ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 11 1970

ОБ ОДНОМ ТИПЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПОЛУОСИ

А. И. Колосов

1. Рассмотрим следующую сингулярную краевую задачу:

$$x'' + f(t, x, x') = 0 \quad (t \geqslant 0) \qquad (1.1)$$
$$0 \leqslant x(t) \leqslant 1; \quad x(0) = 0, \quad x(\infty) = 1.$$

Относительно функции $f(t, x, y)$ предполагаем следующее.

1°. $f(t, x, y)$ — неотрицательная, непрерывная функция t, x и y в области $D = \{t > 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \infty\}$.

2°. Производные f'_t, f'_x, f'_y существуют и ограничены в каждой замкнутой области внутри D.

3°. Существуют функции $f_i(x, z)$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$$f_1(x, t \cdot y) \leqslant f(t, x, y) \leqslant f_2(x, t \cdot y) \qquad (1.2)$$

в замкнутой области $\overline{D}$.

При этом функции $f_i(x, z)$ удовлетворяют требованиям:

4°. $f_1(x, z)$ — неотрицательная функция x и z, когда $0 \leqslant x \leqslant 1$, $z \geqslant 0$. Функции $f_i(x, z)$ непрерывны при $0 < x < 1$, $z > 0$, причем

$$\int_x^1 [f_2(\sigma, \sigma)]^{1+\varepsilon} d\sigma \in L_1[0, 1],$$

хотя бы для одного $\varepsilon > 0$.

5°. $f_i(x, z)$ — неубывающие функции z, причем существует такое $\varepsilon > 0$, что $f_1(x, 0) \neq 0$ $(1 - \varepsilon < x < 1)$; $\lim\limits_{x \to 1} f_2(x, 0) = 0$.

6°. Производные f'_{ix} и f'_{iz} $(i = 1, 2)$ существуют и ограничены в каждой замкнутой области внутри $0 < x < 1$, $z > 0$.

7°. Существуют (конечные или бесконечные) пределы

$$\lim_{x \to 0} f_2(x, x), \quad \lim_{x \to 1} f_2(x, x).$$

Вместе с задачей (1.1) рассмотрим две вспомогательные задачи

$$x'' + f_i(x, t \cdot x') = 0 \, (t \geqslant 0;\ i = 1, 2), \qquad (1.3)$$
$$0 \leqslant x(t) \leqslant 1; \quad x(0) = 0, \quad x(\infty) = 1.$$

При сделанных предположениях относительно функций $f(t, x, y)$ и $f_i(x, z)$ будет показано, что задачи (1.1) и (1.3) имеют хотя бы по одному монотонному решению.

При этом имеет место следующая теорема сравнения:

Каждому из решений одной из задач (1.1), (1.3) *можно сопоставить по решению остальных двух задач, так что*

$$x_1(t) \leqslant x(t) \leqslant x_2(t), \tag{1.4}$$

где $x(t)$, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — *решения задач* (1.1), (1.3), *соответственно.*

Если $x(t)$ — решение одной из трех рассматриваемых задач, а $t(x)$ — обращение этого решения, то справедливо неравенство

$$\int_0^x \frac{d\omega}{\left\{2\int_\omega^1 f_2(\sigma, \sigma)\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}}} \leqslant t(x) \leqslant \int_0^x \frac{d\omega}{\left\{2\int_\omega^1 f_1(\sigma, 0)\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.5}$$

Заметим, что задачи (1.3) представляют и самостоятельный интерес. Примерами таких задач могут служить задача для уравнения Фолкнера — Скан, исследованная Г. Вейлем [1], Г. В. Щербиной (Гиль) и А. Д. Мышкисом [2, 3] и др., а также ряд задач магнитной газодинамики [4, 5].

Нужно отметить, что почти все перечисленные задачи сформулированы как задачи для уравнения третьего порядка, но легко приводятся к задаче типа (1.3).

2. Пользуясь теоремой единственности Скорца-Драгони — Гроппи [6], нетрудно показать, что если функция $f(t, x, y)$ — убывающая по x в области D, то задача (1.1) может иметь не более одного решения.

Доказательство существования решения у задачи (1.1) проведем, преобразуя задачу (1.1) к некоторому интегральному уравнению, имеющему решение на множестве всех неотрицательных функций в пространстве $C[0, 1]$.

