О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Руткас

В спектральной теории несамосопряженных операторов использовались различные типы характеристических функций [1—4]. Все они определены только в регулярных точках оператора, их мультипликативные свойства связаны с инвариантными подпространствами оператора, а совпадение характеристических функций двух простых операторов T_1 и T_2 является критерием унитарной эквивалентности T_1 и T_2. Класс функций, вводимых для ограниченного оператора T М. С. Бродским и М. С. Лившицем с помощью каналовых представлений $\operatorname{Im} T$ или операторных узлов [1, 2], является более общим, чем класс характеристических функций того же оператора T из [3] или [4], зато функции из [3, 4] можно строить для замкнутого неограниченного оператора T с непустым множеством регулярных точек $\rho(T)$.

Ниже понятие характеристической функции из [1, 2] обобщается для класса неограниченных операторов T, у которых разность $T - T^*$ определена на плотном множестве. При этом не требуется, чтобы T был замкнутым и имел регулярные точки. Обобщение приводит к понятию неограниченного узла и характеристической оператор-функции $S(\lambda)$, определенной во всех точках λ, кроме чисто точечного спектра $P\sigma T$. Оператор $S(\lambda)$ может быть неограниченным, а его область определения — зависимой от λ и неплотной в соответствующем пространстве. Тем не менее, на некотором многообразии он обладает теми же метрическими свойствами, что и в случае ограниченного T [1, 2]; характеристические операторы унитарно эквивалентных узлов совпадают; наконец, наличие инвариантных подпространств у оператора T определяет мультипликативные свойства его характеристического оператора $S(\lambda)$. Доказано несколько вариантов теоремы умножения. Все установленные для $S(\lambda)$ результаты не предполагают, что $\lambda \in \rho(T)$, и поэтому представляют определенный интерес также в случае ограниченного T.

1. ПРИМЕРЫ

В комплексном пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим оператор

$$Tf = p(x)\frac{df}{dx},$$

где заданная абсолютно непрерывная функция $p(x)$ удовлетворяет на отрезке $[0, 1]$ условиям

$$0 < \mu \leqslant |p(x)| \leqslant M; \quad p'(x) \in L_2.$$

Пусть D_T состоит* из абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций $f(x)$, для которых $f'(x) \in L_2$, $f(0) = f(\alpha) = 0$ $(0 < \alpha < 1)$.

Тогда $D_{T^*} = \{g(x)\}$, где $g'(x) \in L_2$, $g(x)$ абсолютно непрерывна в интервалах $(0, \alpha)$ и $(\alpha, 1)$ со скачком в точке α и $g(1) = 0$. При этом $T^*g = -[\overline{p(x)}\,g(x)]'$ почти всюду на $[0, 1]$. Многообразие

$$\hat{H} = D_T \cap D_{T^*}$$

состоит из абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций $f(x)$, для которых

$$f'(x) \in L_2,\ f(0) = f(\alpha) = f(1) = 0,$$

так что $\hat{H}$ всюду плотно в L_2. Оператор T имеет пустое множество собственных чисел $P\sigma T$ и регулярных точек $\rho(T)$; наоборот, $P\sigma T^*$ совпадает со всей комплексной плоскостью.

а) пусть сначала $P(x) \equiv i$. Для координатного евклидового пространства R_2 с произвольным вектором $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ и скалярным произведением

$$(\varphi, f) = \varphi_1\bar{f}_1 + \varphi_2\bar{f}_2$$

введем оператор

$$\Gamma_\lambda \varphi = \varphi_2 e^{i\left(\frac{2\pi}{\alpha} - \lambda\right)x},$$

действующий из R_2 в L_2 и зависящий от комплексного параметра λ. При каждом λ

$$\Gamma_\lambda^* \psi = (0, \Phi_\lambda),$$

где

$$\Phi_\lambda = \int_0^1 e^{-i\left(\frac{2\pi}{\alpha} - \bar{\lambda}\right)x} \cdot \psi(x)\,dx;$$

$$T - T^* \subset i\,\Gamma_\lambda J \Gamma_\lambda^*, \tag{1.1}$$

где оператор $T - T^*$ определен и равен нулю на $\hat{H}$, $J(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1)$. Очевидно, $J = J^*$, $JJ^* = I$.

Характеристическая функция $S(\lambda)$ ограниченного оператора T определяется в [1, 2] следующим образом:

$$S(\lambda) = I - iJ\Gamma^*(T - \lambda I)^{-1}\Gamma, \tag{1.2}$$

где Γ и J — не зависящие от λ операторы из представления $\frac{1}{i}(T - T^*) = \Gamma J \Gamma^*$.

Подстановка в формулу (1.2) значений T и $\Gamma = \Gamma_\lambda$ из рассматриваемого примера приводит к следующему оператору $S(\lambda)$:

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & r(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$r(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1 - \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}(\lambda - \bar{\lambda})\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{\alpha}}\right)\right] e^{-i(\lambda - \bar{\lambda})}}{(\lambda - \bar{\lambda})(\lambda - \bar{\lambda} + 2\pi/\alpha)}, & \lambda - \bar{\lambda} \neq 0 \\[2ex] \dfrac{i\alpha}{2\pi} + \dfrac{\alpha^2}{(2\pi)^2}\left(e^{-\frac{2\pi i}{\alpha}} - 1\right), & \lambda - \bar{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Оператор-функция $S(\lambda)$ в (1.3) определена при любом комплексном λ на всем простран тве R_2 и всюду неголоморфна (напомним, что всякое значение λ является точкой спектра оператора T).

---

* Здесь применяются обозначения: D_A, Δ_A — области определения и значений оператора A соответственно; A^* — оператор, сопряженный к A.

б) Вернемся к оператору T вида

$$Tf = p(x)\frac{df}{dx}.$$

Соотношения

$$Af = -i\frac{df}{dx}, \quad Bf = p(x)f(x)$$

определяют в L_2 операторы A и B, где принято $f \in D_A$, если $f(x)$ абсолютно непрерывна, $f'(x) \in L_2$, $f(0) = f(1) = 0$.

