О s-ЧИСЛАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

С. Л. Блюмин, Б. Д. Котляр

I. ВВЕДЕНИЕ

Применение методов, разработанных в теории ортогональных рядов, к изучению интегральных операторов представляет несомненный интерес. В некоторых случаях, используя эти методы, можно получить законченные обобщения в операторных терминах известных теорем из теории рядов Фурье (см., например, [1]). Нами показано [2], как, используя метод С. Н. Бернштейна (примененный им для доказательства классической теоремы об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье) и мультипликативные системы функций, можно усилить некоторые результаты И. Фредгольма [3, 4, стр. 153] и Э. Хилле — Д. Тамаркина [5]. Впрочем, хорошо известная теорема О. Саса [6] (обобщающая упомянутую теорему об абсолютной сходимости) в свою очередь легко следует из отмеченной теоремы И. Фредгольма.

В других случаях в теории операторов удается получить лишь аналоги теорем из теории ортогональных рядов. Подобного рода результаты и предлагаются в настоящей заметке.

Достаточным условиям принадлежности интегральных операторов, действующих в пространстве $L^2[0, 1]$, двусторонним идеалам кольца $R(L^2[0, 1])$ ограниченных операторов посвящено много работ [1—5], [7—13]; подробное рассмотрение этого круга вопросов имеется в монографии И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [4].

Во всех приведенных работах принадлежность оператора идеалу связывается либо с гладкостью или конструктивными свойствами ядра этого оператора, либо с его положительной определенностью. В настоящей заметке подобные результаты получаются из требований интегрируемости ядра, конечно, при этом приходится накладывать дополнительные ограничения. В нашем случае они наложены на рост собственных функций оператора.

Для формулировки одной из теорем, учитывающей естественные условия интегрируемости ядра оператора, приходится ввести в рассмотрение некоторый класс двусторонних идеалов кольца ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, вообще говоря, более широкий, чем хорошо изученный класс идеалов γ_p.

Во всех упомянутых работах по свойствам ядра делалось заключение о принадлежности оператора идеалу; ниже приводится пример в некотором смысле обратных теорем, позволяющих по условиям, наложенным на спектральное разложение оператора, судить об интегрируемости его ядра.

Приводятся также некоторые новые результаты об ортогональных рядах, обобщающие известные теоремы Ф. Рисса и Р. Пэли о связи поведения коэффициентов Фурье с суммируемостью функции.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Теорема 1. *Пусть A — нормальный вполне непрерывный интегральный оператор, действующий в L^2 [0, 1] по формуле*

$$(A\varphi)(x) = \int_0^1 A(x, y)\varphi(y)\,dy, \quad \varphi(y) \in L^2\ [0, 1]. \tag{1}$$

Если выполнятся следующие условия:

1) ядро $A(x, y)$ оператора A принадлежит пространству $L^r[0, 1; 0, 1]$;

2)

$$\|\{\|\varphi_j(A;\ x)\|_{L^b[0,1]}\}_{j=1}^{\infty}\|_{l^a} \leqslant M < +\infty, \tag{2}$$

где $\varphi_j(A;\ x)$ — собственные функции оператора A причем $1 \leqslant a \leqslant +\infty$, $1 \leqslant b \leqslant 2$, то при $2 \leqslant r \leqslant b'$ $A \in \gamma_p$, где*

$$p = p_1 \equiv \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b'}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b'}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)\right]^{-1}.$$

Прежде чем формулировать теорему 2, условимся о следующих обозначениях. Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\{S_j(A)\}$ — последовательность его сингулярных чисел [4, стр. 46]. Легко убедиться, что условие

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \cdot j^{\alpha(p-2)}\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty \tag{3}$$

при некоторых $p > 0$ и вещественном α выделяет двусторонний идеал в кольце $R(H)$ (это вытекает из свойства II, s-чисел [4, стр. 47]). Обозначим этот идеал через $\gamma_{p,\alpha}$ (отметим, что класс идеалов $\gamma_{p,\alpha}$ содержит в себе при $\alpha = 0$ класс идеалов γ_p, упоминающихся выше, а при $\alpha = p = 1$ — идеал В. И. Мацаева γ_ω [4, стр. 191].