Рассмотрим множество P всех монотонно неубывающих, дважды дифференцируемых функций пространства $C[0, \infty]$, таких, что $x'' \leqslant 0$ и

$$x(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

Обратная функция $t(x)$ для функций из P определена и непрерывна для всех $0 \leqslant x < 1$. Доопределим ее при $x = 1$, положив $t(1) = \lim_{x\to 1} t(x)$.

Если $t(1) < \infty$, то функцию $x(t) \in P$, соответствующую $t(x)$, назовем вырожденной. Естественно все функции из P, для которых $\lim_{x\to 1} t(x) = \infty$, назвать невырожденными.

Зададим на P дифференциальный оператор

$$L[x] = x'' + f(t, x, x') \tag{2.1}$$

и рассмотрим задачу

$$L[x] = 0, \quad x \in P. \tag{2.2}$$

Задача (2.2) является сужением задачи (1.1) на P.

Отметим следующий факт.

Лемма 2.1. *Существует функция* $\alpha(x) \geqslant 0$, $\alpha(x) \in C[0, 1]$,

$$\int_x^1 \alpha^{-1}(\sigma)\,d\sigma \in L_1[0, 1],$$

имеющая ограниченную производную на $(0, 1)$, *такая что*

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)\cdot f_2(x, x)=0;\quad \lim_{x\to 1}\alpha(x)\cdot f_2(x, x)=0. \tag{2.3}$$

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда

$$\lim_{x\to 0} f_2(x, x)=\infty;\quad \lim_{x\to 1} f_2(x, x)=\infty.$$

Положим

$$\alpha(x)=\begin{cases} f_2^{-(1+\varepsilon)}(x, x), & f_2(x, x)\geqslant 1,\\ 1 & f_2(x, x)\leqslant 1.\end{cases}$$

Теперь можно сформулировать такие два предложения.

Теорема 2.1. *Непрерывное отображение*

$$\varphi(x)=\alpha(x)\cdot f(t, x, x')\quad (t=t(x)), \tag{2.4}$$

определенное на P, *переводит множество* P *внутрь множества*

$$S=\{u(x)\,|\,u(x)\in C[0, 1]\cap[\alpha(x)\cdot f_1(x, 0),\ \alpha(x)\cdot f_2(x, x)]\}.$$

Доказательство теоремы непосредственно следует из 3°, 5° и неравенства *

$$t\cdot x'\leqslant x\quad (x(t)\in P).$$

Сопоставим функции $\varphi(x)\in S$ функцию $x(t)$, являющуюся обращением функции

$$t(x)=\int_0^x\left\{2\int_\omega^1\frac{\varphi(\sigma)}{\alpha(\sigma)}d\sigma\right\}^{-\frac{1}{2}}d\omega, \tag{2.5}$$

и обозначим через M оператор, осуществляющий эту связь,

$$x(t)=M[\varphi(x)]. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. *Оператор* M *отображает множество* S *на множество* P. *При этом имеет место оценка*

$$\int_0^x\left\{2\int_\omega^1 f_2(\sigma, \sigma)\,d\sigma\right\}^{-\frac{1}{2}}d\omega\leqslant t(x)\leqslant\int_0^x\left\{2\int_\omega^1 f_1(\sigma, 0)\,d\sigma\right\}^{-\frac{1}{2}}d\omega, \tag{2.7}$$

где $t(x)$ — *обращение функции* $x(t)\in P$.

Доказательство теоремы очевидно.

Легко видеть, что задача (2.2) эквивалентна задаче отыскания функции $\varphi(x)\in S$, которая при двойном отображении (2.6)-(2.4) переходит сама в себя, т. е. удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$\varphi(x)=\alpha(x)\cdot f\left(\int_0^x\left\{2\int_\omega^1\frac{\varphi(\sigma)}{\alpha(\sigma)}d\sigma\right\}^{-\frac{1}{2}}d\omega,\ x,\ \left\{2\int_x^1\frac{\varphi(\sigma)}{\alpha(\sigma)}d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}}\right)\equiv$$
$$\equiv A\varphi(x)\qquad (\varphi(x)\in S). \tag{2.8}$$

3. Рассмотрим оператор A, введенный в предыдущем пункте.

* Это неравенство вытекает из условий $x(0)\geqslant 0,\ x''\leqslant 0$:

$$\frac{x(t)}{t}\geqslant\frac{x(t)-x(0)}{t}=x'(\theta\cdot t)\geqslant x'(t)\quad (0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

Лемма 3.1. A — непрерывный оператор на S.

