ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ПРИ КОТОРЫХ ДВУМЕРНЫЙ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЙ ЗАКОН ИМЕЕТ ТОЛЬКО БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ КОМПОНЕНТЫ

Л. З. Лившиц

Обозначим через I_0^n класс n-мерных безгранично делимых законов, имеющих только безгранично делимые компоненты. Проблема описания этого класса не решена до конца даже для $n = 1$, но в этом случае имеются многочисленные результаты [1]*. О случае $n > 1$ известно значительно меньше. Здесь доказано, что классу I_0^n принадлежит n-мерный закон Гаусса [10], n-мерный закон Пуассона [11], композиция n-мерного закона Гаусса и n-мерного закона Пуассона [6, 8]. Эти результаты были обобщены Р. Куппенсом [9], который доказал принадлежность I_0^n некоторого специального класса n-мерных безгранично делимых законов, содержащего законы Гаусса, Пуассона и их композицию**. В настоящей работе мы указываем менее жесткие, чем в [9], достаточные условия для принадлежности безгранично делимого закона с ограниченным пуассоновым спектром классу I_0^2, а также приводим некоторые достаточные условия принадлежности классу I_0^2 безгранично делимого закона с неограниченным пуассоновым спектром.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем придерживаться следующих обозначений: R^n — вещественное, C^n — комплексное, евклидово пространство, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1 \ldots, y_n)$ — их векторы (точки); $\operatorname{Re}\boldsymbol{x} = (\operatorname{Re} x_1, \ldots, \operatorname{Re} x_n)$, $\operatorname{Im}\boldsymbol{x} = (\operatorname{Im} x_1, \ldots, \operatorname{Im} x_n)$; $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}> = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$; $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}>}$, если $\boldsymbol{x} \in R^n$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{|\operatorname{Re}\boldsymbol{x}|^2 + |\operatorname{Im}\boldsymbol{x}|^2}$, если $\boldsymbol{x} \in C^n$.

Мы будем называть n-мерным вероятностным законом любую вполне конечную меру $P(E)$, определенную на классе борелевских множеств пространства R^n и нормированную условием $P(E) = 1$.

Характеристической функцией (х. ф.) закона P называется функция $\varphi(\boldsymbol{t}; P)$, определенная для всех $\boldsymbol{t} \in R^n$ равенством

$$\varphi(\boldsymbol{t}; P) = \int e^{i<t,\, x>} d_x P$$

(здесь и далее при интегрировании по всему пространству область интегрирования не указывается).

Если при всех $\boldsymbol{t} \in R^n$ справедливо равенство

$$\varphi(\boldsymbol{t}; P) = \varphi(\boldsymbol{t}; P_1)\, \varphi(\boldsymbol{t}; P_2),$$

то говорят, что вероятностный закон P является композицией законов P_1 и P_2, а последние считаются его компонентами.

Характеристическая функция называется целой в C^n, если она аналитически продолжается на все пространство C^n. Нам понадобятся следующие факты о целых характеристических функциях:

---

* Изучению класса I_0^1 посвящены также работы [2, 3, 4, 5].

** Мы не упоминаем о работе И. В. Островского [7], в которой даны достаточные условия принадлежности I_0^n безгранично делимого закона без гауссовой компоненты, поскольку эти результаты лежат в стороне от темы настоящей работы.

1. [7, § 2, лемма 1]. Если х. ф. $\varphi(t; P)$ — целая функция в C^n, то при всех $t \in C^n$ справедливо равенство

$$\varphi(t;\ P) = \int e^{i<t,\ x>} d_x P,$$

в котором интеграл сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве в C^n, и справедливо «свойство хребта»

$$|\varphi(t;\ P)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im} t;\ P). \tag{1}$$

2. [7, § 2, лемма 2]. Если х. ф. $\varphi(t; P)$ n-мерного закона P является целой функцией в C^n, то и х. ф. любой его компоненты является целой функцией в C^n.

Вероятностный закон P называется безгранично делимым, если для любого натурального m существует закон P_m такой, что

$$\varphi(t;\ P) = [\varphi(t;\ P_m)]^m.$$

Общий вид характеристической функции безгранично делимого закона (б. д. з.) в R^n дает теорема Леви — Хинчина [12].

Для того чтобы вероятностный закон P являлся б. д. з. в R^n, необходимо и достаточно, чтобы его х. ф. допускала представление

$$\varphi(t;\ P) = \exp\left\{i < \beta,\ t > - \sum_{j,\ k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k + \int \left(e^{i<t,\ x>} - 1 - \frac{i<t,\ x>}{1+|x|^2}\right) d_x \omega_P,\right. \tag{2}$$

где $\beta \in R^n$; $\sum_{j,\ k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k$ — положительно определенная квадратичная форма; ω_P — вполне σ-конечная мера на классе борелевских множеств в R^n, удовлетворяющая условию

$$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2} d_x \omega_P < \infty. \tag{3}$$

Меру ω_P назовем спектральной мерой закона P.

Имеет место теорема единственности представления (2) для х. ф. безгранично делимого закона.

Будем говорить, что мера ω_P сосредоточена во множестве E, если для любого борелевского множества A

$$\omega_P(A) = \omega_P(E \cap A).$$

Если E_P — наименьшее замкнутое множество, в котором сосредоточена мера ω_P, то $S_P = E_P / \{0\}$ будем называть пуассоновым спектром закона P.

Одной из основных задач теории разложений вероятностных законов является характеризация класса I_0^n.

Обозначим через $\mathcal{L}^1$ класс, состоящий из одномерных б. д. з., пуассонов спектр которых содержится во множестве $\{p_m\}$, причем элементы $\{p_m\}$ удовлетворяют условию:

если $\operatorname{sgn} p_M = \operatorname{sgn} p_m$, то при $|p_M| > |p_m|$ число $\frac{p_M}{p_m}$ есть натуральное.

Класс $\mathcal{L}^1$ был введен Ю. В. Линником [1], который доказал, что при дополнительном условии достаточно быстрого убывания «масс» на бесконечност и из принадлежности закона $\mathcal{L}^1$ следует его принадлежность I_0^1. Эти условия были ослаблены И. В. Островским. Приведем формулировку соответствующего результата.

3. [5]. Пусть б. д. з. $P \in L^1$. Если при некотором $c > 0$ справедлива оценка

$$\int\limits_{|x|>r} d_x \omega_P = O\left(e^{-cr^2}\right) \ (r \to \infty),$$

то

$$P \in I_0^1.$$

В дальнейшем будет использован следующий примыкающий к теореме 3 результат.

4. [5]. Характеристическая функция $\varphi(t;\ P)$ одномерного закона P, удовлетворяющего условиям теоремы 3, является целой функцией.

Мы укажем для случая $n = 2$ достаточные условия, при выполнении которых для б. д. з. P следует его принадлежность классу I_0^2.

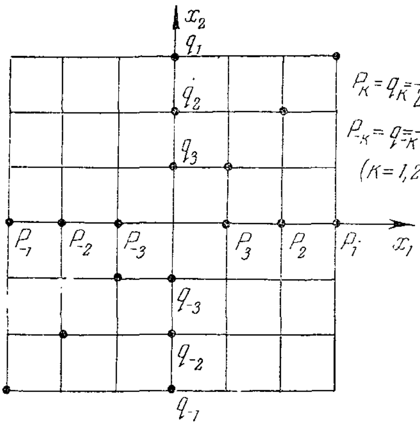

Рис. 1.

Объектом нашего рассмотрения будет служить класс L^2 безгранично делимых законов, пуассонов спектр которых содержится в декартовых произведениях $K_1 \times K_2$, где $K_1 = \{p_m\}$, $K_2 = \{q_n\}$ — последовательности вещественных чисел, элементы которых удовлетворяют условию

$A)$ $0 \in K_1$; $0 \in K_2$. Если $\operatorname{sgn} p_M = \operatorname{sgn} p_m$ $(\operatorname{sgn} q_N = \operatorname{sgn} q_n)$, то при $|p_M| > |p_m|$ $(|q_N| > |q_n|)$ число $\frac{p_M}{p_m}$ $\left(\frac{q_N}{q_n}\right)$ есть натуральное;

и для спектральной меры ω_P справедлива оценка

$$B) \quad \int\limits_{|x|>r}\!\!\int d_x \omega_P = O\left(e^{-cr^2}\right) \ (c > 0).$$

В дальнейшем будем предполагать, что $p_0 = q_0 = 0$.

Назовем пуассоновой сеткой закона $P \in \mathcal{L}^2$ пересечение всех множеств типа $K_1 \times K_2 \setminus \{(0,\ 0)\}$, содержащих его спектр. Очевидно, что пуассонова сетка также является множеством типа $K_1 \times K_2 \setminus \{(0,\ 0)\}$.

Заметим, что мы не требуем, чтобы в каждом узле пуассоновой сетки была сосредоточена ω_P-мера.

На рис. 3 приведен пример пуассоновой сетки некоторого закона. Кружком отмечены узлы, в которых сосредоточена мера ω_P.

Будем говорить, что узел пуассоновой сетки $(p_m \neq 0,\ q_n \neq 0)$ имеет выход в свой квадрант по вертикали (по горизонтали), если ω_P-мера вертикального (горизонтального) луча, выходящего из узла $(p_m,\ q_n)$ и лежащего в том же квадранте, что и $(p_m,\ q_n)$, равна нулю;

узел пуассоновой сетки $(p_m \neq 0,\ q_n \neq 0)$ имеет выход в смежный квадрант по вертикали (по горизонтали), если ω_P-мера вертикального (горизонтального) луча, выходящего из узла $(p_m,\ q_n)$ и продолжающегося в смежный квадрант, равна нулю. При этом, если множество узлов пуассоновой сетки, лежащих на указанном луче и принадлежащих тому же квадранту, что и $(p_m,\ q_n)$, конечно, то условимся считать, что узел имеет «конечный» выход в смежный квадрант по вертикали (по горизонтали). В противном случае имеет место «бесконечный» выход в смежный квадрант по вертикали (по горизонтали).

Если узел ($p_m \neq 0$, $q_n \neq 0$) имеет выход в свой квадрант (в смежный квадрант) по вертикали или по горизонтали, то будем говорить, что он имеет выход в свой квадрант (в смежный квадрант).

Если узел ($p_m \neq 0$, $q_n \neq 0$) имеет выход в свой или смежный квадрант, то будем говорить, что он имеет выход.

Будем говорить, что узел пуассоновой сетки ($p_m \neq 0$, 0) имеет выход вверх (вниз), если ω_p-мера вертикального луча, выходящего из узла (p_m, 0) и направленного вверх (вниз), равна нулю;

узел пуассоновой сетки (0, $q_n \neq 0$) имеет выход вправо (влево), если ω_p-мера горизонтального луча, выходящего из узла (0, q_n) и направленного вправо (влево), равна нулю.