В пространстве $E = L_2 \times L_2$ с произвольным элементом вида

$$\varphi = (\varphi_1(x), \ \varphi_2(x))$$

можно задать следующий оператор Γ с областью значений в L_2:

$$\Gamma\varphi = A\varphi_1 + B\varphi_2.$$

Сопряженный оператор Γ^* определен на абсолютно непрерывных функциях $\psi(x)$, $\psi'(x) \in L_2$:

$$\Gamma^*\psi = \left(-i\frac{d\psi}{dx}, \ \overline{p(x)}\cdot\psi(x)\right).$$

Если ввести в E оператор J по правилу

$$J(\varphi_1, \ \varphi_2) = (\varphi_2, \ \varphi_1),$$

то

$$-i(T - T^*) \subset \Gamma J \Gamma^*. \tag{1.4}$$

Подставив операторы T, Γ, J, Γ^* в (1.2), получим:

$$S(\lambda)\varphi = \Big(\varphi_1(x) - i\overline{p(x)}e^{\lambda h(x)}\int_0^x F\varphi(t)\,dt;$$

$$\varphi_2(x) - e^{\lambda h(x)}\left[F\varphi(x) + \frac{\lambda}{p(x)}\int_0^x F\varphi(t)\,dt\right]\Big),$$

где

$$F\varphi(x) = \left[\varphi_2(x) - \frac{i}{p(x)}\varphi_1'(x)\right]e^{-\lambda h(x)},$$

$$h(x) = \int\frac{dx}{p(x)}.$$

Область определения $D_{S(\lambda)}$ оператора $S(\lambda)$ в силу включения $D_{\Gamma^*} \supset D_T$ совпадает с областью определения оператора $(T - \lambda I)^{-1}\Gamma$.

При $g \in \Delta_{T-\lambda I}$ имеем

$$f(x) = (T - \lambda I)^{-1}g = e^{\lambda h(x)}\int_0^x g(t)\frac{e^{-\lambda h(t)}}{p(t)}dt.$$

Принимая $g = \Gamma\varphi$ и учитывая граничное условие $f(\alpha) = 0$, получаем: если

$$(\varphi_1(x), \ \varphi_2(x)) = \varphi \in D_{S(\lambda)},$$

то

$$\varphi_1'(x) \in L_2, \ \ \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0$$

и

$$\int_0^\alpha [p(x)\varphi_2(x) - i\varphi_1'(x)]\frac{e^{-\lambda h(x)}}{p(x)}dx = 0.$$

Формула (1.2) во втором примере привела к неограниченному оператору $S(\lambda)$ с неплотной в E областью определения, зависящей от λ.

2. НЕОГРАНИЧЕННЫЙ УЗЕЛ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

Через $\Lambda(H)$ обозначим класс линейных операторов в гильбертовом пространстве H, для которых многообразие

$$\hat{H} = D_T \cap D_{T^*}$$

плотно в H. Для построения характеристической функции (1.2) необходимо иметь представление вида (1.4) для мнимой части оператора T, определенной на $\hat{H}$.

Определение 2.1. *Пусть A — симметрический оператор в H E — некоторое гильбертово пространство. Каналовым представлением оператора A относительно E назовем соотношение $A \subset \Gamma J \Gamma^*$,* где J — самосопряженный унитарный оператор в E, Γ — оператор из E в H.

Теорема 2.1. *Всякий симметрический оператор A с одинаковыми индексами дефекта допускает каналовое представление по отношению к любому гильбертову пространству E, лишь бы выполнялась оценка*

$$\dim E \geqslant \dim \Delta_{\tilde{A}}$$

для размерности области значений самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A. Существует представление, в котором $\overline{\Delta_{\tilde{A}}} = \overline{\Delta_\Gamma}$, подпространство $\overline{\Delta_{\Gamma^*}}$ в E приводит J и на ортогональном дополнении к $\overline{\Delta_{\Gamma^*}}$ оператор J можно задавать равным единичному.

Доказательство быстро получается с помощью спектрального разложения и функций оператора $\tilde{A}$. В ряде случаев удобнее характеризовать операторы Γ и J без использования спектральной теории, и мы приводим доказательство теоремы, исходящее из полярного представления ограниченного нормального оператора.

Пусть сначала задан ограниченный самосопряженный оператор B. Подпространства $\overline{\Delta_B}$ и $H \ominus \overline{\Delta_B}$ приводят оператор B, а часть оператора B в $\overline{\Delta_B}$ имеет обратный $B^{[-1]}$. Как нормальный оператор, $B = DU$, где $D \geqslant 0$, а U унитарен; при этом $\Delta_D = \Delta_B$, $D = \sqrt{B^2}$, а U всегда можно выбрать так, чтобы $UB = BU$. Далее,

$$B = B^* B^{[-1]} B = U^* D B^{[-1]} D U,$$

$$UBU^* = BUU^* = B = DB^{[-1]} D.$$

Выделим произвольным образом подпространство E_1 в E, изоморфное $\overline{\Delta_B}$, и оператор V из H в E, изометрично отображающий $\overline{\Delta_B}$ на E_1 и аннулирующийся на $H \ominus \overline{\Delta_B}$. Оператор $\Gamma = \sqrt{D} V^*$ действует из E в H $(D_\Gamma = E)$, сопряженный оператор $\Gamma^* = V\sqrt{D}$ — из H в E $(D_{\Gamma^*} = H)$; $\Gamma\Gamma^* = D$.

На основании соотношений

$$\Delta_B = \Delta_D \subset \Delta_{\sqrt{D}} \subset \overline{\Delta}_B \supset \Delta_\Gamma = \Delta_{\sqrt{D}} \supset \Delta_B$$

имеем $\overline{\Delta}_\Gamma = \overline{\Delta}_B$. Равенство

$$\Gamma^{[-1]} \Gamma g = g$$

при всяком $g \in E_1$ определяет оператор $\Gamma^{[-1]}$ из Δ_Γ в $E_1 = \overline{\Delta}_{\Gamma^*}$, причем $\Gamma\Gamma^{[-1]} f = f$ для всякого $f \in \Delta_\Gamma \subset H$. Аналогично определяется оператор $\Gamma^{*[-1]}$ из Δ_{Γ^*} в $\overline{\Delta}_B = \overline{\Delta}_\Gamma : \Gamma^{*[-1]} \Gamma^* f = f$ при всяком $f = \in \overline{\Delta}_B$, причем $\Gamma^* \Gamma^{*[-1]} \varphi = \varphi$ при $\varphi \in \Delta_{\Gamma^*} \subset E_1$.

Поскольку $B = \Gamma\Gamma^* B^{[-1]}\Gamma\Gamma^*$, то для $\varphi \in \Delta_{\Gamma^*}$ имеем $Q\varphi = P\varphi$, где обозначено:

$$Q = \Gamma^{[-1]} B \Gamma^{*[-1]}, \quad P = \Gamma^* B^{[-1]} \Gamma.$$

Очевидно, что $P\varphi \in \Delta_{\Gamma^*}$ и $QP\varphi = \varphi$, откуда $P^2(\varphi) = \varphi$ при $\varphi \in \Delta_{\Gamma^*}$, и что P симметричен на $D_P = \Delta_{\Gamma^*}$.

Следовательно, P — ограниченный оператор; пусть $\tilde{P}$ — его продолжение по непрерывности с линеала Δ_Γ на подпространство $E_1 = \overline{\Delta}_{\Gamma^*}$. По построению $\tilde{P} = \tilde{P}^*$, $\tilde{P}_2 = I$.