Теорема 2. *Пусть A — нормальный вполне непрерывный интегральный оператор, действующий в $L^2[0, 1]$ по формуле (1). Если выполнены следующие условия:*

1) ядро $A(x, y)$ оператора A принадлежит пространству $L^r[0, 1; 0, 1]$;

2)

$$\|\varphi_j(A;\ x)\|_{L^b} \leqslant M \cdot j^{-b}, \quad 1 \leqslant b \leqslant 2, \quad \beta \neq \frac{1}{2}, \tag{4}$$

то при $2 \leqslant p < b'$, $\alpha > \beta \geqslant 1 - \alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$

$$A \in \gamma_{p,\alpha},$$

где $p = p_2$,

$$p_2 \equiv \begin{cases} r \ \text{при}\ \dfrac{2\alpha - 1}{\alpha - \beta} \leqslant b', \\ \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{b'}\right)\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b'}\right) + \dfrac{\alpha - \beta}{2\alpha - 1}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{r}\right)\right]^{-1} \ \text{при}\ \dfrac{2\alpha - 1}{\alpha - \beta} > b'. \end{cases}$$

Следующие теоремы в некотором смысле обращают теоремы 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть вполне непрерывный оператор A: $L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$ задан своим разложением Шмидта [4, стр. 47]:*

$$A = \sum_j s_j(A)(\cdot,\ \psi_j)\varphi_j. \tag{5}$$

---

* Собственные функции здесь и далее занумерованы в порядке убывания сингулярных чисел.

Если выполнены следующие условия:

1) $A \in \gamma_p$;

2) $\| \{ \| \varphi_i \|_{l^u} \} \|_{L^b} \leqslant M < +\infty$,

$$\| \{ \| \psi_i \| \}_{l^v} \} \|_{L^b} \leqslant N < +\infty, \tag{6}$$

причем $0 \leqslant u^{-1} + v^{-1} \leqslant 1$, $1 \leqslant b \leqslant +\infty$, то при

$$2 \leqslant p \leqslant (1 - u^{-1} - v^{-1})^{-1}, \text{ когда } \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{u} \leqslant \frac{1}{v},$$

$$(1 - u^{-1} - v^{-1})^{-1} \leqslant p \leqslant 2, \text{ когда } \frac{1}{u} + \frac{1}{v} \leqslant \frac{1}{2},$$

A является интегральным оператором, и его ядро

$$A(x, y) \in L^r [0, 1; 0, 1],$$

$$r = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} - 1\right) + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\right]^{-1}.$$

Теорема 4. *Пусть вполне непрерывный оператор A задан разложением Шмидта*

$$A = \sum_i s_i(A)(\cdot, \psi_i)\varphi_i.$$

Если выполнены следующие условия:

1) $A \in \gamma_p$;

2)

$$\| \{\varphi_i(x) \cdot \psi_i(y)\} \|_{l^a} \leqslant M \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{\beta}{2}}, \tag{7}$$

$$1 \neq \beta < \alpha, \quad \alpha > 1, \quad 1 - \frac{1}{a} \leqslant \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha - \beta}, \quad 1 \leqslant a \leqslant +\infty,$$

то для

$$2 \leqslant p < a' \quad \textit{при} \quad 1 \leqslant a \leqslant 2$$

и

$$a' \leqslant p \leqslant 2 \quad \text{при} \quad 2 \leqslant a \leqslant +\infty$$

оператор A оказывается интегральным, причем для его ядра

$$\left\{\int_0^1 \int_0^1 |A(x, y)|^r \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha(r-2)}{2}} dxdy\right\}^{\frac{1}{r}} < +\infty, \tag{8}$$

где

$$r = \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{p}\right) + \frac{\alpha - \beta}{2(\alpha - 1)}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\right]^{-1}.$$

Близкие результаты справедливы и для коэффициентов Фурье суммируемых функций.

Теорема 5. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_i(x)\}_{j=1}^{\infty}$ — *ортонормированная система на* $[0, 1]$.