Если узел ($p_m \neq 0$, 0) ((0, $q_n \neq 0$)) имеет выход вверх или вниз (вправо или влево), то будем говорить, что он имеет выход *.

Например, в случае пуассонова спектра, изображенного на рис. 3, узлы (p_{-4}, q_2), (p_2, q_{-3}) имеют выход в свой квадрант соответственно по вертикали и по горизонтали. Узел (p_{-6}, q_{-4}) имеет выход в смежный квадрант по вертикали. Узлы $(p_{-6}, 0)$, $(0, q_{-5})$ имеют выходы соответственно вверх и влево. Узел $(p_{-}{}^2, q_{-2})$ выхода не имеет.

Если S_P — пуассонов спектр безгранично делимого закона P, то множества

$$S_P^+ = S_P \cap \{x_1, x_2) \mid x_2 > 0\},$$
$$S_P^- = S_P \cap \{(x_1, x_2) \mid x_2 < 0\},$$
$$C_P = S_P \cap \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$$

назовем составляющими пуассонова спектра закона P.

Для б. д. з. P с пуассоновой сеткой будем говорить, что составляющая S_P^+ (S_P^-) имеет **тип I**, если последовательность $\{(0, q_n > 0)\}$ ($\{(0, q < 0)\}$) конечна, узлы (p_m, q_n) $(q_n > 0)$ ((p_m, q_n) $(q_n < 0)$) имеют выход и не существует узлов, имеющих лишь бесконечный выход в смежный квадрант; **тип II**, если множество S_P^+ (S_P^-) ограничено, не имеет точек сгущения вне последовательности $\{(p_m, 0)\}$, узлы (p_m, q_n) $(q_n > 0)$ ((p_m, q_n) $(q_n < 0)$) имеют выход, причем существует не более чем конечное множество узлов, имеющих выход лишь в смежный квадрант.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА И ЕГО ОБСУЖДЕНИЕ

Нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть б. д. з. $P \in \mathscr{L}^2$. Если выполняются условия:*

С) *составляющие спектра S_P^+, S_P^- — типа I или II;*

Д) *элементы составляющей спектра C_P имеют выход, то $P \in I_0^2$.*

В качестве примера вероятностного закона, удовлетворяющего условиям теоремы, можно предложить закон P, пуассонова сетка и спектр которого изображены на рис. 2.

Кружком обозначены точки сосредоточения спектральной меры, квадратом — точки сгущения спектра, стрелкой — «направления сходимости» к точкам сгущения.

Здесь $p_0 = q_0 = 0$, $p_{2k} = 2^{-(k-1)}$, $p_{2k-1} = 2^k$, $p_{-2k} = -2^{-(k-1)}$, $p_{-(2k-1)} = -2^k$, $q_k = 2^{-(k-1)}$, $q_{-l} = 2^{-(l-1)}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$; $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$).

---

* Понятие выхода вводится для всех узлов пуассоновой сетки вне зависимости от отношения принадлежности их спектру закона.

Пуассонов спектр закона сосредоточен в точках (p_2, q_k) $(k = 1, 5, 7, 9)$; (p_6, q_1), (p_6, q_5), (p_{10}, q_1), (p_{10}, q_3), (p_{14}, q_{2k-1}) $(k = 1, 2, 3, \ldots)$; $(p_{-2(4l+2k+1)}, q_{2(2l+1)})$, $(p_{-2(4l+5)}, q_{2(2l+k+1)})$ $(k = 0, 1, 2;\ l = 0, 1, 2, 3, \ldots)$; (p_{-14}, q_4), (p_{-18}, q_4), (p_{-10}, q_8), (p_0, q_1), (p_0, q_k) $(k = 11, 12, \ldots)$, $(p_{-4(2k-1)}, q_{-(2j-1)})$, $(p_{-4(2k-1)-1}, q_{-(2j-1)})$, $(p_{-8k}, q_{-(2j+3)})$, $(p_{-(8k-7)}, q_{-(2j+3)})$ $(j = 1, 2;\ k = 1, 2, 3, \ldots)$, $(p_{4(2k-1)}, q_{-2})$, $(p_{4(2k-1)+1}, q_{-2})$, (p_{4k}, q_{-4}), (p_{4k-3}, q_{-4}), (p_{8k}, q_{-6}), (p_{8k-7}, q_{-6}) $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, (p_0, q_{-k}) $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, (p_{4k-1}, q_0), $(p_{4(k+2)+2}, q_0)$, $(p_{-2(2k+7)}, q_0)$, $(p_{-(4k-1)}, q_0)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, (p_2, q_0), (p_{-2}, q_0), (p_{-6}, q_0), (p_{-10}, q_0).

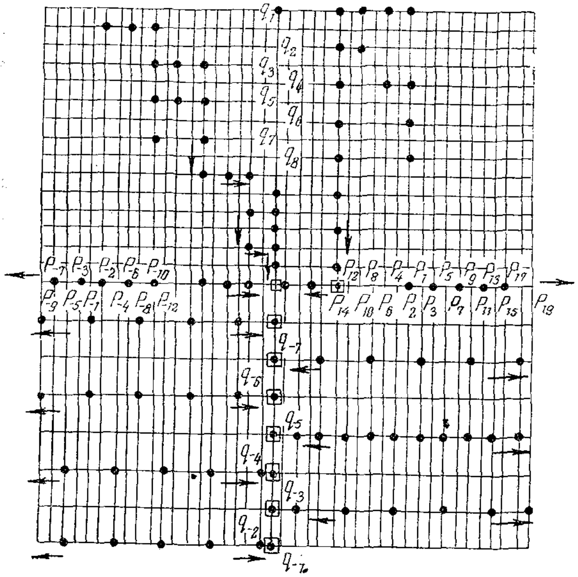

Рис. 2.

Отметим, что из нашей теоремы следует для случая $n = 2$ результат, полученный Р. Куппенсом [9]:

5. Пусть конечный пуассонов спектр n-мерного б. д. з. P содержится во множестве $\bigcup\limits_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)} \{(\varepsilon_1 p_{m1}, \ldots, \varepsilon_n p_{mn})\}_{m=1}^{M}$, где $\{(p_{m1}, \ldots, p_{mn})\}_{m=1}^{M} \subset R^n$, числа $\dfrac{p_{mj}}{p_{kj}}$ $(m > k)$ при $\operatorname{sgn} p_{mj} = \operatorname{sgn} p_{kj}$ суть натуральные, отличные от единицы $(j = 1, 2, 3, \ldots, n)$, и объединение производится по всем векторам $(\varepsilon_1, \ldots \ldots \varepsilon_n)$ таким, что $\varepsilon_j = 0$ или 1, $\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 \neq 0$.

Тогда $P \in I_0^n$.

На рис. 1 приведена пуассонова сетка закона, удовлетворяющего условиям теоремы 4.

Легко видеть, что составляющие S_p^+ и S_p^- спектра закона P, фигурирующего в теореме 4, принадлежат любому из типов I и II и, следовательно, условия нашей теоремы слабее условий теоремы Куппенса.

Заметим, что условие принадлежности составляющей спектра S_p^+ (или S_p^-) типу I, не накладывая требования ограниченности множества S_p^+, предполагает существование полосы

$$\Theta(a, b) = \{(x_1, x_2) \mid a \leqslant x_2 \leqslant b\} \, (-\infty < a \leqslant b < +\infty)$$

такой, что $S_p^+ \subset \Theta(a, b)$.

В случае n-мерного б. д. з. с неограниченным пуассоновым спектром, не удовлетворяющим последнему требованию, нам известен единственный, принадлежащий Р. Куппенсу [9] результат, определяющий достаточные условия принадлежности закона классу I_0^n $(n > 1)$:

6. Пусть пуассонов спектр n-мерного б. д. з. содержится во множестве

$$\bigcup_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)} \{(\varepsilon_1 p_{m1}, \ldots, \varepsilon_n p_{mn})\}_{m=1}^{\infty},$$

где $\{(p_{m1}, \ldots, p_{mn})\}_{m=1}^{\infty} \subset R^n$, числа $\frac{p_{mj}}{p_{kj}}$ $(m > k)$ при $\operatorname{sgn} p_{kj} = \operatorname{sgn} p_{mj}$ суть натуральные, отличные от единицы $(j = 1, 2, \ldots, n)$, и объединение производится по всем векторам $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ таким, что $\varepsilon_j = 0$ или 1, $\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 \neq 0$.

Пусть, кроме того, для некоторого $c > 0$ справедлива оценка

$$\int\limits_{|x|>r} d_x\omega_p = O\left(e^{-cr^2}\right) \quad (x \in R^n)$$

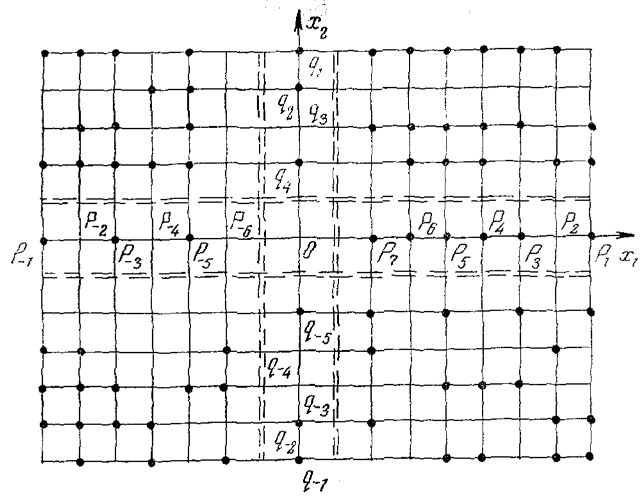

Рис. 3.

(здесь ω_p-мера, фигурирующая в представлении Леви — Хинчина (2) для характеристической функции закона P).

Тогда

$$P \in I_0^n.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Лемма 1. *Если система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{n}$ вещественных функций вещественного переменного линейно независима, то существуют значения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такие, что*

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \ldots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \ldots & f_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть теперь лемма верна для систем, состоящих из $(n - 1)$ линейно независимых функций. Если существует линейно независимая система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{n}$, для которой

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_n(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(x_n) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \equiv 0$$

при всех $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, то, раскрывая определитель по элементам последней строки, запишем тождество

$$f_n(x_n)\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_{n-1}(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(x_{n-1}) & \ldots & f_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} - \cdots +$$

$$+ (-1)^{n+1} f_1(x_n)\begin{vmatrix} f_2(x_1) & \ldots & f_n(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_2(x_{n-1}) & \ldots & f_n(x_{n-1}) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Но тогда из определения линейной независимости следует, что для всех $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in R^{n-1}$

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_{n-1}(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(x_{n-1}) & \ldots & f_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

а это противоречит индуктивному предположению. Лемма доказана.