Доопределив $\tilde{P}$ единицей на $E \ominus E_1$, получаем требуемые оператор J и каналовое представление оператора B по пространству E:

$$B = \Gamma\tilde{P}\Gamma^* = \Gamma J \Gamma^*.$$

Пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение симметрического оператора A. Пространство H распадается в ортогональную сумму подпространств L_n, в каждом из которых $\tilde{A}$ индуцирует ограниченный самосопряженный оператор A_n. Выделим подпространство E_0 в E, изоморфное $\overline{\Delta}_{\tilde{A}}$, и разобьем E_0 на сумму попарно ортогональных подпространств E_n, $\dim E_n = \dim \Delta_{A_n}$, $n = 1, 2, \ldots$

По доказанному

$$A_n = \Gamma_n J_n \Gamma_n^*,$$

где

$$\Gamma_n = \sqrt{\sqrt{A_n^2}}\, V_n^*,$$

V_n — изометрическое отображение подпространства $\overline{\Delta}_{A_n}$ на E_n, $\overline{\Delta}_{\Gamma_n} = \overline{\Delta}_{A_n}$, $\overline{\Delta}_{\Gamma_n^*} = E_n$.

Оператор

$$J_0\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} J_n Q_n \varphi$$

(где $\varphi \in E_0$ и Q_n — ортопроектор из E_0 на E_n) после доопределения на подпространстве $E \ominus E_0$ единицей дает оператор J:

$$D_J = E, \quad J = J^*, \quad J^2 = I.$$

Пусть

$$\Gamma\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n Q_n \varphi, \quad \varphi \in D_\Gamma$$

при

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \Gamma_n Q_n f \|^2 < \infty;$$

если доопределить оператор Γ на $E \ominus E_0$ нулем, то $\overline{D}_\Gamma = E$. Ясно, что $\Gamma^* \supset \Gamma_0$, где

$$\Gamma_0\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^* f_n,$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad f_n \in L_n.$$

Когда $f \in D_{\tilde{A}}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \Gamma_n^* f_n \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 f_n, f_n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| \sqrt{A_n^2 f_n} \| \cdot \| f_n \| = \sum_{n=1}^{\infty} \| A_n f_n \| \cdot \| f_n \| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \| A_n f_n \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \| Af \| \cdot \| f \|,$$

так что $f \in D_{\Gamma_0}$.

Следовательно,

$$\tilde{A}f = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n J_n \Gamma_n^* f_n = \Gamma J \Gamma^* f, \; f \in D_{\tilde{A}},$$

причем каналовое представление $A \subset \Gamma J \Gamma^*$ обладает всеми необходимыми свойствами, что и требовалось доказать.

Условимся через $[HT\Gamma_\lambda JE]$ обозначать совокупность объектов: H и E — гильбертовы пространства, T и J — операторы в H и E соответственно, Γ_λ — однопараметрическое семейство отображений из E в H.

Определение 2.2. *Совокупность* $[HT\Gamma_\lambda JE] = M$ *называется узлом класса* $\Lambda(H, E)$, *если* $T \in \Lambda(H)$ *и при каждом комплексном* λ *имеет место каналовое представление*

$$\frac{1}{i}(T - T^*) \subset \Gamma_\lambda J \Gamma_\lambda^*. \tag{2.1}$$

Определение 2.3. *Зависящий от комплексного параметра* λ ($\lambda \overline{\in} P\sigma T$) *оператор* $S_M(\lambda)$, *определяемый в пространстве* E *формулой*

$$S_M(\lambda) = I - iJ\Gamma_\lambda^* (T - \lambda I)^{-1} \Gamma_\lambda, \tag{2.2}$$

называется характеристическим оператором узла

$$M = [HT\Gamma_\lambda JE].$$

В частности, если T — замкнутый оператор с ограниченной на $\hat{H} = D_T \cap D_{T^*}$ мнимой частью $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$, причем $T \in \Lambda(H)$, то T всегда можно включить в такой узел $M \in \Lambda(H, E)$, что $S_M(\lambda)$ суть голоморфная оператор-функция на резольвентном множестве $\rho(T)$. Действительно, по теореме 2.1 существует каналовое представление $2B \subset \Gamma J \Gamma^*$ с ограниченным Γ, $D_\Gamma = E$, откуда и получается искомый узел

$$M = [HT\Gamma JE]$$

с одноэлементным семейством операторов Γ. Если же T ограничен, то всякое каналовое представление

$$2B = \Gamma J \Gamma^*$$

с ограниченным оператором Γ ($D_\Gamma = E$) порождает узел $M = [HT\Gamma JE] \in \Lambda(H, E)$' который оказывается ограниченным узлом в смысле определения [2], а $S_M(\lambda)$ — характеристической функцией из [1, 2]. В этом случае при $\lambda \in \rho(T)$ характеристический оператор $S_M(\lambda) = S(\lambda)$ обладает следующими J-метрическими свойствами, которые в приложениях трактуются как некие энергетические соотношения [1, 2]:

$$(JS(\lambda)\varphi, \; S(\lambda)\varphi) = (J\varphi, \; \varphi), \;\; \operatorname{Im}\lambda = 0, \tag{2.3}$$

$$(JS(\lambda)\varphi, \; S(\lambda)\varphi) \geqslant (J\varphi, \; \varphi), \;\; \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0, \tag{2.4}$$

$$(JS(\lambda)\varphi, \; S(\lambda)\varphi) \leqslant (J\varphi, \; \varphi), \;\; \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0. \tag{2.5}$$

Оказывается, при всяком $\lambda \overline{\in} P\sigma T$ общий характеристический оператор (2.2) обладает такими же свойствами на некотором линейном многообразии $G_\lambda \subset D_{S_M(\lambda)}$, определяемом условием

$$\Gamma_\lambda G_\lambda \subset (T - \lambda I)\hat{H}. \tag{2.6}$$

Пусть $\varphi \in G_\lambda$, $(T - \lambda I)^{-1}\Gamma_\lambda\varphi = f$. В силу (2.1) $J\Gamma_\lambda^* f \in D_{\Gamma_\lambda}$, и можно записать

$$(JS\varphi,\ S\varphi) - (J\varphi,\ \varphi) = -i(\Gamma^* f,\ \varphi) + i(J\varphi,\ J\Gamma^* f) + (\Gamma^* f,\ J\Gamma^* f) =$$
$$= -i(f, \Gamma\varphi) + i(\Gamma\varphi, f) + (f, \Gamma J\Gamma^* f) = -i(f, [T - \lambda I][T - \lambda I]^{-1}\Gamma\varphi) +$$
$$+ i([T - \lambda I][T - \lambda I]^{-1}\Gamma\varphi,\ f) + (f,\ i[T^* - T]f) = -i(f,\ [T - \lambda I]f) +$$
$$+ i(f,\ [T^* - \bar{\lambda} I]f) + i(f, [T - T^*]f) = i(\bar{\lambda} - \lambda)(f,\ f).$$

Отсюда следует, что J-метрические свойства (2.3), (2.4), (2.5) характеристического оператора $S_M(\lambda)$ верны для всякого $\lambda \bar{\in} P\sigma T$ и $\varphi \in G_\lambda$. Ясно также, что всегда найдется непустое многообразие G_λ, на котором выполняются (2.3), (2.4), (2.5), например, аннулятор оператора Γ. Максимальное в смысле условий (2.6) многообразие G_λ равно пересечению области $D_{S_M(\lambda)}$ с полным прообразом множества $\Gamma_\lambda D_{S_M(\lambda)} \cap (T - \lambda I)\hat{H}$ относительно отображения Γ_λ.