Нужно показать, что по заданному $\varepsilon_0 > 0$ можно найти такое $\delta_0(\varepsilon_0) > 0$, что $|Au_1 - Au_2| < \varepsilon_0$ для всех u_1, $u_2 \in S$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$, как только $|u_1 - u_2| < \delta_0$.

По заданному $\varepsilon_0 > 0$ определим некоторое $\delta_1 > 0$, так чтобы при $0 \leqslant x \leqslant \delta_1$ выполнялось условие

$$\max\{\alpha(x) \cdot f_2(x, x),\ \alpha(1-x) \cdot f_2(1-x,\ 1-x)\} \leqslant \varepsilon_0.$$

Так как множество S мажорируется непрерывной функцией $\alpha(x) \cdot f_2(x, x)$, равной нулю на концах интервала $(0, 1)$, получаем $|Au_1 - Au_2| < \varepsilon_0$ как только $0 \leqslant x \leqslant \delta_1$ и $1 - \delta_1 \leqslant x \leqslant 1$.

Введем функции $F_i(x, v)$ $(i = 1, 2;\ \delta_1 \leqslant x \leqslant 1 - \delta_1)$:

$$F_1(x, v) = \int_0^x \left\{2\int_\omega^1 v(\sigma)\, d\sigma\right\}^{-\frac{1}{2}} d\omega,\quad F_2(x, v) = \left\{2\int_x^1 v(\sigma)\, d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Путем несложных, но довольно громоздких преобразований нетрудно убедиться в ограниченности отношений

$$\frac{\left|F_i\left(x, \frac{u_1}{\alpha}\right) - F_i\left(x, \frac{u_2}{\alpha}\right)\right|}{\delta_0} \qquad (i = 1, 2)$$

на сегменте $\delta_1 \leqslant x \leqslant 1 - \delta_1$ при всех u_1, $u_2 \in S$, удовлетворяющих условию $\max|u_1 - u_2| < \delta_0$. Поэтому функции $F_i\left(x, \frac{u}{\alpha}\right)$ непрерывны по u. Но так как $f(t, x, y)$ непрерывна при $t > 0$ и $y > 0$, то $f\left(F_1\left(x, \frac{u}{\alpha}\right),\ x,\ F_2\left(x, \frac{u}{\alpha}\right)\right)$ непрерывна по u при $\delta_1 \leqslant x \leqslant 1 - \delta_1$.

Таким образом, оператор A действительно непрерывен на S.

Лемма 3.2. Оператор A вполне непрерывен на S.

Так как оператор A непрерывен на S, то для его полной непрерывности достаточно показать, что он одновременно компактен на S*. Множество S ограничено сверху непрерывной функцией $\alpha(x) \cdot f_2(x, x)$, равной нулю на концах интервала $(0, 1)$. Поэтому достаточно убедиться в компактности множества AS, рассматриваемого как совокупность функций, заданных на произвольном сегменте $[x_0, x_1]$ интервала $(0, 1)$.

Согласно теореме Арцела [8] достаточно установить равностепенную непрерывность множества AS (на сегменте $[x_0, x_1]$).

Вычислим $w'(x)$, где $w(x) = Au(x)$,

$$w'(x) = \alpha'(x) \cdot f\left(F_1\left(x, \frac{u}{\alpha}\right),\ x,\ F_2\left(x, \frac{u}{\alpha}\right)\right) +$$
$$+ \alpha(x) \cdot \left\{f'_t \cdot \left\{2\int_x^1 \frac{u(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\, d\sigma\right\}^{-\frac{1}{2}} + f'_x - f'_{x'} \cdot u(x) \cdot \alpha^{-1}(x) \cdot \left\{2\int_x^1 \frac{u(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\, d\sigma\right\}^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Из условия 2° и леммы 2.1 вытекает, что производная $w'(x)$ ограничена на $[x_0, x_1]$ по модулю, причем ограничивающая константа не зависит от выбора $u \in S$. Здесь важно, что $f_1(x, 0) \neq 0$ $(1 - \varepsilon < x < 1)$. Отсюда множество AS равностепенно непрерывно на $[x_0, x_1]$.

 * Т. е. множество S переводит в компактное множество.

Рассмотрим оператор A на некотором выпуклом, замкнутом множестве $S_1 \subseteq S$, таком, что

$$AS_1 \subset S_1.$$

Множеством, удовлетворяющим всем этим условиям, является, например, множество S.