Лемма 2*. *Пусть ω — вполне σ-конечная мера, определенная на классе борелевских множеств n-мерного евклидова шара $U_a = \{\boldsymbol{x} \mid |\boldsymbol{x}| \leqslant a\}$ и удовлетворяющая условию*

$$\int_{|x| \leqslant a} |\boldsymbol{x}|^2 d_{\boldsymbol{x}}\omega < \infty.$$

Тогда интеграл

$$f(\boldsymbol{z}) = \int_{|x| \leqslant a} \left[e^{<z,\, x>} - 1 - \frac{<z,\, x>}{1 + |x|^2}\right] d_{\boldsymbol{x}}\omega \quad (\boldsymbol{z} \in C^n) \tag{4}$$

сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве пространства C^n и, следовательно, функция $f(\boldsymbol{z})$ является целой в C^n.

Справедлива оценка

$$f(z) = O\{(1 + |\boldsymbol{z}|^2)(1 + \exp[a\,|\operatorname{Re}\boldsymbol{z}|])\}.$$

Доказательство. Легко проверить справедливость соотношения

$$e^z - 1 - z = \int_0^z (z - \zeta)\, e^{\zeta} d\zeta \quad (z \in C).$$

Интегрируя в правой части этого равенства вдоль отрезка $[0, z]$, получаем оценку

$$|e^z - 1 - z| \leqslant |z|^2 (1 + e^{\operatorname{Re} z}|.$$

Используя последнее неравенство, имеем

$$\left|e^{<z,\, x>} - 1 - \frac{<z,\, x>}{1 + |x|^2}\right| = \left|e^{<z,\, x>} - 1 - <\boldsymbol{z},\, \boldsymbol{x}> + \right.$$

$$\left. + \frac{|x|^2 <z,\, x>}{1 + |x|^2}\right| \leqslant |<\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{x}>|^2 (1 + e^{<x,\, \operatorname{Re} z>}) +$$

$$+ \frac{|<z,\, x>|\,|x|^2}{1 + |x|^2} \leqslant |\boldsymbol{z}|^2 |\boldsymbol{x}|^2 (1 + e^{<x,\, \operatorname{Re} z>}) +$$

$$+ \frac{|z|\,|x|^3}{1 + |x|^2} \leqslant 2|\boldsymbol{x}|^2 (1 + |\boldsymbol{z}|^2)(1 + e^{<x,\, \operatorname{Re} z>}) \quad (\boldsymbol{x} \in R^n,\ \boldsymbol{z} \in C^n). \tag{5}$$

Если $\boldsymbol{z}$ пробегает некоторое ограниченное множество пространства C^n, а $x \in U_a$, то величина $(1 + |\boldsymbol{z}|^2)(1 + e^{<x,\, \operatorname{Re} z>})$ остается ограниченной некоторой не зависящей от $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{x}$ постоянной. Поэтому интеграл в (4) сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве пространства C^n и является, следовательно, целой функцией.

* Лемма 2 является n-мерным аналогом соответствующего утверждения в [5]. При доказательстве леммы мы следуем рассуждениям [5, теорема 4] и [7, § 2, лемма 3].

Пусть теперь дано $\varepsilon > 0$. Выберем $b < a$ так, чтобы $\int\limits_{|x|<b} |x|^2 d_x\omega < \varepsilon$. Имеем, используя (5),

$$\left| \int\limits_{|x|\leqslant a} \left(e^{<z,\, x>} - 1 - \frac{<z,\, x>}{1+|x|^2}\right) d_x\omega \right| \leqslant \int\limits_{|x|<b} \left| e^{<z,\, x>} - 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{<z,\, x>}{1+|x|^2} \right| d_x\omega + \int\limits_{b\leqslant|x|\leqslant a} \left| e^{<z,\, x>} - 1 - \frac{<z,\, x>}{1+|x|^2} \right| d_x\omega \leqslant 2(1+|z|^2) \times$$

$$\times \int\limits_{|x|<b} |x|^2 (1 + e^{<\mathrm{Re}\, z,\, x>})\, d_x\omega + \int\limits_{b\leqslant|x|\leqslant a} e^{<z,\, x>} d_x\omega +$$

$$+ \int\limits_{b\leqslant|x|\leqslant a} \left(1 + \frac{|z|\,|x|}{1+|x|^2}\right) d_x\omega \leqslant 2(1+|z|^2)(1+e^{a|\mathrm{Re}\, z|})\,\varepsilon +$$

$$+ e^{a|\mathrm{Re}\, z|} \int\limits_{b\leqslant|x|\leqslant a} d_x\omega + \left(1 + \frac{1}{2}|z|\right) \int\limits_{b\leqslant|x|\leqslant a} d_x\omega.$$

Отсюда и следует требуемая оценка.

Лемма 3. *Если ω-мера, заданная на классе борелевских множеств пространства R^n и удовлетворяющая при некотором $c > 0$ условию*

$$\int\limits_{|x|>a} d_x\omega = O(e^{-ca^2}) \quad (x \in R^n),$$

то интеграл

$$f(z) = \int\limits_{|x|>a} e^{<z,\, x>} d_x\omega \quad (z \in C^n)$$

сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве пространства C^n и, следовательно, функция $f(z)$ является целой. Справедлива оценка

$$f(z) = O(e^{N|\mathrm{Re}\, z|^2}),$$

$N > 0$ — постоянная.

Доказательство. Пусть $p = \left[\frac{|\mathrm{Re}\, z|}{2ac}\right]$ — целая часть от $\frac{|\mathrm{Re}\, z|}{2ac}$, так что $\frac{|\mathrm{Re}\, z|}{ca} \leqslant 2(p+1)$.

Теперь для любого натурального m имеем, используя последние соотношения и условия леммы,

$$\left| \int\limits_{a\leqslant|x|\leqslant ma} e^{<z,\, x>} d_x\omega \right| \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{ka\leqslant|x|<(k+1)a} e^{<\mathrm{Re} z,\, x>} d_x\omega \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{ka\leqslant|x|<(k+1)a} e^{|\mathrm{Re}\, z|\,|x|} d_x\omega \leqslant M_1 \sum_{k=1}^{m-1} \exp\{-c(ka)^2 +$$

$$+ |\mathrm{Re}\, z|(k+1)a\} \leqslant M_2 e^{a|\mathrm{Re}\, z|} \sum_{k=1}^{m-1} \exp\{-ca^2(k^2 - 2(p+1)k)\} \leqslant$$

$$\leqslant M_3 \exp\{a|\mathrm{Re}\, z| + ca^2(p+1)^2\} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ca^2(k-p)^2} = O(e^{N|\mathrm{Re}\, z|^2}),$$

откуда и следуют утверждения леммы.

Приступим теперь к непосредственному доказательству предложенной теоремы.

Пусть $P^{(0)}$ — безгранично делимый закон, удовлетворяющий условиям нашей теоремы. Для всех узлов его пуассоновой сетки обозначим

$$\lambda_{mn} = \omega_{P^{(0)}}(\{(p_m, q_n)\})$$

и перепишем (2) и (3) в виде

$$\varphi(t, \tau; P^{(0)}) = \exp\{i(\alpha t + \beta\tau) - (\gamma t^2 + \varkappa t\tau + \delta\tau^2) + \\ + \sum_{m, n} \lambda_{mn}\left(e^{i(p_m t + q_n \tau)} - 1 - \frac{i(p_m t + q_n \tau)}{1 + p_m^2 + q_n^2}\right), \tag{6}$$

$$\sum_{m, n} \lambda_{mn} \frac{p_m^2 + q_n^2}{1 + p_m^2 + q_n^2} < \infty. \tag{7}$$

Если $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ — компоненты закона $P^{(0)}$, то

$$\varphi(t, \tau; P^{(1)})\, \varphi(t, \tau; P^{(2)}) = \varphi(t, \tau; P^{(0)}). \tag{8}$$

Обозначим $P_r^{(s)}$ ($s = 0, 1, 2$; $r = 1, 2$) одномерные з. р., определяемые соотношениями

$$P_1^{(s)}(E) = \iint\limits_E d_x P^{(s)},$$

$$P_2^{(s)}(E) = \iint\limits_E d_x P^{(s)}$$

(E — любое одномерное борелевское множество). Очевидно

$$\varphi(t; P_1^{(s)}) = \varphi(t, 0; P^{(s)}),$$

$$\varphi(t; P_2^{(s)}) = \varphi(0, t; P^{(s)}), \quad s = 0, 1, 2.$$

Поэтому из (8) следует, что

$$\varphi(t; P_r^{(1)}) \cdot \varphi(t; P_r^{(2)}) = \varphi(t; P_r^{(0)}) \quad (-\infty < t < +\infty, r = 1, 2).$$

Подставляя в (6) поочередно $\tau = 0$ и $t = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t; P_1^{(0)}) &= \exp\left\{i\alpha^{(0)} t - \gamma t^2 + \sum_m \lambda_m^{(0)}\left(e^{ip_m t} - 1 - \frac{ip_m t}{1 + p_m^2}\right)\right\}, \\ \varphi(\tau; P_2^{(0)}) &= \exp\left\{i\beta^{(0)}\tau - \delta\tau^2 + \sum_n \mu_n^{(0)}\left(e^{iq_n \tau} - 1 - \frac{iq_n \tau}{1 + q_n^2}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\alpha^{(0)} = \alpha + \sum_{m, n} \lambda_{mn} \frac{p_m q_n^2}{(1 + p_m^2 + q_n^2)(1 + p_m^2)};$$

$$\beta^{(0)} = \beta + \sum_{m, n} \lambda_{mn} \frac{q_n p_m^2}{(1 + p_m^2 + q_n^2)(1 + q_n^2)};$$

$$\lambda_m^{(0)} = \sum_n \lambda_{mn};$$

$$\mu_n^{(0)} = \sum_m \lambda_{mn}.$$

Согласно (7) ряды $\alpha^{(0)}$, β^0, $\lambda_m^{(0)}$, $\mu_n^{(0)}$ абсолютно сходящиеся. Кроме того, по условию B)

$$\sum_{|p_m| > r} \lambda_m^{(0)} = O(e^{-cr^2}),$$

$$\sum_{|q_n|>r} \mu_n^{(0)} = O\left(e^{-cr^2}\right) \quad (c > 0).$$

По теореме 3

$$\varphi\left(t;\ P_1^{(s)}\right) = \exp\left\{i\alpha^{(s)}t - \gamma^{(s)}t^2 + \sum_m \lambda_m^{(s)}\left(e^{ip_mt} - 1 - \frac{ip_mt}{1+p_m^2}\right)\right\};$$

$$\varphi\left(\tau;\ P_2^{(s)}\right) = \exp\left\{i\beta^{(s)}\tau - \delta\tau^2 + \sum_n \mu_n^{(s)}\left(e^{iq_n\tau} - 1 - \frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right)\right\}, \tag{10}$$

где $\alpha^{(s)}$, $\beta^{(s)}$ — вещественны, $\gamma^{(s)}$, $\delta^{(s)}$, $\lambda_m^{(s)}$, $\mu_n^{(s)}$ — неотрицательны и

$$\sum_m \lambda_m^{(s)} \frac{p_m^2}{1+p_m^2} < \infty,$$

$$\sum_n \mu_n^{(s)} \frac{q_n^2}{1+q_n^2} < \infty; \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\sum_{|p_m|>r} \lambda_m^{(s)} = \underset{r\to+\infty}{O}\left(e^{-cr^2}\right),\\ \sum_{|q_n|>r} \mu_n^{(s)} = \underset{r\to+\infty}{O}\left(e^{-cr^2}\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Согласно теореме 4 функции $\varphi\left(t;\ P_1^{(s)}\right)$, $\varphi\left(t;\ P_2^{(s)}\right)$ аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость переменных t и τ соответственно.