В примере 1, *а* можно непосредственно выписать вектор

$$f = (T - \lambda I)^{-1}\Gamma\varphi = \frac{\varphi_2\alpha}{2\pi} e^{-i\lambda x}\left(e^{\frac{2\pi i x}{\alpha}} - 1\right),$$

где $\varphi = (\varphi_1,\ \varphi_2)$ — любой вектор из

$$E = R_2 = D_{S(\lambda)} = D_{\Gamma_\lambda}.$$

Если оператор T (точнее, его область определения) подчинить требованию $\alpha = \frac{1}{n}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, то $f(1) = 0$ и $f \in \hat{H}$ при всяком $\varphi \in E$, так что характеристический оператор $S(\lambda)$ (1.3) обладает J-метрическими свойствами (2.3), (2.4), (2,5) на всем пространстве $E = R_2$ при любом комплексном λ (множество $P\sigma T$ пусто). Если же α — произвольное число из интервала $(0,1)$, то максимальным многообразием G_λ со свойствами (2.6) является аннулятор оператора Γ_λ — подпространство в $E = R_2$, натянутое на орт $(1,0)$.

В примере 1, *б* максимальным многообразием G_λ является совокупность элементов $\varphi = (\varphi_1(x),\ \varphi_2(x))$ из $D_{S(\lambda)}$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\int_0^1 \left[p(x)\varphi_2(x) - i\frac{d\varphi_1(x)}{dx}\right]\frac{e^{-\lambda h(x)}}{p(x)}\,dx = 0$$

(при всяком комплексном λ).

Узлы

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_{k\lambda} J E] \in \Lambda(H_k,\ E),\ k = 1,2,$$

называются унитарно эквивалентными, если существует изометрический оператор U, отображающий H_1 на H_2 и такой, что $T_2U = UT_1$, $\Gamma_{2\lambda} = U\Gamma_{1\lambda}$.

В силу унитарной эквивалентности операторов T_1 и T_2 множества $P\sigma T_1$ и $P\sigma T_2$ совпадают, и при $\lambda \bar{\in} P\sigma T_1$ справедливо равенство

$$(T_2 - \lambda I)^{-1} = U(T_1 - \lambda T)^{-1}U^*.$$

Из определения 2.3 следует, что характеристические операторы $S_{M_k(\lambda)}$ унитарно эквивалентных узлов M_k совпадают при всех λ, $\lambda \bar{\in} P\sigma T_k$ $(k = 1,2)$.

3. СЦЕПЛЕНИЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть гильбертово пространство H разложено в ортогональную сумму двух пространств H_1 и H_2:

$$H = H_1 \oplus H_2$$

и P_k — ортопроекторы из H на H_k $(k = 1,2)$. Далее, пусть T_k — линейные операторы в H_k с плотными областями определения

$$D_{T_k} \; (\overline{D}_{T_k} = H_k,\ k = 1,2);$$

C — линейный оператор в H со свойствами:

$$CH_1 = 0,\ P_2 D_C = D_{T_2},\ \Delta_C \subset H_1. \tag{3.1}$$

Оператор

$$T = T_1 P_1 + T_2 P_2 + C \tag{3.2}$$

с областью определения $D_T = D_{T_1} \oplus D_{T_2}$ называется сцеплением операторов T_1 и T_2:

$$T = T_1 \gamma T_2,$$

а оператор C — коэффициентом сцепления. Ясно, что

$$\overline{D_T} = H,\ T(D_T \cap H_1) \subset H_1$$

и

$$P_1 D_T \subset D_T.$$

Наоборот, если для некоторого оператора T в H $(\overline{D}_T = H)$ подпространство H_1 является инвариантным и проектирование P_1 на H_1 не выводит элементы из D_T, то

$$T = P_1 T P_1 + P_2 T P_2 + P_1 T P_2 \quad (P_2 = I - P_1),$$

т. е. T представляется в виде сцепления оператора $T_1 = TP_1 = P_1 T P_1$ в H_1 и оператора $T_2 = P_2 T P_2$ в H_2 $(H_2 = H_2 \ominus H_1)$ с коэффициентом сцепления $C = P_1 T P_2$. При этом

$$D_{T_k} = P_k D_T,\ \overline{D}_{T_k} = H_k \ (k = 1,2).$$

Лемма 3.1. *Пусть $T = T_1 \gamma T_2$ с коэффициентом сцепления C. Если*

$$\lambda \,\overline{\in}\, P\sigma T_k \ (k = 1,2)$$

и

$$CD_{T_2} \subset \Delta_{T_1 - \lambda I}, \tag{3.3}$$

то $\lambda \,\overline{\in}\, P\sigma T$, и

$$(T - \lambda I)^{-1} = (T_1 - \lambda I)^{-1} P_1 + (T_2 - \lambda I)^{-1} P_2 - (T_1 - \lambda I)^{-1} C (T_2 - \lambda I)^{-1} P_2. \tag{3.4}$$

Поскольку

$$T - \lambda I = (T_1 - \lambda I) P_1 + (T_2 - \lambda I) P_2 + C,$$

то оператор $\Pi(\lambda)$, равный всей правой части *(3.4)*, определен на

$$\Delta_{T - \lambda I} = \Delta_{T_1 - \lambda I} \oplus \Delta_{T_2 - \lambda I}.$$

Утверждение леммы получается непосредственным умножением $\Pi(\lambda)$ на $T - \lambda I$ в прямом и обратном порядке.