Так как S_1 кроме этого и ограниченное множество, а оператор A вполне непрерывен на S, заключаем с помощью принципа неподвижной точки Ю. Шаудера [8], что уравнение (2.8) имеет по крайней мере одно решение на S_1.

4. Рассмотрим следующие операторные уравнения:

$$A_i\varphi(x) \equiv \alpha(x)\cdot f_i\left(x, \int\limits_0^x \left\{\frac{\int\limits_x^1 \frac{\varphi(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\,d\sigma}{\int\limits_\omega^1 \frac{\varphi(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\,d\sigma}\right\}^{\frac{1}{2}} d\omega\right) = \varphi(x), \tag{4.1}$$

$$(\varphi(x) \in S; \quad i = 1,\ 2).$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Для любого решения одного из уравнений* (2.8), (4.1) *на* S *существуют решения двух других уравнений на* S *такие, что*

$$\bar\varphi_1(x) \leqslant \bar\varphi(x) \leqslant \bar\varphi_2(x), \tag{4.2}$$

где $\bar\varphi(x)$, $\bar\varphi_1(x)$, $\bar\varphi_2(x)$ — решения задач (2.8) и (4.1), соответственно.

Из условия (1.2) видно, что операторы A_i являются минорантой и мажорантой для A на S:

$$A_1\varphi \leqslant A\varphi \leqslant A_2\varphi; \quad \varphi \in S. \tag{4.3}$$

Допустим, $\bar\varphi = A\bar\varphi$, некоторое решение уравнения (2.8).

Положим $S_1 = \{u(x) \mid u(x) \in C[0,\ 1] \cap [\alpha(x)\cdot f_1(x,\ 0),\ \bar\varphi]\}$, легко видеть что $A_1S_1 \subset S_1$. Поэтому, как показано в пункте 3, оператор A_1 имеет на S_1 неподвижную точку:

$$A_1\bar\varphi_1 = \bar\varphi_1,$$

так как $\bar\varphi_1 \in S_1$, то

$$\bar\varphi_1 \leqslant \bar\varphi, \tag{4.4}$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказываются остальные утверждения теоремы.

Из этой теоремы непосредственно вытекает теорема сравнения, сформулированная в пункте 1.

Эта теорема является, в определенном смысле, аналогом теорем сравнения Скорца-Драгони — Гроппи [6] для задач типа (1.1)-(1.3).

5. Желательно было бы получить как можно лучшую оценку снизу и сверху области, в которой находятся все решения уравнений (2.8), (4.1) на S.

Для этого оценим решения уравнений (4.1) снизу и сверху с помощью решений некоторых, специальным образом построенных, монотонных операторов.

Рассмотрим следующие операторные уравнения:

$$B_1 u(x) \equiv \alpha(x) \cdot f_1\left(x, \int\limits_0^x \left\{ \frac{\int\limits_x^1 \frac{u(\sigma)}{\alpha(\sigma)} d\sigma}{\int\limits_\omega^1 f_1(\sigma, \sigma)\, d\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} d\omega \right) = u(x) \tag{5.1}$$

и

$$B_2 u(x) \equiv \alpha(x) \cdot f_1\left(x, \int\limits_0^x \left\{ 1 - \frac{\int\limits_\omega^x f_1(\sigma, 0)\, d\sigma}{\int\limits_\omega^1 \frac{u(\sigma)}{\alpha(\sigma)} d\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} d\omega \right) = u(x). \tag{5.2}$$

Операторы B_i $(i = 1, 2)$ заданы на множестве

$$S(f_1(x, 0),\ f_1(x, x)) = \{u(x) \mid u(x) \in C[0, 1] \cap [\alpha(x) \cdot f_1(x, 0),\ \alpha(x) \cdot f_1(x, x)]\}$$

и обладают следующими свойствами:

1. $B_1 \leqslant A_1 \leqslant B_2$;
2. $u_1 \leqslant u_2 => B_i u_1 \leqslant B_i u_2$;
3. $B_i S(f_1(x, 0),\ f_1(x, x)) \subset S(f_1(x, 0),\ f_1(x, x))$;
4. B_i — непрерывный оператор на $S(f_1(x, 0),\ f_1(x, x))$;
5. B_i — вполне непрерывный оператор на $S(f_1(x, 0),\ f_1(x, x))$.