Представим теперь $\ln \varphi\left(t,\ \tau;\ P^{(0)}\right)$ в виде

$$\ln \varphi\left(t,\ \tau;\ P^{(0)}\right) = -\iint\limits_{|x|>r} d_x\omega_{P^{(0)}} + i\left(\alpha - \iint\limits_{|x|>r} \frac{x_1}{1+x_1^2+x_2^2}\, d_x\omega_{P^{(0)}}\right)t +$$

$$+ i\left(\beta - \iint\limits_{|x|>r} \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}\, d_x\omega_{P^{(0)}}\right)\tau - \left(\gamma t^2 + \varkappa t\tau + \delta\tau^2\right) +$$

$$+ \iint\limits_{|x|\leqslant r} \left(e^{i(tx_1+\tau x_2)} - 1 - \frac{i(tx_1+\tau x_2)}{1+x_1^2+x_2^2}\right) d_x\omega_{P^{(0)}} + \iint\limits_{|x|>r} e^{i(tx_1+\tau x_2)} d_x\omega_{P^{(0)}}.$$

Применяя к последнему выражению леммы 2 и 3 и используя затем теорему 2, видим, что функции $\varphi\left(t,\ \tau;\ P^{(s)}\right)$ $(s = 0,\ 1,\ 2)$ аналитически продолжаются на все пространство C^2 комплексных переменных t и τ. Продолженные функции будем обозначать через $\varphi\left(t,\ \tau;\ P^{(s)}\right)$ и при комплексных t и τ.

Примем y и η вещественными и положим

$$\begin{gathered}\varphi_\eta^{(s)}(t) = \frac{\varphi\left(t,\ -i\eta;\ P^{(s)}\right)}{\varphi\left(0,\ -i\eta;\ P^{(s)}\right)},\\ \varphi_y^{(s)}(\tau) = \frac{\varphi\left(-iy,\ \tau;\ P^{(s)}\right)}{\varphi\left(-iy,\ 0;\ P^{(s)}\right)} \quad (s = 0,\ 1,\ 2).\end{gathered} \tag{13}$$

Легко видеть, что функции $\varphi_\eta^{(s)}(t)$ и $\varphi_y^{(s)}(\tau)$ являются х. ф. некоторых одномерных з. р., а именно:

$$P_\eta^{(s)}(E) = \frac{\iint\limits_E e^{-\eta x_2} d_x P^{(s)}}{\iint e^{-\eta x_2} d_x P^{(s)}},$$

$$P_y^{(s)}(E)=\frac{\iint\limits_E e^{-yx_1}d_x P^{(s)}}{\iint e^{-yx_1}d_x P^{(s)}}$$
$$(s=0,\ 1,\ 2).$$

Так как в обеих частях соотношения (8) стоят целые функции переменных t и τ, то оно имеет место и при всех комплексных значениях t и τ.

Отсюда следует равенство

$$\varphi_y^{(1)}(\tau)\,\varphi_y^{(2)}(\tau)=\varphi_y^{(0)}(\tau), \tag{14}$$

показывающее, что з. р. $P_y^{(0)}$ является композицией законов $P_y^{(1)}$ и $P_y^{(2)}$. Но из (6) и (13) следует, что

$$\varphi_y^{(0)}(\tau)=\exp\left\{i\beta^{(0)}(y)\,\tau-\delta\tau^2+\sum_n \mu_n^{(0)}(y)\left(e^{iq_n\tau}-1-\frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right)\right\}, \tag{15}$$

где

$$\beta^{(0)}(y)=\beta+\varkappa y+\sum_{m,\,n}\lambda_{mn}\left[e^{p_m y}\cdot\frac{q_n p_m^2}{(1+q_n^2)(1+p_m^2+q_n^2)}+q_n\frac{e^{p_m y}-1}{1+p_m^2+q_n^2}\right],$$

$$\mu_n^{(0)}(y)=\sum_n \lambda_{mn}e^{p_m y}.$$

По (7) и условию B) ряды $\beta^{(0)}(y)$ и $\mu_n^{(0)}(y)$ — абсолютно сходящиеся и

$$\sum_{|q_n|>r}\mu_n^{(0)}(y)=O(e^{-cr^2})\quad (c>0),$$

$$\sum \mu_n^{(0)}(y)\frac{q_n^2}{1+q_n^2}<\infty.$$

Из теоремы 3 следует, что

$$\begin{aligned}\varphi_y^{(1)}(\tau)&=\exp\left\{i\beta(y)\,\tau-\delta(y)\,\tau^2+\sum_n \mu_n(y)\left(e^{iq_n\tau}-1-\frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right)\right\},\\ \varphi_y^{(2)}(\tau)&=\exp\left\{i\tilde\beta(y)\,\tau-\tilde\delta(y)\,\tau^2+\sum_n \tilde\mu_n(y)\left(e^{iq_n\tau}-1-\frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right)\right\},\end{aligned} \tag{16}$$

где $\beta(y)$, $\tilde\beta(y)$ — вещественные, а $\delta(y)$, $\tilde\delta(y)$, $\mu_n(y)$, $\tilde\mu_n(y)$ — неотрицательные функции вещественного параметра y и

$$\sum_n \mu_n(y)\frac{q_n^2}{1+q_n^2}<\infty;$$

$$\sum_{|q_n|>r}\mu_n(y)=O(e^{-cr^2});$$

$$\sum_n \tilde\mu_n(y)\frac{q_n^2}{1+q_n^2}<\infty;$$

$$\sum_{|q_n|>r}\tilde\mu_n(y)=O(e^{-cr^2})\quad (c>0).$$

Используя единственность представления Леви — Хинчина (2) для х. ф. $\varphi_y^{(0)}(\tau)$, имеем

$$\mu_n(y) + \tilde{\mu}_n(y) = \mu_n^{(0)}(y),$$
$$\delta(y) + \tilde{\delta}(y) = \delta. \tag{17}$$

Отсюда и из неотрицательности коэффициентов $\mu_n(y)$, $\tilde{\mu}_n(y)$; $\delta(y)$, $\tilde{\delta}(y)$ следует

$$0 \leqslant \mu_n(y) \leqslant \sum_m \lambda_{mn} e^{p_m y},$$
$$0 \leqslant \delta(y) \leqslant \delta. \tag{18}$$

Вспоминая, что $\varphi(-iy,\ 0;\ P^{(1)}) = \varphi(-iy;\ P_1^{(1)})$, получаем

$$\varphi(-iy,\ \tau;\ P^{(1)}) = \exp\left\{i\beta(y)\tau - \delta(y)\tau^2 + \sum_n \mu_n(y)\left(e^{iq_n\tau} - 1 - \frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \alpha^{(1)}y + \gamma^{(1)}y^2 + \sum_m \lambda_m^{(1)}\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)\right\}. \tag{19}$$

Аналогичные рассуждения приводят к равенству

$$\varphi(t,\ -i\eta;\ P^{(1)}) = \exp\left\{i\alpha(\eta)t - \gamma(\eta)t^2 + \sum_m \lambda_m(\eta)\left(e^{ip_m t} - 1 - \frac{ip_m t}{1+p_m^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \beta^{(1)}\eta + \delta^{(1)}\eta^2 + \sum_n \mu_n^{(1)}\left(e^{q_n\eta} - 1 - \frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right)\right\} \tag{20}$$

и

$$\sum_m \lambda_m(\eta)\frac{p_m^2}{1+p_m^2} < \infty.$$

Справедливы также оценки

$$0 \leqslant \lambda_m(\eta) \leqslant \sum_n \lambda_{mn} e^{q_n\eta},$$
$$0 \leqslant \gamma(\eta) \leqslant \gamma \quad (\eta \text{ — вещественно}). \tag{21}$$

Положим в соотношениях (19) и (20) соответственно $\tau = -i\eta$, $t = -iy$. Тогда левые части этих соотношений совпадут. Поэтому при всех вещественных y и η справедливо равенство

$$\beta(y)\eta + \delta(y)\eta^2 + \sum_n \mu_n(y)\left(e^{q_n\eta} - 1 - \frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right) - \beta^{(1)}\eta - \delta^{(1)}\eta^2 -$$
$$- \sum_n \mu_n^{(1)}\left(e^{q_n\eta} - 1 - \frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right) = \alpha(\eta)y + \gamma(\eta)y^2 + \sum_m \lambda_m(\eta) \times$$
$$\times \left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right) - \alpha^{(1)}y - \gamma^{(1)}y^2 - \sum_m \lambda_m^{(1)}\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right). \tag{22}$$

Дальнейшее доказательство разобьем на ряд случаев и рассмотрим их.

Случай 1. Составляющие $S^+_{P^{(0)}}$, $S^-_{P^{(0)}}$ имеют тип I

По определению типа I последовательность $\{(0,\ q_n \neq 0)\}$ конечна. Пусть N_0 — число ее элементов. Пронумеруем последовательность $\{q_n\}$ так, чтобы $q_0 = 0$, $q_n > 0$ при $n > 0$, $q_n < 0$ при $n < 0$, $|q_n| < |q_\nu|$ при $|n| > |\nu|$ и $\operatorname{sgn} q_n = \operatorname{sgn} q_\nu$.