Лемма 3.2. *Если $T = T_1 \gamma T_2$, $P_1 T D_{T_2} \subset (T - \lambda I) D_{T_1}$ и $\lambda \,\overline{\in}\, P\sigma T$, то $\lambda \,\overline{\in}\, P\sigma T_k$ $(k = 1,2)$.*

Поскольку $(T - \lambda I) f_1 = (T_1 - \lambda I) f_1$ при $f_1 \in D_{T_1}$, то $\lambda \,\overline{\in}\, P\sigma T_1$. Предположим,

$$\lambda \in P\sigma T_2 : T_2 f_2 - \lambda f_2 = 0.$$
$$f_2 \in D_{T_2}, \ f_2 \neq 0.$$

Если

$$f_1 = (T_1 - \lambda I)^{-1} P_1 T f_2,$$

то $f_k \in D_T$,

$$(T - \lambda I)(f_2 - f_1) = -(T_1 - \lambda I) f_1 + (T_2 - \lambda I) f_2 + P_1 T P_2 f_2 = 0.$$

Отсюда $f_2 - f_1 = 0$ *и* $f_1 = f_2 = 0$, что противоречит предположению.

Пусть $T = T_1 \gamma T_2$ с коэффициентом сцепления C; имеют место следующие три леммы.

Лемма 3.3. *Если C ограничен и*

$$\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2),$$

то выполнения каждого из следующих двух условий достаточно для того чтобы $\lambda \in \rho(T)$:

а) T_1 замкнут;

б) $CD_{T_2} \subset \Delta_{T_1 - \lambda I}$.

В частности, если оператор C ограничен, T_1 и T_2 — замкнуты и $\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$, то T замкнут и $\lambda \in \rho(T)$.

Лемма 3.4. *Если $\lambda \in \rho(T)$ и выполнено (3.3), то*

$$\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2).$$

Лемма 3.5. *Пусть T замкнут и $\lambda \in \rho(T)$. Для того, чтобы T_k был замкнут и*

$$\lambda \in \rho(T_k), \ k = 1,2,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\lambda \overline{\in} P \sigma T_2$.

Лемма 3.3 очевидна в силу леммы 3.1 и свойств резольвенты замкнутого оператора.

Для доказательства леммы 3.4 обозначим: g — произвольный вектор из D_T, $g_k = P_k g$,
$f = (T - \lambda I) g$, $f_k = P_k f$ $(k = 1,2)$.
Поскольку

$$f_1 = (T_1 - \lambda I) g_1 + C g_2,$$
$$f_2 = (T_2 - \lambda I) g_2,$$

и $g_k \in D_{T_k}$, то в силу (3.3)

$$f_k \in \Delta_{T_k - \lambda I} \text{ и } f_k \in \Delta_{T - \lambda I}.$$

В обозначениях

$$A_{kj} = P_k (T - \lambda I)^{-1} P_j$$

можно записать

$$g = (T - \lambda I)^{-1} f = \sum_{k,\, j=1}^{2} A_{kj} f_j.$$

Очевидно, $A_{kj} f_j \in D_{T_k}$,

$$\Delta_{T_k - \lambda I} = P_k \Delta_{T - \lambda I},$$

причем

$$\overline{\Delta}_{T_k - \lambda I} = H_k \ (k, j = 1,2),$$

коль скоро

$$\overline{\Delta}_{T - \lambda I} = H.$$

Далее,

$$f = f_1 + f_2 = (T - \lambda I)(T - \lambda I)^{-1} f = [(T_1 - \lambda I) A_{11} + CA_{21}] f_1 + \\ + [(T_1 - \lambda I) A_{12} + CA_{22}] f_2 + (T_2 - \lambda I) A_{21} f_1 + (T_2 - \lambda I) A_{22} f_2.$$

Отсюда при $f_2 = 0$ и любом $f_1 \in \Delta_{T_1 - \lambda I}$

$$[(T_1 - \lambda I) A_{11} + CA_{21}] f_1 = f_1, \tag{3.5}$$

$$(T_2 - \lambda I) A_{21} f_1 = 0; \tag{3.6}$$

а при $f_1 = 0$ и любом $f_2 \in \Delta_{T_2 - \lambda I}$

$$(T_2 - \lambda I) A_{22} f_2 = f_2. \tag{3.7}$$

Но $\lambda \overline{\in} P\sigma T_2$ (см. доказательство леммы 3.2), поэтому из (3.6) следует, что

$$A_{21} f_1 = 0$$

и (3.5) перепишется так:

$$(T_1 - \lambda I) A_{11} f_1 = f_1, \quad f_1 \in \Delta_{T_1 - \lambda I}. \tag{3.8}$$

Аналогично из тождества

$$(T - \lambda I)^{-1} (T - \lambda I) g = g$$

получается

$$A_{11} (T_1 - \lambda I) g_1 = g_1, \quad g_1 \in D_{T_1}; \tag{3.9}$$

$$A_{22} (T_2 - \lambda I) g_2 = g_2, \quad g_2 \in D_{T_2}. \tag{3.10}$$

Резольвентный оператор $(T_1 - \lambda I)^{-1} = A_{11}$ существует (3.8), (3.9), ограничен и определен на плотном в H_1 множестве (в силу определения оператора A_{11}). Аналогичное заключение выводится из соотношений (3.7), (3.10) для резольвентного оператора

$$(T_2 - \lambda I)^{-1} = A_{22},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. По лемме 3.1 в точке λ резольвенты A_{11} и A_{22} удовлетворяют (3.4). Таким образом, для того чтобы в регулярной точке оператора

$$T = T_1 \gamma T_2$$

имела место формула (3.4), необходимо и достаточно иметь включение (3.3),

Докажем лемму 3.5. Поскольку $\Delta_{T - \lambda I} = H$, то всякий вектор $f_1 \in H_1$ должен представляться в виде

$$f_1 = (T - \lambda I) g, \quad g \in D_T.$$

При этом $(T_2 - \lambda I) P_2 g = 0$, и если $\lambda \overline{\in} P\sigma T_2$, то $P_2 g = 0$, откуда $f_1 = (T_1 - \lambda I) g$

$$g = (T - \lambda I)^{-1} f_1 = (T_1 - \lambda I)^{-1} f_1.$$

Следовательно, $\lambda \in \rho(T_1)$ и T_1 замкнут, ибо

$$\Delta_{T_1 - \lambda I} = H_1.$$

Из условия (3.3) и леммы 3.4 вытекает, что $\lambda \in \rho(T_2)$, а в силу равенства

$$\Delta_{T_2 - \lambda I} = P_2 \Delta_{T - \lambda I} = H_2$$

оператор T_2 замкнут.

4. ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Определение. *Узел* $[HT\Gamma_\lambda JE] = M$ *класса* $\Lambda(H, E)$ *называется сцеплением узлов*

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_{k\lambda} JE],$$

где

$$M_k \in \Lambda(H_k, E)$$

и $k = 1, 2$, *если* $H = H_1 \oplus H_2$, $D_{\Gamma_{1\lambda}} = D_{\Gamma_{2\lambda}}$ и $\Gamma_\lambda = \Gamma_{1\lambda} + \Gamma_{2\lambda}$ *при всяком* λ,

$$T = T_1 \gamma T_2,$$

$$(D_{T_1} \cap D_{T_1^*}) \oplus (D_{T_2} \cap D_{T_2^*}) = D_T \cap D_{T^*}.$$

Сцепление узлов обозначим $M = M_1 \gamma M_2$; примем также

$$D_T \cap D_{T^*} = \hat{H}, \quad D_{T_k} \cap D_{T_k^*} = \hat{H}_k,$$

P_k — ортопроектор из H на H_k $(k = 1, 2)$. Согласно определению $P_k\hat{H} = \hat{H}_k \subset \hat{H}$, $P_2TP_1 = 0$. Поскольку $M_k \in \Lambda(H_k, E)$, то многообразие $\hat{H}_k$ плотно в H_k, и $P_1T^*P_2f = 0$ при $f \in \hat{H}$. Теперь из условия узла (2.1) для M следует, что коэффициент сцепления C на многообразии $\hat{H}$ имеет вид

$$Cf = iP_1\Gamma_\lambda J\Gamma_\lambda^* P_2 f = i\Gamma_{1\lambda} J \Gamma_{2\lambda}^* P_2 f$$

при всех λ, причем оператор $C = P_1TP_2$ не должен зависеть от λ. Легко проверить также, что $\hat{H}_1 \subset D_{C^*}$ и при $f \in \hat{H}$ справедливо

$$C^*P_1 f = -i\Gamma_2 J \Gamma_1^* P_1 f,$$

$$T^* f = T_2^* P_2 f + T_1^* P_1 f + C^* P_1 f.$$

Рассмотренные свойства сцепления узлов доказывают необходимость условий 1 и 2 в следующем утверждении:

Лемма 4.1. *Для того, чтобы узлы*

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_{k\lambda} JE], \quad M_k \in \Lambda(H_k, E)$$

допускали сцепление $M_1 \gamma M_2$, *необходимо и достаточно:*

1) $D_{\Gamma_{1\lambda}} = D_{\Gamma_{2\lambda}}$;

2) *оператор* $Q_0 = i\Gamma_{1\lambda} J \Gamma_{2\lambda}^*$ *с областью определения* $\hat{H}_2$ *не зависит от* λ *и допускает такое расширение* Q *на многообразие* D_{T_2}, *что*

$$D_{Q^*} \supset \hat{H}_1.$$

Действительно, образуем совокупность

$$M = [HT\Gamma_\lambda JE],$$

где

$$H = H_1 \oplus H_2, \quad \Gamma_\lambda = \Gamma_{1\lambda} + \Gamma_{2\lambda}, \quad T = T_1 \gamma T_2$$

с коэффициентом сцепления $C = QP_2$.

Если $f \in \hat{H}_1 \oplus \hat{H}_2$, то $f \in D_{T^*}$,

$$T^* f = T_1^* P_1 f + T_2^* P_2 f + C^* P_1 f,$$

и следовательно, $f \in \hat{H}$. Если $h \in D_T$ и $g \in \hat{H}$, то

$$(T_1P_1h, P_1g) = (T_1P_1h, g) = (TP_1h, P_1g) = (TP_1h, g) = (P_1h, P_1T^*g),$$

так что

$$P_1 g \in D_{T_1^*}, \quad P_1 g \in \hat{H}_1.$$

Поскольку

$$P_1\hat{H} \subset \hat{H}_1 \subset D_{C^*},$$

то, как легко видеть, $P_2\hat{H} \subset \hat{H}_2$. Следовательно, $\hat{H}_1 \oplus \hat{H}_2 = \hat{H}$.

Наконец, условие узла (2.1) для M выводится из условий узлов для M_k с использованием очевидного соотношения

$$\Gamma_1^* P_1 + \Gamma_2^* P_2 \subset \Gamma^*,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4.2. *Пусть $M = [HT\Gamma_\lambda JE]$ — узел класса $\Lambda(H, E)$, H_1 — инвариантное подпространство* оператора T, $H_2 = H \ominus H_1$,*

P_k — ортопроектор из H на H_k, $T_k = P_k T P_k$ — операторы в H_k, $\Gamma_k = P_k\Gamma$. Если оператор $C = P_1 T P_2$ удовлетворяет условию

$$D_{C^*} \supset (D_{T_1} \cap D_{T_1^*}),$$

то совокупность

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_{k\lambda} JE]$$

суть узел класса $\Lambda(H, E)$, $k = 1, 2$ и $M = M_1 \gamma M_2$.

В обозначениях

$$\hat{H} = D_T \cap D_{T^*}, \quad \hat{H}_k = D_{T_k} \cap D_{T_k^*}$$

из доказательства леммы 4.1 и вхождения $\hat{H}_1 \subset D_{C^*}$ следует, что $P_k\hat{H} = \hat{H}_k \subset \hat{H}$. Условие узла для совокупности M_k получается путем умножения соотношения $T - T^* \subset i\Gamma J\Gamma^*$ на P_k с использованием равенств

$$T_2^* P_2 f = T^* P_2 f = P_2 T^* P_2 f, \quad T_1^* P_1 f = P_1 T^* P_1 f, \quad \Gamma_k^* P_k f = \Gamma^* P_k f \; (f \in \hat{H} \subset D_{\Gamma^*}; \; k = 1, 2).$$

Теорема 4.1. *Пусть для узлов*

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_{k\lambda} JE] \quad (k = 1, 2), \quad D_{\Gamma_1} = D_{\Gamma_2}$$

и оператор $\Gamma_{1\lambda} J \Gamma_{2\lambda}$ определен и не зависит от λ на D_{T_2}. Тогда существует такое сцепление узлов $M = M_1 \gamma M_2$, что и характеристические операторы связаны соотношением

$$S_M(\lambda) = S_{M_1}(\lambda)\, S_{M_2}(\lambda)$$

во всякой точке $\lambda \overline{\in} P\sigma T_k$ $(k = 1, 2)$, в которой

$$\Gamma_1 J \Gamma_2^* D_{T_2} \subset \Delta_{T_1 - \lambda I}. \tag{4.1}$$

Для доказательства введем операторы

$$W(\lambda) = S_{M_1}(\lambda) \cdot S_{M_2}(\lambda)$$

и

$$G(\lambda) = R_2(\lambda) + R_1(\lambda)\, S_{M_2}(\lambda),$$

где

$$R_k(\lambda) = (T_k - \lambda I)^{-1}\Gamma_k.$$

Очевидно,

$$D_{S_{M_k}(\lambda)} \subset D_{R_k(\lambda)},$$

$$D_{W(\lambda)} \subset D_{G(\lambda)} \subset D_{S_{M_2}(\lambda)}.$$

Образуем сцепление узлов

$$M_1 \gamma M_2 = M = [HT\Gamma_\lambda JE]$$

---

* В работе рассматриваются только такие инвариантные подпространства оператора T, что ортогональное проектирование на них не выводит элементы из D_T.