1) Пусть

$$\left\{\sum_i \| \varphi_i(x) \|_{L^b}^a\right\}^{\frac{1}{a}} < +\infty, \tag{9}$$

где $1 \leqslant a \leqslant +\infty$, $1 \leqslant b \leqslant +\infty$. *Если*

$$2 \leqslant r \leqslant b' \quad \textit{для} \quad 1 \leqslant b \leqslant 2,$$

$$b' \leqslant r \leqslant 2 \quad \textit{для} \quad 2 \leqslant b \leqslant +\infty,$$

то для $f \in L^r[0,\ 1]$

$$\left\{\sum_j |c_j(f)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\left\{\sum_j \|\varphi_j(x)\|^a_{L^b}\right\}^{\frac{1}{a}}\right)^t \cdot \|f\|_{L^r}, \tag{10}$$

где

$$t = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b'}\right)^{-1},\quad p = p_1,\quad c^j(f) = \int_0^1 f(x)\,\overline{\varphi_j(x)}\,dx.$$

2) Пусть

$$\left\{\int_0^1 \left[\sum_j |\varphi_j(x)|^b\right]^{\frac{a}{b}} dx\right\}^{\frac{1}{a}} < +\infty. \tag{11}$$

Тогда при тех же условиях для $\{c_j\} \in l^r$ и $p = p_1$

$$\left\|\sum_j c_j\varphi_j(x)\right\|_{L^p} \leqslant \left(\left\{\int_0^1 \left[\sum_j |\varphi_j(x)|^b\right]^{\frac{a}{b}} dx\right\}^{\frac{1}{a}}\right)^t \cdot \|\{c_j\}\|_{l^r}. \tag{12}$$

Теорема 6. *Пусть* Φ — *ортонормированная на* $[0,\ 1]$ *система, для которой*

$$\|\varphi_j\|_{L^b} \leqslant M \cdot j^{-\beta},\quad \beta \neq \frac{1}{2},\quad 1 \leqslant b \leqslant +\infty. \tag{13}$$

1) Пусть $2 \leqslant r \leqslant b'$ *при* $1 \leqslant b \leqslant 2$, $b' \leqslant r \leqslant 2$ *при* $2 \leqslant b \leqslant +\infty$. *Тогда для* $f \in L^r$

$$\left\{\sum_j |c_j(f)|^p \cdot j^{\alpha(p-2)}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A_r(M,\ \alpha,\ \beta) \cdot \|f\|_{L^r}, \tag{14}$$

где $\alpha > \beta \geqslant 1 - \alpha$, $\alpha > \frac{1}{2}$ *и* $p = p_2$.

2) Пусть

$$\frac{2\alpha - 1}{\alpha + \beta - 1} \leqslant q \leqslant 2 \text{ при } 1 \leqslant b \leqslant 2,$$
$$2 \leqslant q \leqslant \frac{2\alpha - 1}{\alpha + \beta = 1} \text{ при } 2 \leqslant b \leqslant +\infty.$$

Тогда для $\{c_j\}$, *такой, что*

$$\left\{\sum_j |c_j|^q \cdot j^{\alpha(q-2)}\right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

существует f *такая, что* $(f,\ \varphi_j) = c_j$, $f \in L^s[0,\ 1]$ *и*

$$\|f\|_{L^s} \leqslant A'_q(M,\ \alpha,\ \beta) \cdot \left\{\sum_j |c_j|^q \cdot j^{\alpha(q-2)}\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{15}$$

где

$$s = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2\alpha-1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{\alpha-\beta}{2\alpha-1}\right) - \frac{1}{q'}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b'}\right)} & \text{при } \dfrac{2\alpha-1}{\alpha-\beta} \geqslant b', \\ q & \text{при } \dfrac{2\alpha-1}{\alpha-\beta} < b'. \end{cases}$$

Теорема 7. *Пусть Φ — ортонормированная на $[0, 1]$ система, для которой*

$$\| \{\varphi_j(x)\} \|_{l^b} \leqslant M \cdot x^{-\beta}. \tag{16}$$

1) При тех же обозначениях и ограничениях, что в пункте 1) теоремы 6, имеем

$$\left\{ \int\limits_0^1 | f(x) |^p x^{\alpha(p-2)} dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant B_r(M, \alpha, \beta) \cdot \| \{c_j\} \|_{l^r} \tag{17}$$

2) При тех же обозначениях и ограничениях, что и в пункте 2) теоремы 6, имеем

$$\left\{ \sum_j | c_j(f) |^s \right\}^{\frac{1}{s}} \leqslant B'_q(M, \alpha, \beta) \left\{ \int\limits_0^1 | f(x) |^q x^{\alpha(q-2)} dx \right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{18}$$

3. ЗАМЕЧАНИЯ И ПРИМЕРЫ

1°. Теоремы, приведенные в пункте 2, можно сформулировать и по-иному, используя понятие тензорного произведения нормированных пространств (см., например, [14] или [15]). Так, с помощью теоремы А. Гротендика о характеризации проективного топологического тензорного произведения локально выпуклого пространства на пространство l^1 [16, гл. I, § 2, теорема 2 и 15, теорема 7.2.3], получаем, например, следующее утверждение:

Пусть A — нормальный интегральный оператор, принадлежащий $L^2 \hat{\hat{\otimes}} L^2$ и действующий в $L^2[0, 1]$ по формуле (1).