Придавая η в (22) последовательно значения η_j ($j = 1, 2, \ldots, N_0 + 2$), приходим к системе алгебраических уравнений, линейных относительно функций $\beta(y)$, $\delta(y)$, $\mu_n(y)$ $(n \neq 0)$,

$$(\beta(y) - \beta^{(1)})\eta_j + (\delta(y) - \delta^{(1)})\eta_j^2 + \sum_n (\mu_n(y) - \mu_n^{(1)})\left(e^{q_n\eta_j} - 1 - \frac{q_n\eta_j}{1+q_n^2}\right) =$$
$$= (\alpha(\eta_j) - \alpha^{(1)})y + (\gamma(\eta_j) - \gamma^{(1)})y^2 + \sum_m (\lambda_m(\eta_j) - \lambda_m^{(1)})\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right). \tag{23}$$

Система функций $\left(\eta, \eta^2, \left(e^{q_n\eta} - 1 - \frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right)_{n=1}^{N_0}\right)$ линейно независима. По лемме 1 можно подобрать значения η_j так, чтобы определитель системы был отличен от нуля. Решая систему при выбранных η_j, получаем выражения

$$\begin{aligned} \beta(y) &= \beta^{(1)} + By + Dy^2 + \sum_m \Lambda_m\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right),\\ \delta(y) &= \delta^{(1)} + Cy + Ey^2 + \sum_m Q_m\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right),\\ \mu_n(y) &= \mu_n^{(1)} + B_n y + D_n y^2 + \sum_m \Lambda_m^n\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Заметим, что Λ_m, Q_m, Λ_m^n являются линейными комбинациями величин $(\lambda_m(\eta_j) - \lambda_m^{(1)})$ $(j = 1, 2], 3, \ldots, N_0 + 2)$ с вещественными коэффициентами и, следовательно, справедливы асимптотические оценки

$$\begin{aligned} &\sum_{|p_m|>r} |\Lambda_m| = O(e^{-cr^2}),\\ &\sum_{|p_m|>r} |Q_m| = O(e^{-cr^2}),\\ &\sum_{|p_m|>r} |\Lambda_m^n| = O(e^{-cr^2}) \quad (n \neq 0) \end{aligned} \tag{25}$$

при некотором $c > 0$.

Подставим выражения для $\beta(y)$, $\delta(y)$, $\mu_n(y)$ в (19)

$$\varphi(-iy, \tau;\ P^{(1)}) = \exp\left\{i\left[\beta^{(1)} + By + Dy^2 + \sum_m \Lambda_m\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)\right]\tau - \right.$$
$$- \left[\delta^{(1)} + Cy + Ey^2 + \sum_m Q_m\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)\right]\tau^2 +$$
$$+ \sum_n \mu_n^{(1)}\left(e^{iq_n\tau} - 1 - \frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right) + y\sum_n B_n\left(e^{iq_n\tau} - 1 - \frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right) +$$
$$+ y^2\sum_n D_n\left(e^{iq_n\tau} - 1 - \frac{iq_n\tau}{1+q_n^2} + \sum_{n,m}\Lambda_m^n\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)\left(e^{iq_n\tau} - 1 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right) + \alpha^{(1)}y + \gamma^{(1)}y^2 + \sum_m \lambda_m^{(1)}\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)\right\}. \tag{26}$$

Воспользовавшись легко проверяемым тождеством

$$\left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)\left(e^{iq_n\tau} - 1 - \frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right) = \left(e^{p_m y + iq_n\tau} - 1 - \frac{p_m y + iq_n\tau}{1+p_m^2+q_n^2}\right) -$$

$$-y\frac{p_m}{1+p_m^2}\left(e^{iq_n\tau}-1-\frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right)-i\tau\frac{q_n}{1+q_n^2}\left(e^{p_my}-1-\frac{p_my}{1+p_m^2}\right)-$$
$$-\left(e^{iq_n\tau}-1-\frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right)-\left(e^{p_my}-1-\frac{p_my}{1+p_m^2}\right)-y\frac{p_mq_n^2}{(1+p_m^2)(1+p_m^2+q_n^2)}-$$
$$-i\tau\frac{q_np_m^2}{(1+q_n^2)(1+p_m^2+q_n^2)}-i\tau y\frac{q_np_m}{(1+q_n^2)(1+p_m^2)}$$

и возвращаясь к переменной $t=-iy$, перепишем (26) в виде

$$\varphi(t,\tau;\ P^{(1)})=\exp\Big\{i(\alpha_1t+\beta_1\tau)-\gamma^{(1)}t^2-\varkappa^{(1)}t\tau-\delta^{(1)}\tau^2-iCt\tau^2-iDt^2\tau+$$
$$+Et^2\tau^2+\sum_n\Lambda_0^{(n)}\left(e^{iq_n\tau}-1-\frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right)+\sum_m\Lambda_m^{(0)}\left(e^{ip_mt}-1-\frac{ip_mt}{1+p_m^2}\right)+$$
$$+i\tau\sum_m G_m\left(e^{ip_mt}-1-\frac{ip_mt}{1+p_m^2}\right)+it\sum_n H_n\left(e^{iq_n\tau}-1-\frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right)-$$
$$-t^2\sum_n D_n\left(e^{iq_n\tau}-1-\frac{iq_n\tau}{1+q_n^2}\right)-\tau^2\sum_m Q_m\left(e^{ip_mt}-1-\frac{ip_mt}{1+p_m^2}\right)+$$
$$+\sum_{m\neq0,\ n\neq0}\Lambda_m^{(n)}\left(e^{i(p_mt+q_n\tau)}-1-\frac{i(p_mt+q_n\tau)}{1+p_m^2+q_n^2}\right)\Big\},\tag{27}$$

где

$$\alpha_1=\alpha^{(1)}-\sum_{m,n}\Lambda_m^{(n)}\frac{p_mq_n^2}{(1+p_m^2+q_n^2)(1+p_m^2)};$$
$$\beta_1=\beta^{(1)}-\sum_{m,n}\Lambda_m^{(n)}\frac{q_np_m^2}{(1+p_m^2+q_n^2)(1+q_n^2)};$$
$$\varkappa_1=B-\sum_{m,n}\Lambda_m^{(n)}\frac{q_np_m}{(1+q_n^2)(1+p_m^2)};$$
$$\Lambda_0^{(n)}=\mu_n^{(1)}-\sum_m\Lambda_m^{(n)};\ \ \Lambda_m^{(0)}=\lambda_m^{(1)}-\sum_n\Lambda_m^{(n)};$$
$$G_m=\Lambda_m-\sum_n\Lambda_m^{(n)}\frac{q_n}{1+q_n^2};\ \ H_n=B_n-\sum_m\Lambda_m^{(n)}\frac{p_m}{1+p_m^2}.$$

Из (25) следует, что правая часть (27) сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном множестве пространства C^2.

Для х. ф. $\varphi(t,\tau;\ P^{(2)})$ справедливо аналогичное (27) разложение с коэффициентами α_2, β_2, $\gamma^{(2)}$, $\varkappa^{(2)}$, $\delta^{(2)}$, $\tilde C$, $\tilde D$, $\tilde E$, $\tilde G_m$, $\tilde H_n$, $\tilde D_n$, $\tilde Q_n$, $\tilde\Lambda_m^{(n)}$.

Из единственности представления Леви—Хинчина (2) для х. ф. $\varphi(t,\tau;\ P^{(0)})$ следует, что

$$C+\tilde C=0,\ D+\tilde D=0,\ E+\tilde E=0,$$
$$G_m+G_m=0,\ H_n+\tilde H_n=0,\ D_n+\tilde D_n=0,\ Q_m+\tilde Q_m=0,$$
$$\Lambda_m^{(n)}+\tilde\Lambda_m^{(n)}=0.\tag{28}$$

Полагая $x=\operatorname{Re}t$; $y=\operatorname{Im}t$; $\xi=\operatorname{Re}\tau$; $\eta=\operatorname{Im}\tau$, применяем к х. ф. $\varphi(t,\tau;\ P^{(1)})$, представленной в виде (27), свойство хребта (I). После преобразований получаем

$$\Sigma\equiv\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5+\Sigma_6+\Sigma_7+\Sigma_8+\Sigma_9+\Sigma_{10}+$$
$$+\Sigma_{11}+\Sigma_{12}+\Sigma_{13}+\Sigma_{14}\leqslant0,\tag{29}$$

где

$$\sum\nolimits_1 = -\gamma^{(1)}x^2 - \varkappa^{(1)}x\xi - \delta^{(1)}\xi^2 + Cy\xi^2 + 2Cx\xi\eta + D\eta x^2 + 2D\xi xy + Ex^2\xi^2 - \\ - Ex^2\eta^2 - Ey^2\xi^2 - 4Exy\xi\eta,$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{n\neq 0} \Lambda_0^{(n)} e^{-q_n\eta} (\cos(q_n\xi) - 1),$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{m\neq 0} \Lambda_m^{(0)} e^{-p_m y} (\cos(p_m x) - 1),$$

$$\sum\nolimits_4 = -y \sum_{n\neq 0} H_n e^{-q_n\eta} (\cos(q_n\xi) - 1),$$

$$\sum\nolimits_5 = -x \sum_{n\neq 0} H_n \left(e^{-q_n\eta} \sin(q_n\xi) - \frac{q_n\xi}{1+q_n^2}\right),$$

$$\sum\nolimits_6 = -\eta \sum_{m\neq 0} G_m e^{-p_m y} (\cos(p_m x) - 1),$$

$$\sum\nolimits_7 = -\xi \sum_{m\neq 0} G_m \left(e^{-p_m y} \sin(p_m x) - \frac{p_m x}{1+p_m^2}\right),$$

$$\sum\nolimits_8 = -x^2 \sum_{n\neq 0} D_n \left(e^{-q_n\eta} \cos(q_n\xi) - 1 + \frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right),$$

$$\sum\nolimits_9 = y^2 \sum_{n\neq 0} D_n e^{-q_n\eta} (\cos(q_n\xi) - 1),$$

$$\sum\nolimits_{10} = 2xy \sum_{n\neq 0} D_n \left(e^{-q_n\eta} \sin(q_n\xi) - \frac{q_n\xi}{1+q_n^2}\right),$$

$$\sum\nolimits_{11} = -\xi^2 \sum_{m\neq 0} Q_m \left(e^{-p_m y} \cos(p_m x) - 1 + \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right),$$

$$\sum\nolimits_{12} = \eta^2 \sum_{m\neq 0} Q_m e^{-p_m y} (\cos(p_m x) - 1),$$

$$\sum\nolimits_{13} = 2\xi\eta \sum_{m\neq 0} Q_m \left(e^{-p_m y} \sin(p_m x) - \frac{p_m x}{1+p_m^2}\right),$$

$$\sum\nolimits_{14} = \sum_{m\neq 0,\ n\neq 0} \Lambda_m^{(n)} e^{-p_m y - q_n\eta} [\cos(p_m x + q_n\xi) - 1].$$

Покажем, что для всех узлов ($p_m \neq 0$, $q_n \neq 0$), имеющих выход в свой квадрант, коэффициенты $\Lambda_m^{(n)}$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant \Lambda_m^{(n)} \leqslant \lambda_{mn} \quad (m \neq 0,\ n \neq 0). \tag{30}$$