с коэффициентом сцепления

$$C \subset \Gamma_{1\lambda} J \Gamma^*_{2\lambda} P_2, \quad D_C = H_1 \oplus D_{T_2}$$

(по лемме 4.1 это возможно, ибо, легко видеть, $D_{C^*} \supset \hat{H}_1$). В силу (4.1) и леммы 3.1 $\lambda \overline{\in} P\sigma T$, выполняется равенство (3.4), имеет смысл оператор

$$R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}\Gamma_\lambda.$$

Оператор

$R_1(\lambda) J \Gamma_2^* R_2(\lambda)$ определен на $D_{G(\lambda)} \subset D_{R_1(\lambda)}$ и из (3.4) вытекает $G(\lambda) = R(\lambda)$.

Используя последнее равенство и вытекающее из (4.1) включение

$$D_{\Gamma_2^*} \supset D_{T_2} \supset \Delta_{R_2(\lambda)},$$

нетрудно получить, что

$$W(\lambda) \subset S_M(\lambda),$$
$$S_M(\lambda) \subset W(\lambda),$$

что и требовалось доказать.

Очевидным следствием леммы 4.2 и теоремы 4.1 является следующее правило факторизации характеристического оператора.

Теорема 4.2. *Пусть H_1 — инвариантное подпространство оператора T из узла*

$$M = [HT\Gamma_\lambda JE] \in \Lambda(H, E).$$

Обозначим P_1 — ортопроектор из H на H_1, $P_2 = I - P_1$, $H_2 = P_2 H$, $T_k = P_k T P_k$ — операторы в H_k, $\Gamma_{k\lambda} = P_k \Gamma_\lambda$, $C = P_1 T P_2$.

Если при всех λ

$$C \subset i P_1 \Gamma_\lambda J \Gamma_\lambda^* P_2, \tag{4.2}$$

то

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_{k\lambda} JE]$$

суть узел класса $\Lambda(H_k, E)$, $k = 1, 2$, а в любой точке $\lambda \overline{\in} P\sigma T$, в которой

$$C D_T \subset (T - \lambda I) P_1 D_T, \tag{4.3}$$

характеристический оператор узла M раскладывается на множители

$$S_M(\lambda) = S_{M_1}(\lambda) S_{M_2}(\lambda).$$

В условиях теоремы 4.2 соотношения (4.3), (4.1), (3.3) равносильны. Если оператор T из узла

$$M = [HT\Gamma JE]$$

удовлетворяет лишь условиям леммы 4.2, то равенство

$$Cf = i P_1 \Gamma J \Gamma^* P_2 f$$

справедливо при $f \in P_2 \hat{H}$, так что условие (4.2) является распространением этого равенства на многообразие $P_2 D_T = P_2 D_C$. Поскольку такое распространение возможно не для всякого узла M (пример 1, *б* см. ниже), то возникает вопрос (связанный с многообразием канальных представлений оператора $(T - T^*)\frac{1}{i}$): можно ли включить рассматриваемый оператор T в некоторый узел

$$M = [HT\tilde{\Gamma}\tilde{J}\tilde{E}] \in \Lambda(H, \tilde{E}),$$

для которого уже будет выполняться соотношение

$$C \subset i P_1 \tilde{\Gamma} \tilde{J} \tilde{\Gamma}^* P_2?$$

Пока положительный ответ на этот вопрос имеется при тех или иных дополнительных ограничениях на оператор T (например, когда в пространстве H_2 оператор $\frac{1}{i}(T_2 - T_2^*)$ допускает симметрическое расширение на

$$D_{T_2} = P_2 D_T).$$

Некоторые задачи колебаний периодических структур и других бесконечномерных систем приводят к изучению узлов $M = [HT\Gamma JE]$, в которых оператор T обладает свойством $D_T \subset D_{T^*}$; подкласс таких узлов обозначим через $\Lambda_0(H, E)$. В этом подклассе удается получить предыдущие результаты при меньших ограничениях.

Теорема 4.3. *Если*

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_{k\lambda} JE] \in \Lambda_0(H_k, E) \quad (k = 1, 2),$$

$D_{\Gamma_1} = D_{\Gamma_2}$ *и оператор* $\Gamma_{1\lambda} J \Gamma_{2\lambda}^*$ *не зависит от* λ, *то узлы* M_k *допускают единственное сцепление* $M = M_1 \gamma M_2$, *причем* $M \in \Lambda_0(H, E)$, *оператор* $\Gamma_1 J \Gamma_2^*$ *определен на* D_{T_2} *и во всякой точке* $\lambda \overline{\in} P\sigma T_k$, удовлетворяющей условию (4.1), выполняется

$$S_M(\lambda) = S_{M_1}(\lambda) S_{M_2}(\lambda).$$

Теорема 4.4. *Пусть*

$$M = [HT\Gamma_\lambda JE] \in \Lambda_0(H, E),$$

H_1 — *инвариантное подпространство оператора* T. *Если обозначить* $H_2 = H \ominus H_1$, P_k — *ортопроектор из* H *на* H_k,

$$T_k = P_k T P_k, \quad \Gamma_{k\lambda} = P_k \Gamma_\lambda,$$

то совокупность

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_{k\lambda} JE]$$

есть узел подкласса $\Lambda_0(H_k, E)$, $k = 1, 2$.

Далее, $M = M_1 \gamma M_2$, $S_M(\lambda) = S_{M_1}(\lambda) S_{M_2}(\lambda)$ для тех $\lambda \overline{\in} P\sigma T$, в которых выполняется включение (4.3).

В примере 1, *a* соотношение (1.1) определяет узел $M = [HT\Gamma_\lambda JE] \times \times \in \Lambda(H, E)$, где

$$H = L_2[0, 1], \quad E = R_2, \; \Gamma_\lambda J \Gamma_\lambda^* = 0.$$

Подпространство H_1 функций из L_2, равных нулю вне интервала $(0, \alpha)$, и его ортогональное дополнение H_2 инвариантны относительно оператора T, причем $P_k D_T \subset D_T$, где P_k — ортопроектор из L_2 на H_k $(k = 1, 2)$. Очевидно, условия теоремы 4.2 удовлетворяются

$$C = P_1 T P_2 = 0 = i P_1 \Gamma_\lambda J \Gamma_\lambda^* P_2.$$

Узлы

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_{k\lambda} JE]$$

имеют следующие характеристические операторы в двумерном пространстве R_2:

$$S_{M_k}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & r_k(\lambda) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где при $\lambda - \overline{\lambda} \neq 0$

$$r_1(\lambda) = \frac{1 - e^{-i(\lambda - \overline{\lambda})\alpha}}{(\lambda - \overline{\lambda})\left(\frac{2\pi}{\alpha} + \lambda - \overline{\lambda}\right)},$$

$$r_2(\lambda) = \frac{e^{-i(\lambda-\overline{\lambda})\alpha} - \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}(\lambda - \overline{\lambda})(1 - e^{\frac{2\pi i}{\alpha}})\right] e^{-i(\lambda-\overline{\lambda})}}{(\lambda - \overline{\lambda})\left(\frac{2\pi}{\alpha} + \lambda - \overline{\lambda}\right)}.$$

Справедливое в силу теоремы 4.2 соотношение

$$S_M(\lambda) = S_{M_1}(\lambda) S_{M_2}(\lambda)$$

легко проверяется непосредственно — ср. (1.3).