Если выполнены условия: 1) ядро $A(x, y)$ оператора A входит в $L^\infty[0, 1; 0, 1]$; 2) $\{\varphi_j(A)\} \in l^1 \hat{\otimes} L^1$, то $A \in L^2 \hat{\otimes} L^2$ (принадлежность оператора тензорному произведению, пополненному по данной кросс-норме, понимается как принадлежность образу тензорного произведения при каноническом отображении см. [14] или [16]).

2°. Как любезно сообщил нам М. З. Соломяк, результат теоремы 1 можно несколько усилить: так, при $r = b'$ вместо $p = a$ можно получить $p = \frac{a}{2}$. Отсюда в силу теоремы 5 получаем (полагая $a = b = 1$): пусть

3°. Теоремы 5—7 не вытекают из теорем 1—4, хотя и доказываются теми же методами. Главной причиной этого является то, что не всякая ортонормированная система представляется в виде системы собственных функций интегрального оператора с «удобным» (в смысле, разъясненном ниже) ядром (так, нам неизвестно такое представление для системы Хаара, т. е. нам неизвестен общий вид ядер интегральных операторов, имеющих системой своих собственных функций ортонормированную систему Хаара). Однако для целого ряда ортонормированных систем подобного рода представления хорошо известны: например, для интегрального оператора с ядром $f(y - x)$ системой собственных функций является тригонометрическая система; у ядер операторов собственными функциями служат характеры (или матричные элементы представлений) компактных групп. Примерами таких ортонормированных являются системы Уолша и другие мультипликативные по Н. Я. Виленкину (состоящие из характеров нульмерных компактных абелевых групп) системы многочленов Лежандра и Якоби (являющихся матричными элементами представлений соответствующих групп [17]).

4°. В качестве примера приведем следствие из теоремы 4: пусть вполне непрерывный оператор A задан в виде

$$A = \sum_j s_j(A)(\cdot, \psi_j)\, \varphi_j,$$

где $|\varphi_i(x)\psi_i(y)| \leqslant M$ для всех x, y, j. Тогда, если $A \in \gamma_p$, $2 \leqslant p \leqslant +\infty$, оператор A — интегральный, причем для его ядра $A(x, y)$ справедливо неравенство

$$\left\{\int_0^1 \int_0^1 |A(x, y)|^p (x^2 + y^2)^{p-2} dxdy\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

5°. Классические теоремы Ф. Рисса и Р. Пэли о коэффициентах Фурье [18, стр. 154 и 182] получаются соответственно из теорем 5 (при $a = b = +\infty$) и 6 (при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $b = +\infty$). По существу теоремы 5—7 являются обобщениями упомянутых теорем Ф. Рисса и Р. Пэли на ортонормированные системы, состоящие из не обязательно ограниченных функций. Как показывают примеры, приведенные в [19], классические теоремы справедливы существенно для равномерно ограниченных систем функций (так, они не верны для системы Хаара). Отметим, что в [18] приводятся некоторые иные обобщения указанных теорем.

6°. Пусть $\Phi = \{\chi_j(x)\}$ — система функций Хаара. Легко видеть, что

$$\|\chi_j\|_{L^b} \leqslant M \cdot j^{\frac{1}{2} - \frac{1}{b}}.$$

Отсюда в силу теоремы 6 получаем $\left(\text{полагая } b = +\infty, \text{ так что } \beta = -\frac{1}{2}\right.$ и $\left.\alpha = \frac{3}{2}\right)$: пусть $f \in L^r$, $1 < r \leqslant 2$. Тогда

$$\left\{\sum_j |c_j(f)|^r \cdot j^{\frac{3}{2}(r-2)}\right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant A \cdot \|f\|_{L^r}.$$