Свойства 1—3 очевидны, 4-5 доказываются аналогично соответствующим свойствам оператора A.

Согласно теореме М. А. Красносельского [7, теорема 4.1] уравнение (5.1) имеет наименьшее решение $\bar{u}_1(x)$, а уравнение (5.2) имеет наибольшее решение $\bar{u}_2(x)$ на $S(f_1(x, 0),\ f_1(x, x))$, которые могут быть найдены путем итераций:

$$\begin{array}{llll} u_{n+1} = B_i u_n & u_0 = \alpha(x) \cdot f_1(x, 0) & \text{для} & B_1 \\ (n = 0, 1 \ldots) & u_0 = \alpha(x) \cdot f_1(x, x) & \text{для} & B_2 \end{array} \tag{5.3}$$

При этом имеет место

Лемма 5.1. *Все неподвижные точки оператора A_1 принадлежат множеству $S(\bar{u}_1/\alpha,\ \bar{u}_2/\alpha)$.*

Докажем от противного. Пусть $\varphi(x)$ — неподвижная точка оператора A_1, такая что $\varphi(x) \overline{\in} S(\bar{u}_1/\alpha,\ \bar{u}_2/\alpha)$. Нетрудно показать, что в этом случае либо оператор B_1 имеет неподвижную точку $u(x) \leqslant \varphi(x)$, но тогда $\bar{u}_1(x)$ — не наименьшая неподвижная точка B_1, либо оператор B_2 имеет неподвижную точку $v(x) \geqslant \varphi(x)$, но тогда $\bar{u}_2(x)$ — не наибольшая неподвижная точка B_2, что противоречит определению $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$.

Рассмотрим операторные уравнения:

$$B_3 u(x) \equiv \alpha(x) \cdot f_1\left(x, \int\limits_0^x \left\{ \frac{\int\limits_x^1 \frac{u(\sigma)}{\alpha(\sigma)} d\sigma}{\int\limits_\omega^1 \frac{\bar{u}_2(\sigma)}{\alpha(\sigma)} d\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} d\omega \right) = u(x) \tag{5.4}$$

и

$$B_4 u(x) \equiv \alpha(x) \cdot f_1\left(x, \int_0^x \left\{ 1 - \frac{\int_\omega^x \frac{\bar{u}_1(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\, d\sigma}{\int_\omega^1 \frac{u(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\, d\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} d\omega \right) = u(x), \tag{5.5}$$

заданные на $S(\bar{u}_1/a,\ \bar{u}_2/\alpha)$.

Операторы B_3 и B_4 имеют те же свойства, что и операторы B_1 и B_2, причем

$$B_1 \leqslant B_3 \leqslant A_1 \leqslant B_4 \leqslant B_2.$$

Продолжая данный процесс, получим две последовательности монотонных операторов B_m $(m = 1, 2 \ldots)$, являющихся минорантами и мажорантами оператора A_1:

$$B_1 \leqslant \cdots \leqslant B_{2k-1} \leqslant B_{2k+1} \leqslant \cdots \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant B_{2k+2} \leqslant B_{2k} \leqslant \cdots \leqslant B_2$$
$$(k = 1, 2 \ \ldots).$$

Операторы B_{2k+1} и B_{2k+2} заданы на множестве $S(\bar{u}_{2k-1/\alpha},\ \bar{u}_{2k/\alpha})$, где $\bar{u}_{2k-1}$ и $\bar{u}_{2k}$ — наименьшая и наибольшая неподвижные точки операторов B_{2k-1} и B_{2k} соответственно.

Для обоснования сходимости последовательностей $\bar{u}_{2k-1}$ и $\bar{u}_{2k}$ понадобится следующая

Лемма 5.2. *Множество функций $\varphi(x)$, таких что*

$$\varphi(x) = \alpha(x) \cdot f_1\left(x, \int_0^x \left\{ \frac{\int_x^1 \frac{u(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\, d\sigma}{\int_\omega^1 \frac{v(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\, d\sigma} \right\}^{\frac{1}{2}} d\omega \right), \tag{5.6}$$

где $u(x) \leqslant v(x)$ $u(x),\ v(x) \in S(f_1(x, 0),\ f_1(x, x))$, компактно.

Обозначим множество функций $\varphi(x)$ через $\sum$. Нетрудно видеть, что $\sum \subset S(f_1(x, 0),\ f_1(x, x))$, а следовательно, множество $\sum$ равномерно ограничено. Равностепенная непрерывность $\sum$ доказывается так же, как и в лемме 3.2. Но тогда по теореме Арцела множество $\sum$ — компактно.

