всех $t_1 < t_0$ справедливо тождество*

$$i\lambda\int_0^{t_1}\int_G e^{-i\lambda t}\psi(x,t)\,\overline{g(x)}\,dx\,dt + e^{-i\lambda t_1}\int_G \psi(x,t_1)\,\overline{g(x)}\,dx -$$
$$-\int_G \psi_0(x)\,\overline{g(x)}\,dx = i\int_0^{t_1}\int_G \psi(x,t)\,e^{-i\lambda t}\,(\Delta\overline{g(x)} - v(x)\,\overline{g(x)})\,dx\,dt. \tag{3.21}$$

Доказательство. Пусть t_1 — произвольное число, не большее, чем t_0. Положив в интегральном тождестве леммы 1

$$g(x,t) = \begin{cases}(t_1-t)^3 e^{i\bar\lambda t} g(x), & \text{для } t\leqslant t_1,\\ 0 & , \text{для } t\geqslant t_1\end{cases} \tag{3.22}$$

и трижды дифференцируя по t_1, приходим к (3.21). При этом множество тех значений t_1, для которых (3.21) верно, во всяком случае содержит множество тех значений t_1, для которых

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t_1}^{t_1+h}\int_{R_3}|\psi(x,t)-\psi(x,t_1)|^2\,dx\,dt = 0, \tag{3.23}$$

а потому может считаться не зависящим от выбора функции $g(x)$ и области G.

Переходим к доказательству единственности. Обозначая через $\omega(x,t)$

разность двух возможных решений, получаем из (3.21) следующее равенство:

$$\lambda \int_0^{t_1}\int_G e^{i\lambda(t_1-t)}\,\omega(x,t)\overline{g(x)}\,dx\,dt = \int_G\int_0^{t_1} (e^{i\lambda(t_1-t)}-1)\,\omega(x,t)\,dt\,(\Delta\bar g - v\bar g)\,dx. \quad (3.24)$$

Пусть H есть самосопряженный оператор, получаемый замыканием симметрического оператора $\Delta - v$ с множества достаточно гладких финитных функций, и E_μ — соответствующее ему разложение единицы. Тождество (3.24) распространяется тогда путем предельного перехода на всю область определения H и принимает вид

$$\lambda \int_{R_3} \overline{g(x)} \int_0^{t_1} e^{i\lambda(t_1-t)}\omega(x,t)\,dt\,dx = \int_{R_3}\int_0^{t_1} (e^{i\lambda(t_1-t)}-1)\,\omega(x,t)\,dt\overline{Hg(x)}\,dx, \quad (3.25)$$

фиксируем число $\delta > 0$ и полагаем

$$P_n(\mu) = \begin{cases} e^{-\frac{i\pi}{\delta}\mu}\sin\frac{\pi}{\delta}\mu, & \text{если } n\delta \leqslant \mu \leqslant (n+1)\delta, \\ 0 & , \text{если } \mu \,\bar\in\, [n\delta,\ (n+1)\delta]. \end{cases} \quad (3.26)$$

Возьмем в (3.25) $\lambda = n\delta$ и

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(\mu)\,dE_\mu\varphi. \quad (3.27)$$

Тогда получаем

$$n\delta \int_{R_3}\int_0^{t_1} e^{in\delta(t_1-t)}\omega(x,t)\,dt\ \overline{\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} P_n(\mu)\,dE_\mu\varphi}\,dx = \int_{R_3}\int_0^{t_1} (e^{in\delta(t_1-t)} -$$

$$- 1)\,\omega(x,t)\,dt\ \overline{\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \mu P_n(\mu)\,dE_\mu\varphi}\,dx.$$

Суммируя такие равенства по n от $-N$ до N, найдем

$$\int_0^{t_1}\int_{-\infty}^{+\infty} R_N^{(1)}(\mu)\,d\,(E_\mu\varphi,\ \omega(x,t))\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mu R_N^{(2)}(\mu)\,d\left(E_\mu\varphi,\ \int_0^{t_1}\omega(x,t)\,dt\right), \quad (3.28)$$

где

$$R_N^{(1)}(\mu) = \begin{cases} (n\delta - \mu)\,e^{-in\delta(t_1-t)}P_n(\mu) & \text{при } \mu\in[n\delta,\ (n+1)\delta], \\ 0 & \text{при } |\mu| \geqslant N\delta, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$R_N^{(2)}(\mu) = \begin{cases} P_n(\mu) & \text{при } \mu\in[n\delta,\ (n+1)\delta], \\ 0 & \text{при } |\mu| \geqslant N\delta. \end{cases} \quad (3.30)$$

Вводя оператор

$$R\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} R_N^{(1)}(\mu)\,dE_\mu\varphi, \quad (3.31)$$