7°. Пусть $\Phi = \{\chi_{2^k}(x)\}$ — подсистема системы Хаара. Очевидно, что

$$\sum_k \|\chi_{2^k}\|_{L^1} < +\infty.$$

Отсюда в силу теоремы 5 получаем (полагая $a = b = 1$): пусть $f \in L^r$, $2 \leqslant r \leqslant +\infty$. Тогда

$$\left\{\sum_k |c_k(f)|^{r'}\right\}^{\frac{1}{r'}} \leqslant \left\{\sum_k \|\chi_{2^k}\|_{L^1}\right\}^{1-\frac{2}{r}} \cdot \|f\|_{L^r},$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1.$$

8°. Касаясь возможных областей приложения приведенных теорем об ортонормированных системах, отметим, например, вопросы, связанные с абсолютной суммируемостью рядов Фурье; на это обратил наше внимание М. Ф. Тиман.

9°. Теоремы 1—7 содержательны не при всех значениях параметров, входящих в их формулировки. Так, теорема 5 при $1 \leqslant b < 2$ содержательна лишь для $1 \leqslant a \leqslant 2$. Отметим, кстати, что не существует полных ортонормированных систем, для которых (9) выполнялось бы при таких a и b (это нетрудно получить из того хорошо известного факта (см. [19], стр. 174), что для полной ортонормированной системы $\sum |\varphi_j(t)|^2 = +\infty$ для почти всех $t \in [0, 1]$). Таким образом, появление неполной системы в пункте 7° не случайно.

10°. Отметим, наконец, что все теоремы остаются справедливыми, если вместо отрезка [0, 1] рассматривать произвольное пространство с мерой.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Приведенные теоремы доказываются путем систематического использования интерполяционных теорем М. Рисса — Торина и Марцинкевича (см., например, [20, стр. 565, 18, стр. 144, 168]). Теоремы 1—2 можно несколько видоизменить, используя интерполяционные теоремы в пространствах со смешанной нормой, доказанные в [21]. Чтобы не загромождать изложения, докажем лишь некоторые из теорем, стараясь при этом выявить характерные черты всех (в том числе и не приведенных) доказательств.

Доказательство теоремы 1. Пусть A — заданный оператор. $A(x, y)$ — его ядро, $\{\varphi_j(A; x)\}$ — последовательность его собственных функций, занумерованных в порядке убывания (не возрастания) s-чисел операторов A.

Пусть $\mathfrak{U}_A = \{K(x, y) \mid K(x, y) = \varkappa \cdot A(x, y),\ \varkappa \in \boldsymbol{C}\}$. Будем применять теорему М. Рисса — Торина (обозначения см. в [18, стр. 144]), полагая $R_1 = [0, 1; 0, 1]$, ν_1 — плоская мера Лебега; $R_2 = N$, $\nu_2(\{j\}) = 1$; T — линейный оператор, относящий каждой функции $K(x, y) \in \mathfrak{U}_A$ числовую последовательность $\{\lambda_j(K)\}$-последовательность собственных чисел оператора K, имеющего $K(x, y)$ своим ядром. В силу неравенства Бесселя

$$\left\{\sum_j s_j^2(K)\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_j |\lambda_j(K)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_j \int_0^1 \left|\int_0^1 K(x, y)\,\varphi_j(y)\,dy\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{\int_0^1 \left(\sum_j \left|\int_0^1 K(x, y)\,\varphi_j(y)\,dy\right|^2\right) dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{2}},$$

так что T имеет тип (2,2).

Далее, используя неравенство Гельдера и то, что $b' \geqslant 2$, имеем

$$\left\{\sum_j s_j^a(K)\right\}^{\frac{1}{a}} = \left\{\sum_j \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 K(x, y)\,\varphi_j(y)\,dy\right|^2 dx\right)^{\frac{a}{2}}\right\}^{\frac{1}{a}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_j \left(\int_0^1 \left[\left(\int_0^1 |K(x, y)|^{b'}\,dy\right)^{\frac{1}{b'}} \cdot \left(\int_0^1 |\varphi_j(K, y)|^{b}\,dy\right)^{\frac{1}{b}}\right]^2 dx\right)^{\frac{a}{2}}\right\}^{\frac{1}{a}} =$$

$$= \left\{\sum_j \|\varphi_j(A)\|_{L^b}^a\right\}^{\frac{1}{a}} \cdot \left\{\int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x, y)|^{b'}\,dy\right)^{\frac{1}{b'}} dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \left\{\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^{b'}\,dx\,dy\right\}^{\frac{1}{b'}},$$

так что T имеет тип (b', a).