Пусть, например, узел ($p_M > 0$, $q_N > 0$) имеет выход в свой квадрант по вертикали. Положим в (29)

$$\xi = 0,\ x = \frac{2\pi}{\theta_M},$$

определив θ_M следующим образом:

$$\theta_M = \begin{cases} \min\{p_m \mid p_m > p_M\}, \text{ если } \{p_m \mid p_m > p_M\} \neq \varnothing, \\ 2p_M \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Зафиксируем $\eta = \tilde{\eta}$ и устремим $y \to -\infty$. При этом

$$\sum\nolimits_1 = O(1),\ \sum\nolimits_2 = 0,\ \sum\nolimits_3 = \Lambda_M^{(0)} \left[\cos\left(\frac{p_M}{\theta_M} 2\pi\right) - 1\right] e^{-p_M y} + o(e^{-p_M y}),$$

$$\sum\nolimits_4 = 0,\ \sum\nolimits_5 = 0,$$

$$\sum\nolimits_6 = -G_M\tilde{\eta}\left[\cos\left(\frac{p_M}{\theta_M}2\pi\right) - 1\right]e^{-p_M y} + o\left(e^{-p_M y}\right),\quad \sum\nolimits_7 = 0,\quad \sum\nolimits_8 = O(1),$$

$$\sum\nolimits_9 = 0,\quad \sum\nolimits_{10} = 0,\quad \sum\nolimits_{11} = 0,$$

$$\sum\nolimits_{12} = Q_M\tilde{\eta}^2\left[\cos\left(\frac{p_M}{\theta_M}2\pi\right) - 1\right]e^{-p_M y} + o\left(e^{-p_M y}\right),\quad \sum\nolimits_{13} = 0,$$

$$\sum\nolimits_{14} = \left[\cos\left(\frac{p_M}{\theta_M}2\pi\right) - 1\right]e^{-p_M y}\sum_{n\neq 0}\Lambda_M^{(n)}e^{-q_n\tilde{\eta}} + o\left(e^{-p_M y}\right).$$

Из последних оценок следует, что при выбранных значениях ξ, x, η левая часть неравенства (29) имеет асимптотику

$$\sum = \left[\cos\left(\frac{p_M}{\theta_M}2\pi\right) - 1\right]e^{-p_M y}\left(\sum_{n\neq 0}\Lambda_M^{(n)}e^{-q_n\tilde{\eta}} + \Lambda_M^{(0)} + Q_M\tilde{\eta}^2 - G_M\tilde{\eta}\right) + $$
$$+ o\left(e^{-p_M y}\right)\quad (y \to -\infty). \tag{31}$$

Подберем теперь настолько большое по модулю отрицательное значение $\tilde{\eta}$, чтобы знак (31) при $y \to -\infty$ определялся членом

$$\Lambda_M^{(1)}e^{-q_1\tilde{\eta}}\left[\cos\left(\frac{p_M}{\theta_M}2\pi\right) - 1\right]e^{-p_M y}.$$

И тогда из (31) и (29) следует, что $\Lambda_m^{(1)} \geqslant 0$. Это же верно и для соответствующего коэффициента $\tilde{\Lambda}_m^{(1)}$ в разложении (27) для х. ф. $\varphi(t, \tau; P^{(2)})$. Теперь ссылка на (28) дает $\Lambda_M^{(1)} \leqslant \lambda_{M1}$. Но $\lambda_{M1} = 0$, ибо узел (p_M, q_N) по предположению имеет выход по вертикали в свой квадрант. Отсюда следует, что $\Lambda_M^{(1)} = 0$. Проводя и далее аналогичные рассуждения, последовательно получаем

$$\Lambda_M^{(2)} = \cdots = \Lambda_M^{(N-1)} = 0,$$
$$0 \leqslant \Lambda_M^{(N)} \leqslant \lambda_{M,N}.$$

Покажем, что для всех $m \neq 0$, $n \neq 0$ коэффициенты

$$Q_m = D_n = 0, \tag{32}$$
$$G_m = H_n = 0, \tag{33}$$
$$0 \leqslant \Lambda_m^{(0)} \leqslant \lambda_{m0},\quad 0 \leqslant \Lambda_0^{(n)} \leqslant \lambda_{0n}. \tag{34}$$

По условию теоремы узлы $(p_m \neq 0, 0)$, $(0, q_n \neq 0)$ имеют выход. Предположим для определенности, что $p_m = p_M > 0$ и узел $(p_M, 0)$ имеет выход вверх. Тогда из определения выхода вверх следует, что $\lambda_{M1} = \lambda_{M2} = \cdots = 0$. Согласно (30) $\Lambda_M^{(n)} = 0$ $(n > 0)$ и для достаточно больших по модулю отрицательных значений η и y знак (31) определяется членом

$$Q_M\tilde{\eta}^2\left[\cos\left(\frac{p_M}{\theta_M}2\pi\right) - 1\right]e^{-p_M y}$$

и из (29) следует, что $Q_M \geqslant 0$. Это же верно и для коэффициента $\tilde{Q}_M$ в разложении (27) для х. ф. $\varphi(t, \tau; P^{(2)})$. После этого ссылка на (28) дает $Q_M = 0$. Соотношение (32) доказано.

С учетом (30), (32) упростим выражение (31)

$$\sum = \left(-G_M\tilde{\eta} + \Lambda_M^{(0)} + \sum_{n<0}\Lambda_M^{(n)}e^{-q_n\tilde{\eta}}\right)\left[\cos\left(\frac{p_M}{\theta_M}2\pi\right) - 1\right]e^{-p_M y} + $$
$$+ o\left(e^{-p_M y}\right)\quad (y \to -\infty). \tag{35}$$

Положив в (35) $\tilde{\eta}$ достаточно большим по модулю отрицательным числом, получим $G_M \leqslant 0$. Это же верно и для коэффициента $\tilde{G}_M$ в разложении (27) для х. ф. $\varphi(t, \tau;\ P^{(2)})$. Следовательно,

$$G_M = 0.$$

После этого из (35), (29) и (28) следует, что $0 \leqslant \Lambda_M^{(0)} \leqslant \lambda_{M0}$.

Аналогично доказываются и остальные соотношения в (32), (33), (34).

Покажем, что для всех узлов ($p_m \neq 0,\ q_n \neq 0$), имеющих конечный выход в смежный квадрант,

$$0 \leqslant \Lambda_m^{(n)} \leqslant \lambda_{mn}. \tag{36}$$

Для определенности примем $m = M > 0,\ n = N < 0$.

В силу высказанного предположения и соотношений (30), (32), (33), (34) в (31)

$$\Lambda_M^{(n)} = Q_M = G_M = 0 \quad (n \geqslant 0).$$

Ввиду конечности последовательности $\{q_n\}_{n<0} = \{q_{-1}, q_{-2}, \ldots, q_{-n_1}\}$ при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях $\tilde{\eta}$ знак (31) определяется членом

$$\Lambda_M^{(-n_1)}\left[\cos\left(\frac{p_M}{\theta_M}2\pi\right) - 1\right]e^{-p_M y} \quad (y \to +\infty).$$

Отсюда, как и выше, следует, что $\Lambda_M^{(-n_1)} \geqslant 0$. Это же верно и для $\tilde{\Lambda}_M^{(-n_1)}$ и, следовательно, по (28) $\Lambda_M^{(-n_1)} = 0$. Проводя аналогичные рассуждения, последовательно получаем

$$\Lambda_M^{(-n_1)} = \Lambda_M^{(-n_1+1)} = \cdots = \Lambda_M^{(N-1)} = 0,$$

$$0 \leqslant \Lambda_M^N \leqslant \lambda_{MN}.$$

Соотношение (36) доказано.

Таким образом, в (29)

$$\Sigma_4 = \Sigma_5 = \Sigma_6 = \Sigma_7 = \Sigma_8 = \Sigma_9 = \Sigma_{10} = \Sigma_{11} = \Sigma_{12} = \Sigma_{13} \equiv 0.$$

Покажем теперь, что

$$E = C = D = 0. \tag{37}$$

Положим в (29) $y = \eta = 0$ и устремим $x = \xi \to \infty$. При этом

$$\sum\nolimits_1 = Ex^4 + o(x^4),\ \sum\nolimits_2 = O(1),\ \sum\nolimits_3 = O(1),\ \sum\nolimits_{14} = O(1)$$

и из (29) имеем

$$Ex^4 + o(x^4) \leqslant 0,$$

откуда $E \leqslant 0$, а также $\tilde{E} \leqslant 0$ и, следовательно, $E = 0$.

Положим в (29) $\xi = y = 0$, зафиксируем $\eta = \tilde{\eta} \neq 0$ и устремим $x \to \infty$. Имеем

$$\sum\nolimits_1 = (D\tilde{\eta} - \gamma^{(1)})\,x^2 + o(x^2),\ \sum\nolimits_2 = 0,\ \sum\nolimits_3 = O(1),\ \sum\nolimits_{14} = O(1).$$

При достаточно большом по модулю значении $\tilde{\eta}$ знак $\sum_1$ определяется членом $D\tilde{\eta}x^2$. Полагая $\tilde{\eta} < 0$, а затем $\tilde{\eta} > 0$, из (29) имеем $0 \leqslant D \leqslant 0$ или $D = 0$. Аналогично показываем, что $C = 0$. Соотношение (37) доказано.

Учитывая (30), (32), (33), (34), (36), (37), перепишем (27) в виде

$$\varphi(t, \tau;\ P^{(1)}) = \exp\{i(\alpha_1 t + \beta_1\tau) - (\gamma^{(1)}t^2 + \varkappa^{(1)}t\tau + \delta^{(1)}\tau^2) +$$

$$+ \sum_{m^2+n^2\neq 0} \Lambda_m^{(n)}\left(e^{i(p_m t + q_n\tau)} - 1 - \frac{i(p_m t + q_n\tau)}{1 + p_m^2 + q_n^2}\right)\Big\}. \tag{38}$$

Осталось доказать, что $\gamma^{(1)}t^2+\varkappa^{(1)}t\tau+\delta^{(1)}\tau^2$ — неотрицательная при $(t, \tau)\in R^2$ квадратичная форма.