оценим левую часть (3.28)

$$\left|\int_0^{t_1}\int_{-\infty}^{+\infty} R_N^{(1)}(\mu)\,d\,(E_\mu\varphi,\ \omega(x,t))\,dt\right| = \left|\int_0^{t_1}(R\varphi,\ \omega(x,t))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^{t_1}\|R\varphi\|^2\,dt\right\}^{1/2}\left\{\int_0^{t_1}\|\omega(x,t)\|^2_{L_2(R_3)}\,dt\right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{t_1}\,\|\varphi\|\,\|\omega\|_{H_{t_0}}\,\delta. \quad (3.32)$$

Следовательно, для правой части (3.28) будет

$$\left| \int_{-N\delta}^{+N\delta} \mu e^{-\frac{i\pi}{\delta}\mu} \sin \frac{\pi}{\delta} \mu \, d\left(E_\mu \varphi, \int_0^{t_1} \omega(x, t)\, dt\right) \right| \leqslant \sqrt{t_0} \, \|\varphi\| \, \|\omega\|_{H_{t_0}} \delta. \quad (3.33)$$

Пусть $\varphi \in D_H$. Тогда, переходя в (3.33) к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-\frac{i\pi}{\delta}\mu} \sin \frac{\pi}{\delta} \mu \, d\left(E_\mu \varphi, \int_0^{t_1} \omega(x, t)\, dt\right) \right| \leqslant \sqrt{t_0} \, \|\varphi\| \, \|\omega\|_{H_{t_0}} \delta. \quad (3.34)$$

Вполне аналогично можно установить, что

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu e^{-\frac{i\pi}{\delta}\mu} \cos \frac{\pi}{\delta} \mu \, d\left(E_\mu \varphi, \int_0^{t_1} \omega(x, t)\, dt\right) \right| \leqslant \sqrt{t_0} \, \|\varphi\| \, \|\omega\|_{H_{t_0}} \delta. \quad (3.35)$$

Комбинируя (3.34) и (3.35) и устремляя к нулю δ, найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu \, d\left(E_\mu \varphi, \int_0^{t_1} \omega(x, t)\, dt\right) = 0, \quad (3.36)$$

или

$$\left(H\varphi, \int_0^{t_1} \omega(x, t)\, dt\right) = 0. \quad (3.37)$$

Возвращаясь к (3.25) и заменяя там $g(x)$ на $\varphi(x)$, находим

$$\int_{R_s} \int_0^{t_1} e^{i\lambda(t_1 - t)} \omega(x, t)\, dt \, \overline{(H\varphi - \bar{\lambda}\varphi)}\, dx = 0. \quad (3.38)$$

Если λ невещественно, то множество $H\varphi - \bar{\lambda}\varphi$ совпадает со всем пространством, когда φ пробегает D_H, а значит, для почти всех x

$$\int_0^{t_1} e^{i\lambda(t_1 - t)} \omega(x, t)\, dt = 0. \quad (3.39)$$

Отсюда сразу заключаем, что $\omega(x, t) = 0$ почти всюду.

Остается сделать последние замечания. Рассмотрим функцию

$$\psi_0(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, dE_\lambda \psi_0. \quad (3.40)$$

Предположим сначала, что $\psi_0 \in D_{H^2}$. Используя предположение о суммируемости с квадратом потенциала во всякой конечной области, легко убедиться в том, что для достаточно гладкой финитной $g(x, t)$ функция

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, d(E_\lambda \psi_0, g(x, t)) \quad (3.41)$$

непрерывно дифференцируема и при этом

$$S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda e^{i\lambda t} \, d(E_\lambda \psi_0, g(x, t)) + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} \, d(E_\lambda \psi_0, g'_t(x, t)). \quad (3.42)$$

Пользуясь этой формулой и предположив дополнительно, что $g(x, t_0) = 0$, легко доказать, что $\psi_0(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству леммы 1. Таким образом, для $\psi_0 \in D_{H^2}$ из доказанной единственности следует

$$\psi(x, t) = \psi_0(x, t), \tag{3.43}$$

т. е. при $\tau \to 0$ $\{R_\tau(t)\psi_0\}$ слабо сходится к $\psi_0(x, t)$ в метрике пространства H_{t_0}. Так как, однако,

$$\|\psi_0(x, t)\|^2_{H_{t_0}} = t_0,$$

то, вспоминая (3.2), можем сделать вывод о сильной сходимости и из плотности D_{H^2} в $L_2(R_3)$ о том, что эта сходимость имеет место для любой начальной функции из $L_2(R_3)$. Этими замечаниями доказана следующая

Теорема. *Если оператор Шредингера* $-\Delta + v$ *существенно самосопряженный и потенциал* $v(x)$ *суммируем с квадратом в каждой конечной области пространства, то предел последовательности* $\{R_\tau(t)\psi_0\}$, *определяемый формулами* (2.1)—(2.3) *при* $\tau \to 0$ *в метрике* H_{t_0}, *существует для любой начальной функции* ψ_0 *из* $L_2(R_3)$ *и дает решение задачи Коши, соответствующее этому начальному условию.*

Доказанная теорема дает довольно широкие условия существования предела (2.4). В частности, как уже отмечалось выше, потенциалы, ограниченные снизу и имеющие квадратично интегрируемые особенности, заведомо удовлетворяют ее требованиям.

4. СВЯЗЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ (2.4) С САМОСОПРЯЖЕННЫМИ РАСШИРЕНИЯМИ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Определяя первоначально оператор $-\Delta + v$ на гладких финитных функциях, равных нулю в окрестностях особых точек потенциала, замкнем его с указанного множества и полученный таким образом замкнутый симметрический оператор обозначим через H_0. Проведенное в предыдущем параграфе доказательство леммы 1 без изменений переносится и на тот случай, когда сингулярности потенциала произвольны, если только под G понимать любую конечную область, не содержащую особых точек потенциала и под $g(x, t)$ — функцию, достаточно гладкую и равную нулю вне такой области. Если τ достаточно мало, то на G $v_\tau(x) = v(x)$, и некоторые детали доказательства становятся излишними. Тождество (3.21) при $\lambda = 0$ принимает вид

$$\int_G \psi(x, t_1)\overline{g(x)}\,dx - \int_G \psi_0(x)\overline{g(x)}\,dx = i\int_0^{t_1}\int_G \psi(x, t)\left(\overline{\Delta g(x)} - v(x)\overline{g(x)}\right)dx\,dt \tag{4.1}$$

и для любой $g(x) \in D_{H_0}$ получаем

$$\int_{R_3} \psi(x, t_1)\overline{g(x)}\,dx - \int_{R_3} \psi_0(x)\overline{g(x)}\,dx = i\int_0^{t_1}\int_{R_3} \psi(x, t)\overline{H_0 g(x)}\,dx\,dt, \tag{4.2}$$

откуда следует, что для почти всех t_1

$$i\int_0^{t_1} \psi(x, t)\,dt \in D_{H_0^*} \quad \text{и} \quad iH_0^*\int_0^{t_1} \psi(x, s)\,ds = \psi(x, t_1) - \psi_0(x), \tag{4.3}$$

или

$$iH_0^*\int_0^{t_1} T(s)\psi_0\,ds = T(t_1)\psi_0 - \psi_0. \tag{4.4}$$

Деля обе части (4.4) на t_1 и переходя к пределу при $t_1 \to 0$ (по той последовательности t_1, для которой (4.3) верно) и предполагая также, что $\psi_0 \in D_{\tilde{H}}$, получаем в силу замкнутости оператора H_0^*

$$H_0^* \psi_0 = \tilde{H}\psi_0, \tag{4.5}$$

т. е. $D_{\tilde{H}} \subseteq D_{H_0^*}$ и $\tilde{H} \subseteq H_0^*$. Следовательно,

$$H_0^{**} = H_0 \subseteq \tilde{H}^* = \tilde{H}. \tag{4.6}$$

Теорема. *Если интеграл Фейнмана, понимаемый в смысле определения* (2.4), *существует, то производящий оператор порождаемой им унитарной полугруппы является самосопряженным расширением симметрического оператора* $-\Delta + v$, *определенного на финитных функциях, равных нулю в окрестностях особых точек потенциала.*

Автор признателен Ю. Л. Далецкому, В. А. Марченко и Л. А. Пастуру за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Вопросы причинности в квантовой механике». ИЛ, 1955.
2. Р. Фейнман, А. Хибс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Изд-во «Мир», М., 1968.
3. Ю. Л. Далецкий. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями. «Усп. матем. наук», т. XVII, вып. 5 (107), 1962.
4. T. Kato. Fundamental properties of Hamiltonian operatores of Schrödinger type. Transactions of the American mathematical society. V. 70, Number 2. March, 1951.
5. E. Nelson. Feynman Yntegrals and the Schrödinger Eguation. Journal of mathematical physics, V. 5. № 3. March, 1964.
6. Ю. Л. Далецкий. Континуальные интегралы, связанные с некоторыми дифференциальными уравнениями и системами. ДАН СССР, **137**, № 2, 268—271, 1969.
7. H. F. Trotter. On the product of semi groups of operatores. Proceedings of the American Mathematical Society, V. 10, № 4. August, 1959.
8. Ю. Л. Далецкий. О представимости решений некоторых уравнений в виде континуальных интегралов. ДАН СССР, 134, № 5, 1013—1016, 1960.
9. Ю. Л. Далецкий. Фундаментальные решения операторных уравнений и континуальные интегралы. «Изв. вузов, Математика», **3**, 27—48, 1961.
10. Ю. Л. Далецкий. Континуальные интегралы и характеристики, связанные с группой операторов. ДАН СССР, **141**, № 6, 1290—1293, 1961.
11. Ю. Л. Далецкий и В. В. Стремский. Фейнмановские интегралы для уравнения Шредингера в функциональных производных. «Усп. матем. наук», XXIV, вып. 1, 145, 1969.
12. J. L. B Cooper. One-parameter semigroups of isometric operatores in Hilbert space. Annals of Mathematics, v. 48, № 4. October, 1947.

Поступила 2 июня 1969 г.