Интерполируя между точками $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{b'}, \frac{1}{a}\right)$, получаем, что для любого ядра $K(x, y)$ (а значит, и для $A(x, y)$), принадлежащего $L^r[0, 1; 0, 1]$, $2 \leqslant r \leqslant b'$, $T[K] = \{\lambda_j(K)\} \in l^p$, где p вычисляется по формуле, приведенной в формулировке теоремы, а потому $A \in \gamma_p$.

Доказательство теоремы 2. Будем применять теорему Марцинкевича [18, стр. 168], полагая R_1, R_2, ν_1 и $\mathfrak{U}_A$ такими же, как в доказательстве теоремы 1, а

$$\nu_2(\{j\}) = j^{-2\alpha},\quad T[K(x, y)] = \{j^\alpha \cdot \lambda_j(K)\}.$$

Как и выше, неравенство Бесселя дает:

$$\{\sum_j |s_j(K)|^2 \cdot j^{\alpha(2-2)}\}^{\frac{1}{2}} = \{\sum_j |j^\alpha s_j(K)|^2 \cdot j^{-2\alpha}\}^{\frac{1}{2}} = \\ = \| \{s_j\} \|_{l^2} = \| K(x, y) \|_{L^2},$$

так что T имеет тип (2,2).

Поскольку

$$\nu_2(\{j \| T[K(x, y)]| > y > 0\}) = \sum j^{-2\alpha} | T[K]| > y,$$

то получаем (учитывая, что $b' \geqslant 2$),

$$y < j^\alpha \left\{\int_0^1 \left| \int_0^1 K(x, y)\, \varphi_j(K; y)\, dy \right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant j^\alpha \left\{\int_0^1 \left[\left(\int_0^1 | K(x, y)|^{b'} dy\right)^{\frac{1}{b'}} \cdot \left(\int_0^1 |\varphi_j(A; y)|^b dy\right)^{\frac{1}{b}}\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= j^\alpha \cdot \| \varphi_j(A) \|_{L^b} \left\{\int_0^1 \left(\int_0^1 | K(x, y)|^{b'} dy\right)^{\frac{2}{b'}} dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot j^{\alpha-\beta} \left\{\int_0^1 \int_0^1 | K(x, y)|^{b'} dx dy\right\}^{\frac{1}{b'}}.$$

Отсюда

$$j > \left(\frac{y}{M \| K(x, y) \|_{L^{b'}}}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}} \equiv \omega^{\frac{1}{\alpha-\beta}}.$$

Поэтому $\left(\text{используя то, что } \alpha > \frac{1}{2} \text{ и } \alpha > \beta\right)$, получаем

$$\nu_2(\{j \,|\, | T[K]| > y\}) \leqslant \sum_{j > \omega^{\frac{1}{\alpha-\beta}}} j^{-2\alpha} \leqslant C \cdot \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\frac{1-2\alpha}{\alpha-\beta}} =$$

$$= \left(\frac{M \cdot \| K(x, y) \|_{L^{b'}}}{y}\right)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-\beta}}.$$

Значит, оператор T имеет слабый тип $\left(b', \frac{2\alpha-1}{\alpha-\beta}\right)$. Интерполируя между $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{b'}, \frac{\alpha-\beta}{2\alpha-1}\right)$, получим $A \in \gamma_{p, \alpha}$, где p вычисляется по указанным в формулировке теоремы формулам.

Доказательство теоремы 3. Пусть A — вполне непрерывный оператор, заданный разложением Шмидта (5). Тогда $\{s_j(A)\} \in c_0$. Положим $B_A = \{\{k_j\} \,|\, k_j = \varkappa \cdot s_j(A),\ \varkappa \in C\}$. Применяем теорему М. Рисса — Торина, полагая $R_1 = N$, $\nu_1(\{j\}) = 1$, $R_2 = [0, 1; 0, 1]$, ν_2 — плоская мера Лебега; T — оператор, ставящий в соответствие последовательности $\{k_j\}$, $j \in R_1$, функцию двух переменных по формуле

$$K(x, y) = T[\{k_j\}] = \sum_j k_j \varphi_j(x)\, \psi_j(y),$$

где Φ и Ψ — участвующие в разложении Шмидта оператора A ортонормированные последовательности. Тогда теорема Ф. Рисса — Фишера дает

$$\left\{\int_0^1\int_0^1 |K(x,\ y)|^2\,dxdy\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_j |k_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