Определим на классе борелевских множеств пространства R^2 меру $\omega_{P^{(1)}}$ соотношением

$$\omega_{P^{(1)}}(B)=\sum_{(p_m,\ q_n)\in B}\Lambda_m^{(n)}.$$

В силу неравенств $0\leqslant\Lambda_m^{(n)}\leqslant\lambda_{mn}$, (3) и условия B)

$$\iint\limits_{|x|\leqslant r}(x_1^2+x_2^2)\,d_x\omega_{P^{(1)}}<\infty \text{ для всех } r,$$

$$\iint\limits_{|x|>r}d_x\omega_{P^{(1)}}=O\left(e^{-cr^2}\right)\ (c>0).$$

С помощью $\omega_{P^{(1)}}$ перепишем (38) в виде

$$\varphi(t, \tau;\ P^{(1)})=\exp\{f_1(t, \tau)+f_2(t, \tau)+f_3(t, \tau)\},$$

где

$$f_1(t, \tau)=-\iint\limits_{|x|>r}d_x\omega_{P^{(1)}}+i\left[\left(\alpha_1-\iint\limits_{|x|>r}\frac{x_1}{1+x_1^2+x_2^2}\,d_x\omega_{P^{(1)}}\right)t+\right.$$

$$\left.+\left(\beta_1-\iint\limits_{|x|>r}\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}\,d_x\omega_{P^{(1)}}\right)\tau\right]-(\gamma^{(1)}t^2+\varkappa^{(1)}t\tau+\delta^{(1)}\tau^2),$$

$$f_2(t, \tau)=\iint\limits_{|x|\leqslant r}\left(e^{i(tx_1+\tau x_2)}-1-\frac{i(tx_1+\tau x_2)}{1+x_1^2+x_2^2}\right)d_x\omega_{P^{(1)}},$$

$$f_3(t, \tau)=\iint\limits_{|x|>r}e^{i(tx_1+\tau x_2)}\,d_x\omega_{P^{(1)}}.$$

Применяя к функциям $f_2(t, \tau)$, $f_3(t, \tau)$ соответственно леммы 2 и 3, имеем

$$f_2(t, \tau)=o(1+|t|^2+|\tau|^2),$$
$$f_3(t, \tau)=O(1)\quad (t, \tau)\in R^2.$$

Таким образом, при всех $(t, \tau)\in R^2$ справедлива оценка

$$\varphi(t, \tau;\ P^{(1)})=\exp\{-(\gamma^{(1)}t^2+\varkappa^{(1)}t\tau+\delta^{(1)}\tau^2)+o(1+|t|^2+|\tau|^2)\}. \tag{39}$$

С другой стороны, при вещественных t и τ

$$|\varphi(t, \tau;\ P^{(1)})|=\left|\iint e^{i(tx_1+\tau x_2)}\,d_xP^{(1)}\right|\leqslant\iint d_xP^{(1)}=1. \tag{40}$$

Из сопоставления (39) и (40) следует неотрицательность формы $\gamma^{(1)}t^2+$ $+\varkappa^{(1)}t\tau+\delta^{(2)}\tau^2$.

В случае 1 теорема доказана.

Случай 2. Составляющие $S^+_{P^{(0)}}$, $S^-_{P^{(0)}}$ имеют тип II

Ввиду ограниченности множеств $S^+_{P^{(0)}}$ и $S^-_{P^{(0)}}$ последовательности $\{p_m\}$, $\{q_n\}$ ограничены и, следовательно, не имеют отличных от нуля точек сгущения. Занумеруем теперь эти последовательности следующим образом:

$$p_0=q_0=0,\ p_m>0,\ q_n>0 \text{ при } m>0,\ n>0;$$
$$p_m<0,\ q_n<0 \text{ при } m<0,\ n<0;$$
$$|p_M|<|p_m|,\ |q_N|<|q_n| \text{ при } \operatorname{sgn}M=\operatorname{sgn}m,\ |M|>|m|;$$
$$\operatorname{sgn}N=\operatorname{sgn}n,\ |N|>|n|.$$

Обозначим

$$A_m = \{k \mid \lambda_{mk} > 0\},$$
$$B_n = \{k \mid \lambda_{kn} > 0\} \quad (m \neq 0,\ n \neq 0).$$

По определению типа II множество $\{0, q_n \neq 0\}$ не содержит точек сгущения спектра закона $P^{(0)}$. Отсюда следует, что множества $B_n\,(n \neq 0)$ конечны.

Отметим следующие утверждения:

$$(m \overline{\in} B_n) \leftrightarrow (\lambda_{mn} = 0) \leftrightarrow (n \overline{\in} A_m). \tag{41}$$

Имеем

$$\sum_n (\mu_n(y) - \mu_n^{(1)}) \left(e^{q_n\eta} - 1 - \frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right) = (\mu_1(y) - \mu_1^{(1)})\, e^{q_1\eta} + R_1(y, \eta),$$

где

$$R_1(y, \eta) = -(\mu_1(y) - \mu_1^{(1)}) \left(1 + \frac{q_1\eta}{1+q_1^2}\right) +$$
$$+ \sum_{n \neq 1} (\mu_n(y) - \mu_n^{(1)}) \left(e^{q_n\eta} - 1 - \frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right).$$

Используя (11), (16) и известные неравенства

$$|e^x - 1| = \left|\int_0^x e^u\,du\right| \leqslant (1 + e^x)\,|x|,$$

$$|e^x - 1 - x| = \left|\int_0^x (x-u)\,e^u\,du\right| \leqslant (1 + e^x)\,x^2,$$

получаем для $R_1(y, \eta)$ при $\eta > 0$ оценку

$$|R_1(y, \eta)| \leqslant (\mu_1(y) + \mu_1^{(1)}) \left(1 + \frac{q_1}{1+q_1^2}\,\eta\right) + \sum_{n \neq 1} (\mu_n(y) + \mu_n^{(1)}) \frac{q_n^2\,|e^{q_n\eta} - 1|}{1+q_n^2} +$$
$$+ \sum_{n \neq 1} (\mu_n(y) + \mu_1^{(1)}) \frac{|e^{q_n\eta} - 1 - q_n\eta|}{1+q_n^2} = O(e^{q_2\eta}) \quad (\eta \to +\infty).$$

Таким образом, левая часть (22) при $\eta \to +\infty$ имеет асимптотику

$$(\mu_1(y) - \mu_1^{(1)})\, e^{q_1\eta} + O(e^{q_2\eta}).$$

Запишем теперь для $\lambda_m(\eta)$ с $m \overline{\in} B_1$ оценки (21)

$$0 \leqslant \lambda_m(\eta) \leqslant \sum_{n \in A_m} \lambda_{mn} e^{q_n\eta}, \tag{42}$$

где по (41) $A_m \overline{\ni} 1$.

Разделив обе части (22) на $e^{q_1\eta}$, приходим к выражению

$$\mu_1(y) - \mu_1^{(1)} + O(e^{(q_2 - q_1)\eta}) = \frac{\alpha(\eta)}{e^{q_1\eta}}\,y + \frac{\gamma(\eta)}{e^{q_1\eta}}\,y^2 + \sum_m \frac{\lambda_m(\eta)}{e^{q_1\eta}} \left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right) -$$
$$- \frac{1}{e^{q_1\eta}} \left(\alpha^{(1)} y + \gamma^{(1)} y^2 + \sum_m \lambda_m^{(1)} \left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)\right). \tag{43}$$

При $\eta > 0$, используя (42), имеем

$$0 \leqslant \sum_{m \overline{\in} B_1} \frac{\lambda_m(\eta)}{e^{q_1\eta}} \left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right) \leqslant \sum_{m \overline{\in} B_1} \sum_{n \in A_m} \lambda_{mn} \frac{e^{q_n\eta}}{e^{q_1\eta}} \left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1+p_m^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant e^{(q_2-q_1)\eta}\sum_{m,\,n}\lambda_{mn}\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right),$$

откуда по признаку Вейерштрасса ряд

$$\sum_{m\overline{\in}B_1}\frac{\lambda_m(\eta)}{e^{q_1\eta}}\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)$$

сходится равномерно при $\eta>0$ (y — фиксировано).

Переходя в (43) к пределу при $\eta\to+\infty$, получаем

$$\mu_1(y)-\mu_1^{(1)}=\lim_{\eta\to+\infty}\left(\frac{\alpha(\eta)}{e^{q_1\eta}}y+\frac{\gamma(\eta)}{e^{q_1\eta}}y^2+\sum_{m\in B_1}\frac{\lambda_m(\eta)}{e^{q_1\eta}}\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)\right).\qquad(44)$$

Как отмечалось выше, множества B_n конечны.

Если n_1 — число элементов B_1, то, придавая y в (44) последовательно значения y_j ($j=1,2,\ldots,n_1+1,\ n_1+2$), приходим к системе алгебраических уравнений, линейных относительно неизвестных функций

$$\frac{\alpha(\eta)}{e^{q_1\eta}}y_j+\frac{\gamma(\eta)}{e^{q_1\eta}}y_j^2+\sum_{m\in B_1}\frac{\lambda_m(\eta)}{e^{q_1\eta}}\left(e^{p_m y_j}-1-\frac{p_m y_j}{1+p_m^2}\right)=$$
$$=\mu_1(y_j)-\mu_1^{(1)}+h_1(\eta;\,y_j)\quad(j=1,\ldots,n_1+2),\qquad(45)$$

где $h_1(\eta;\,y_j)\to0$ при $\eta\to+\infty$.

Система функций $\left(y,\,y^2,\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)_{m\in B_1}\right)$ линейно независима. По лемме 1 значения y_j можно подобрать так, чтобы определитель системы (45) был отличен от нуля. Решая систему при выбранных y_j, получаем выражения

$$\frac{\alpha(\eta)}{e^{q_1\eta}}=\mathrm{A}_1+o(1),\quad\frac{\gamma(\eta)}{e^{q_1\eta}}=\Gamma_1+o(1),$$
$$\frac{\lambda_m(\eta)}{e^{q_1\eta}}=\Lambda_m^{(1)}+o(1)\quad(m\in B_1).$$

Из последних равенств следует существование пределов

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{\alpha(\eta)}{e^{q_1\eta}}=\mathrm{A}_1;\qquad\lim_{\eta\to+\infty}\frac{\gamma(\eta)}{e^{q_1\eta}}=\Gamma_1\geqslant0,$$
$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{\lambda_m(\eta)}{e^{q_1\eta}}=\Lambda_m^{(1)}\quad(m\in B_1).$$

Из (21) видно, что $\Gamma_1=0$, $\Lambda_m^{(1)}\leqslant\lambda_{m1}$.