В примере 1, *б* те же подпространства функций H_1 и H_2 из $L_2[0, 1]$ приводят оператор T (откуда $C = P_1 T P_2 = 0$), а узел $M = [\hat{H} T \Gamma J E]$ определяется соотношением (1.4), где $H = L_2$, $E = L_2 \times L_2$. Область определения оператора $\Gamma J \Gamma^*$ состоит из функций $\psi(x)$, удовлетворяющих условиям: $\psi(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$,

$$\psi'(x) \in L_2, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0;$$

при этом

$$\Gamma J \Gamma^* \psi = -i\overline{p'(x)}\psi(x) - i[p(x) + \overline{p(x)}]\psi'(x).$$

Область определения оператора $P_1 \Gamma J \Gamma^* P_2 = \Gamma_1 J \Gamma_2^*$ совпадает здесь с многообразием

$$\hat{H}_2 = P_2 \hat{H} = D_{T_2} \cap D_{T_2^*}$$

(это функции $f(x)$ из H_2, для которых $f'(x) \in L_2$, $f(\alpha) = f(1) = 0$), так что условие (4.2) не выполнено. Все же здесь удовлетворяются условия леммы 4.2, поэтому узел M является сцеплением узлов

$$M_k = [H_k T_k \Gamma_k J E],$$

где

$$T_k = T P_k, \ \Gamma_k = P_k \Gamma \quad (k = 1, 2).$$

Непосредственно проверяется, что

$$S_{M_1}(\lambda) S_{M_2}(\lambda) \subset S_M(\lambda), \tag{4.4}$$

и, несмотря на соотношение

$$D_{S_{M_1}(\lambda)} = D_{S_M(\lambda)} \subset D_{S_{M_2}(\lambda)},$$

область определения оператора $S_{M_1}(\lambda) S_{M_2}(\lambda)$ у́же области $D_{S_M}(\lambda)$. Отвлекаясь от примера, имеем:

Теорема 4.5. *Пусть для узла M выполнены условия леммы 4.2, и в ее обозначениях*

$$\Delta_C \subset \Delta_{T_1 - \lambda I}, \quad \lambda \overline{\in} P\sigma T.$$

Для того чтобы характеристические операторы узлов

$$M_1 \gamma M_2 = M$$

были связаны соотношением (4.4), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Gamma_1^* R_1(\lambda) S_{M_2}(\lambda) \subset \Gamma_1^* [R_1(\lambda) - (T_1 - \lambda I)^{-1} C (T_2 - \lambda I)^{-1} \Gamma_2], \tag{4.5}$$

где

$$R_1(\lambda) = (T_1 - \lambda I)^{-1} \Gamma_1.$$

Необходимость. Пусть $\varphi \in D_{W(\lambda)}$, где

$$W(\lambda) = S_{M_1}(\lambda) S_{M_2}(\lambda).$$

Тогда

$$S_M(\lambda)\varphi = \varphi - iJ\Gamma^* [(T_1 - \lambda I)^{-1} P_1 + (T_2 - \lambda I)^{-1} P_2 - (T_1 - \lambda I)^{-1} C (T_2 - \lambda I)^{-1} P_2] \Gamma\varphi,$$

где использовано (3.4). Коль скоро $\varphi \in DS_{M_2}(\lambda)$, то

$$(T_2 - \lambda I)^{-1} P_2 \Gamma \varphi \in D_{\Gamma_2^*} \subset D_{\Gamma^*},$$

и можно раскрыть квадратную скобку:

$$S_M(\lambda)\varphi = S_{M_2}(\lambda)\varphi - iJ\Gamma_1^* \{ (T_1 - \lambda I)^{-1}\Gamma_1 - (T_1 - \lambda I)^{-1} C (T_2 - \lambda I)^{-1}\Gamma_2 \} \varphi.$$

Но

$$S_M(\lambda)\varphi = W(\lambda)\varphi = S_{M_2}(\lambda)\varphi - iJ\Gamma_1^* (T_1 - \lambda I)^{-1} \Gamma_1 S_{M_2}(\lambda)\varphi,$$

а области определения операторов $W(\lambda)$ и $\Gamma_1^* R_1(\lambda) S_{M_2}(\lambda)$ совпадают. Следовательно, справедливо (4.5).

Достаточность устанавливается обращением приведенного доказательства, допустимым при условии (4.5).

Замечание. Чтобы установить (4.4), иногда достаточно вместо (4.5) проверить более простое условие

$$\Gamma_1 S_{M_2}(\lambda) \subset \Gamma_1 - CR_2(\lambda),$$

из которого вытекает (4.5), где

$$R_2(\lambda) = (T_2 - \lambda I)^{-1}\Gamma_2.$$

Так, в примере 1, *б*

$$D_{CR_2(\lambda)} = D_{S_{M_2}(\lambda)}, \quad \Gamma_1 J \Gamma_2^* \subset C = 0,$$

поэтому

$$\Gamma_1 S_{M_2}(\lambda) \subset \Gamma_1,$$

откуда вытекает (4.6) и в конечном итоге соотношение (4.4) для характеристических операторов при всех λ.

Если для узла M выполнены все условия теоремы 4.5, кроме соотношения (4.5), то можно утверждать лишь следующее: пусть Ω — линейное многообразие в E, для которого

$$\Gamma_2 \Omega \subset (T_2 - \lambda I)\hat{H}_2 \quad (\hat{H}_2 = D_{T_2} \cap D_{T_2^*});$$

тогда

$$S_M(\lambda)\varphi = S_{M_1}(\lambda) S_{M_2}(\lambda)\varphi$$

для всякого $\varphi \in \Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский, М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. УМН, XIII, 1 (79), 1958.
2. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. Изд-во «Наука», 1966.
3. А. В. Кужель. Спектральный анализ квазиунитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1964.
4. А. В. Штраус. Характеристические функции линейных операторов. Изв. АН СССР, серия матем., т. 24, 1, 1960.

Поступила 22 апреля 1969 г.