так что T имеет тип (2,2); с другой стороны, неравенство Гельдера дает:

$$\left\{\int_0^1\int_0^1 |K(x,\ y)|^b\,dxdy\right\}^{\frac{1}{b}} = \left\{\int_0^1\int_0^1 \left|\sum_j k_j\varphi_j(x)\psi_j(y)\right|^b dxdy\right\}^{\frac{1}{b}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1\left[\left(\sum_j |k_j|^{\left(1-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)^{-1}}\right)^{1-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_j |\varphi_j(x)|^u\right)^{\frac{1}{u}}\cdot\left(\sum_j|\psi_j(y)|^v\right)^{\frac{1}{v}}\right]^b dxdy\right\}^{\frac{1}{b}} =$$

$$=\left\{\int_0^1\left(\sum_j|\varphi_j(x)|^u\right)^{\frac{b}{u}}dx\right\}^{\frac{1}{b}}\cdot\left\{\int_0^1\left(\sum_j|\psi_j(y)|^v\right)^{\frac{b}{v}}dy\right\}^{\frac{1}{b}}\times$$

$$\times\left(\sum_j|k_j|^{\left(1-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)^{-1}}\right)^{1-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}} \leqslant M\cdot N\times$$

$$\times\left\{\sum_j|k_j|^{\left(1-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)^{-1}}\right\}^{1-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}$$

Значит, T имеет и тип $\left(\left(1-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)^{-1},\ b\right)$.

С помощью интерполяции (при $\varkappa = 1$) и завершается доказательство. Теоремы 4—7 доказываются аналогичными рассуждениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. F. Stinespring. A sufficient condition for an integral operator to nave a trace. Iourn. reine und angew. Math., **200**, № 3—4, 200, 1958.
2. С. Л. Блюмин, Б. Д. Котляр. Операторы Гильберта — Шмидта и абсолютная сходимость рядов Фурье. «Изв. АН СССР, серия матем.», **33**, № 5, 1969.
3. I. Fredholm. Sur une classe d'equations fonctionnelles. Acta Math., **27**, 365, 1903.
4. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. «Наука», М., 1965.
5. E. Hille and I. D. Tamarkin. On the characteristic values of linear integral equations. Acta Math., **57**, 1, 1931.
6. O. Szasz. Ueber den Konvergenzexponent der Fourierschen Reichen, Münch. Sitzungsber, 135—150, 1922.
7. А. О. Гельфонд. О росте собственных значений однородных интегральных уравнений. Приложение к книге У. В Ловитта «Линейные интегральные уравнения». Гостехиздат, М., 1957.
8. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк. О приближении функций классов W_p^α кусочно-полиномиальными функциями. «Докл. АН СССР», **171**, № 5, 1015—1018, 1966.
9. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Спектральная теория. «Мир», М., 1966.
10. В. И. Параска. Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость. «Матем. сб.», 68 (110) : 4, 621, 1965.

11. П. Е. Соболевский. Об s-числах интегральных операторов. «Усп. матем. наук», 22, № 2, 114—116, 1967.

12. М. Ф. Тиман. Частные наилучшие приближения функций, абсолютная сходимость рядов Фурье и ядерность интегральных операторов Гильберта — Шмидта «Матем. сб.», 75(117) : 3, 361, 1968.

13. H. Triebel. Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev — Besov — Raümen, Inventiones math., 4, 275—293, 1967.

14. R. Schatten. A theory of crossspaces, Princeton, 1950.

15. А. Пич. Ядерные локально выпуклые пространства. «Мир», М., 1967.

16. A. Grothendieck. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., № 16, 1955.

17. Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп. «Наука», М., 1965.

18. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. II. «Мир», М., 1965.

19. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов. ГИФМЛ, М., 1958.

20. Н. Данфорд и Дж. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. ИЛ, М., 1962.

21. A. Benedek and P. Panzone. The spaces L^p urth mixed norm. Duke Math. I., 28, № 3, 301—324, 1961.

Поступила 20 марта 1969 г.