Перейдем в (44) почленно к пределу при $\eta\to+\infty$. Обозначая $\mu_1^{(1)}=\Lambda_0^{(1)}$, найдем

$$\mu_1(y)=\Lambda_0^{(1)}+\mathrm{A}_1y+\sum_{m\neq0}\Lambda_m^{(1)}\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right),\qquad(46)$$

где A_1 — вещественно, $\Lambda_m^{(1)}$ — неотрицательны и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}&0\leqslant\Lambda_m^{(1)}\leqslant\lambda_{m1}\quad\text{при}\quad m\in B_1,\\&\Lambda_m^{(1)}=0\qquad\qquad\text{при}\quad m\overline{\in}B_1.\end{aligned}\qquad(47)$$

Подставляя выражение для $\mu_1(y)$ в (22), преобразуем (22) к виду

$$\beta(y)\eta+\delta(y)\eta^2+\sum_{n\neq 1}\mu_n(y)\left(e^{q_n\eta}-1-\frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right)-\beta^{(1)}\eta-\delta^{(1)}\eta^2-$$

$$-\sum_{n\neq 1}\mu_n^{(1)}\left(e^{q_n\eta}-1-\frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right)=(\alpha(\eta)-A_1)\,y+\gamma(\eta)\,y^2+$$

$$+\sum_{0\neq m\in B_1}\left[\lambda_m(\eta)-\Lambda_m^{(1)}\left(e^{q_1\eta}-1-\frac{q_1\eta}{1+q_1^2}\right)\right]\times$$

$$\times\left(e^{p_my}-1-\frac{p_my}{1+p_m^2}\right)+\sum_{0\neq m\,\bar{\in}\,B_1}\lambda_m(\eta)\left(e^{p_my}-1-\frac{p_my}{1+p_m^2}\right)-\alpha_1y-\gamma^{(1)}y^2-$$

$$-\sum_m\lambda_m^{(1)}\left(e^{p_my}-1-\frac{p_my}{1+p_m^2}\right). \tag{48}$$

Почти дословно повторяя рассуждения, использованные при выводе (46) получим

$$\mu_2(y)=\Lambda_0^{(2)}+A_2y+\sum_{m\neq 0}\Lambda_m^{(2)}\left(e^{p_my}-1-\frac{p_my}{1+p_m^2}\right), \tag{49}$$

где

$$A_2=\lim_{\eta\to+\infty}\frac{\alpha(\eta)-A_1}{e^{q_2\eta}},\quad \Lambda_0^{(2)}=\mu_2^{(1)}\geqslant 0, \tag{50}$$

$$\Lambda_m^{(2)}=\lim_{\eta\to+\infty}\frac{\lambda_m(\eta)}{e^{q_2\eta}}\leqslant\lambda_{m2}\quad\text{при}\ 0\neq m\,\bar{\in}\,B_1,$$

$$\Lambda_m^{(2)}=\lim_{\eta\to+\infty}\frac{\lambda_m(\eta)-\Lambda_m^{(1)}}{e^{q_2\eta}}\quad\text{при}\ 0\neq m\in B_1\cap B_2,$$

$$\Lambda_m^{(2)}=0\quad\text{при}\quad 0\neq m\in\bar{B}_2.$$

Если узел $(p_m\neq 0,\ q_n)$ пуассоновой сетки закона $P^{(0)}$ имеет выход в свой квадрант по вертикали, то $\lambda_{m1}=0$ и $m\,\bar{\in}\,B_1$. Тогда из (50) следует, что $0\leqslant\Lambda_m^{(2)}\leqslant\lambda_{m2}$.

Предположим теперь, что узел $(p_m\neq 0,\ q_n)$ имеет выход в свой квадрант по горизонтали. Для определенности будем считать, что $p_m=p_M>0$. Тогда $\lambda_{1,2}=\ldots=\lambda_{M-1,2}=0$, и из (18) следует, что $\Lambda_{m,2}=0$ при $0<m<M$ и $0\leqslant\Lambda_M^{(2)}\leqslant\lambda_{M,2}$.

Далее методом полной индукции можно легко показать, что для всех $n\neq 0$

$$\mu_n(y)=\Lambda_0^{(n)}+A_ny+\sum_{m\neq 0}\Lambda_m^{(n)}\left(e^{p_my}-1-\frac{p_my}{1+p_m^2}\right), \tag{51}$$

где $\Lambda_0^{(n)}=\mu_n^{(1)}$, $0\leqslant\Lambda_m^{(n)}\leqslant\lambda_{mn}$ для всех узлов пуассоновой сетки, имеющих вывод в свой квадрант. Заметим, что по определению составляющих $\overset{+}{S}_{P^{(0)}}$, $\overset{-}{S}_{P^{(0)}}$ типа II лишь конечное множество узлов $(p_m\neq 0,\ q_n\neq 0)$ имеет единственный выход в смежный квадрант. Это замечание и оценки для коэффициентов $\Lambda_m^{(n)}$ обеспечат абсолютную и равномерную сходимость всех встречающихся в дальнейшем функциональных рядов.

Подставим выражение (51) для $\mu_n(y)$ в (22). Меняя порядок суммирования, после элементарных преобразований получаем

$$(\beta(y)-\beta^{(1)})\,\eta+(\delta(y)-\delta^{(1)})\,\eta^2=$$

$$=\left(\alpha(\eta)-\alpha^{(1)}-\sum_n \Lambda_n\left(e^{q_n\eta}-1-\frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right)\right)y+(\gamma(\eta)-\gamma^{(1)})\,y^2+$$

$$+\sum_m\left[\lambda_m(\eta)-\lambda_m^{(1)}-\sum_n \Lambda_m^{(n)}\left(e^{q_n\eta}-1-\frac{q_n\eta}{1+q_n^2}\right)\right]\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right). \quad (52)$$

Подставляя в (52) последовательно $\eta=\eta_1$, $\eta=\eta_2$, получаем систему двух линейных уравнений относительно функций $\beta(y)-\beta^{(1)}$, $\delta(y)-\delta^{(1)}$. Решая полученную систему при $\eta_1\neq 0$, $\eta_2\neq 0$, $\eta_1\neq\eta_2$ относительно $\delta(y)-\delta^{(1)}$, находим

$$\delta(y)-\delta^{(1)}=e_1y+e_2y^2+e_3(y),$$

где ряд

$$e_3(y)=\sum_m g_m\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)$$

сходится абсолютно, причем $\sum\limits_m |g_m|\,p_m^2<\infty$.

Представим $e_3(y)$ в виде

$$e_3(y)=g_1\left(e^{p_1y}-1-\frac{p_1y}{1+p_1^2}\right)+\sum_{m>1} g_m\times$$

$$\times\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)+\sum_{m<0} g_m\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right).$$

Применяя к первой сумме лемму 2, имеем

$$\sum_{m>1} g_m\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)=o\{1+y^2)(1+e^{p_2y})\}\;(y\to+\infty).$$

Для второй суммы получаем оценку

$$\left|\sum_{m<0} g_m\left(e^{p_m y}-1-\frac{p_m y}{1+p_m^2}\right)\right|\leqslant\sum_{m<0}|g_m|\,|e^{p_m y}-1-p_m y|+$$

$$+|y|\sum_{m<0}|g_m|\frac{|p_m|^3}{1+p_m^2}=\sum_{m<0}|g_m|\times$$

$$\times\int_0^{p_m y}(p_m y-u)\,e^u\,du+O(y)=O(y^2)\;(y\to+\infty).$$

Таким образом, функция $\delta(y)-\delta^{(1)}$ при $y\to+\infty$ имеет асимптотику

$$\delta(y)-\delta^{(1)}=g_1e^{p_1y}+o(e^{p_1y})\;(y\to+\infty).$$

Но теперь из (18) следует, что $g_1=0$.

Аналогично доказываем, что при всех m $g_m=0$, $e_1=e_2=0$ и, значит,

$$\delta(y)\equiv\delta^{(1)}. \quad (53)$$

Возвращаясь к (52), выпишем выражение для коэффициента e_2

$$0=e_2=\frac{\eta_1(\gamma(\eta_2)-\gamma^{(1)})-\eta_2(\gamma(\eta_1)-\gamma^{(1)})}{\eta_1\eta_2(\eta_2-\eta_1)}.$$

Отсюда при всех вещественных η_1, η_2

$$\eta_1(\gamma(\eta_2)-\gamma^{(1)})=\eta_2(\gamma(\eta_1)-\gamma^{(1)}).$$

Но по (21) функция $\gamma(\eta)$ ограничена. Последнее соотношение показывает, что

$$\gamma(\eta) - \gamma^{(1)} \equiv 0. \tag{54}$$

Подставляя (53), (54) в (52) и приняв $\eta = 1$, получаем для $\beta(y$ выражение

$$\beta(y) = \beta^{(1)} + By + \sum_m B_m \left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1 + p_m^2}\right). \tag{55}$$

Подставим теперь (51), (55), (53) в (19)

$$\varphi(-iy, \tau; P^{(1)}) = \exp\left\{i\left[\beta^{(1)} + By + \sum_m B_m \left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1 + p_m^2}\right)\right]\tau - \right.$$

$$- \delta^{(1)}\tau^2 + y\sum_n A_n \left(e^{iq_n\tau} - 1 - \frac{iq_n\tau}{1 + q_n^2}\right) + \sum_{m,n} \Lambda_m^{(n)} \left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1 + p_m^2}\right) \times$$

$$\times \left(e^{iq_n\tau} - 1 - \frac{iq_n\tau}{1 + q_n^2}\right) + \alpha^{(1)} y + \gamma^{(1)} y^2 +$$

$$\left. + \sum_m \lambda_m^{(1)} \left(e^{p_m y} - 1 - \frac{p_m y}{1 + p_m^2}\right)\right\}. \tag{56}$$

Дальнейшее доказательство является почти дословным повторением рассуждений, проводимых в случае I, начиная с выражения (27) и до конца.

Случай 3. Составляющие $S^+_{p(0)}$, $S^-_{p(0)}$-разных типов

Доказательство в этом случае получаем, комбинируя рассуждения случаев 1 и 2. Наметим его.

Пусть, например, составляющие $S^-_{p(0)}$, $S^+_{p(0)}$ пуассонова спектра закона $P^{(0)}$ имеют соответственно типы I и II.

Отправляясь от соотношения (22), как и в случае 2, доказываем, что при всех $q_n > 0$ для $\mu_n(y)$ справедливо представление (51).

Далее, перенося в (22) сумму $\sum\limits_{q_n > 0} \mu_n(y) \cdot \left(e^{q_n\eta} - 1 - \frac{q_n\eta}{1 + q_n^2}\right)$ в правую часть, после преобразований получаем для $\mu_n(y)(q_n < 0)$ систему линейных алгебраических уравнений.

Находясь теперь в условиях случая 1, доводим доказательство до конца.

В заключение автор приносит глубокую благодарность И. В. Островскому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Изд-во ЛГУ, 1960

2. И. В. Островский. О безгранично делимых законах с неограниченным пуассоновым спектром. ДАН СССР, 152, № 6, 1963, 1301—1304.

3. И. В. Островский. О разложении композиции законов Гаусса и Пуассона. УМН, т. 20, 4, 1965, 166—171.

4. И. В. Островский. О разложениях решетчатых безгранично делимых законов. Вестник ЛГУ, серия матем. мех. астр., № 1), 1964, 51—60.

5. И. В. Островский. Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов. Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 79, 1965, 198—235.

6. И. В. Островский. Многомерный аналог теоремы Ю. В. Линника о разложениях композиции законов Гаусса и Пуассона. Теория вероятностей и ее применения, X. 4, 1965, 742—746.

7. И. В. Островский. О разложениях многомерных безгранично делимых законов без гауссовой компоненты. Вестник ХГУ, № 14, серия мех.-матем., т. 32. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966, 51—72.

8. R. Cuppens. Sur les produits finis de lois de Poisson. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, p. 726—729, 1968.

9. R. Cuppens. Decomposition des fonctions caractéristiques des vecteurs aléatoires, these de doctorat d'etat es sciences — mathematiques, Paris, 1967.

10. H. Cramer. Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion, Math. Zeitschr, 41 (1936), 405—414.

11. H. Teicher. On the multivariate Poisson distribution, Scand. Actuarietidskr, 1—2 (1954), 1—9.

12. P Lévy. Theorie de l'addition des variables aleatoires, Paris, Gauthier — Villars, 1937.

Поступила 13 мая 1969 г.