Так как $\sum$ компактно, то последовательности $\bar{u}_{2k-1}$ и $\bar{u}_{2k}$ являются компактными монотонными последовательностями, и, следовательно, равномерно сходятся. Последовательности операторов B_{2k-1} и B_{2k} при этом сходятся по операторной норме к некоторым предельным операторам B^- и B^+:

$$B^-\bar{u} = \bar{u} \quad (\bar{u} = \lim_{k\to\infty} \bar{u}_{2k-1}), \tag{5.7}$$
$$B^+\bar{v} = \bar{v} \quad (\bar{v} = \lim_{k\to\infty} \bar{u}_{2k}).$$

Функции $\bar{u}(x)$ и $\bar{v}(x)$ могут не быть неподвижными точками оператора A_1, но существенно то, что они удовлетворяют неравенству

$$\bar{u}(x) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \bar{v}(x), \tag{5.8}$$

где $\varphi_1(x)$ — произвольная неподвижная точка оператора A_1.

Аналогичные оценки можно получить и для оператора A_2.

Теперь сформулируем следующую теорему.

Теорема 5.1. *Все неподвижные точки операторов A и A_i* $(i = 1, 2)$ *принадлежат множеству* $S(\bar{u}/\alpha, \bar{w}/\alpha)$, *где* $\bar{u}(x)$ — *функция из* (5.8), *а* $\bar{w}(x)$ — *предел последовательности неподвижных точек операторов-мажорант оператора A_2.*

Теорема доказывается аналогично лемме 5.1. Следовательно, для решений задачи (1.1) имеет место оценка

$$\int_0^x \left\{2\int_\omega^1 \frac{\bar{w}(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\,d\sigma\right\}^{-\frac{1}{2}} d\omega \leqslant t(x) \leqslant \int_0^x \left\{2\int_\omega^1 \frac{\bar{u}(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\,d\sigma\right\}^{-\frac{1}{2}} d\omega, \qquad (5.9)$$

где $t(x)$ — обращение решения задачи (1.1).

Укажем оценку для $x'(0)$, где $x'(t)$ — первая производная решения задачи (1.1):

$$\left\{2\int_0^1 \frac{\bar{u}(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant x'(0) \leqslant \left\{2\int_0^1 \frac{\bar{w}(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Может возникнуть следующий вопрос. В каком случае итерационный процесс может быть продолжен после получения предельных функций $\bar{u}$ и $\bar{v}$?

Достаточные условия продолжения итерационного процесса дают следующие теоремы.

Теорема 5.2. *Если сильная производная по конусу K в точке $\bar{v}$ оператора B^+ имеет собственный вектор h_0, такой, что $\bar{v} - \varepsilon \cdot h_0 \geqslant \bar{u}$ при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, причем собственное значение соответствующее h_0 строго больше единицы, то существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что имеет место неравенство*

$$B^+(\bar{v} - \varepsilon \cdot h_0) \leqslant \bar{v} - \varepsilon \cdot h_0 \qquad (5.10)$$

при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$; K — конус всех неотрицательных функций из $C[0, 1]$.

Можно показать, что оператор B^+ может иметь сильную производную по конусу в точке $\bar{v}$.

(Определение производной по конусу имеется, например, в [7]). Теперь данная теорема вытекает из одной теоремы М. А. Красносельского [7, теорема 3.5].

Нетрудно доказать и такую теорему.

Теорема 5.3. *Если имеет место неравенство* (5.10) *то*

$$\varphi \leqslant \bar{v} - \varepsilon \cdot h_0,$$

где φ — неподвижная точка оператора A_1.

Таким образом, отправляясь от функции $\bar{v}(x) - \varepsilon \cdot h_0(x)$. итерационный процесс может быть продолжен, если выполнены условия теоремы 5.2.

6. Рассмотрим случай, когда $f_1(x, 0) = 0$ $(1 - \varepsilon < x < 1)$, а остальные требования 1°—7° остаются в силе.

Будем считать, что можно построить положительную, монотонную миноранту B оператора A_1. Тогда имеет место

Теорема 6.1. *Если уравнение $u = Bu$ имеет на S решение u_0, отличное от нуля на некотором интервале* $(1 - \varepsilon, 1)$, *то и уравнения* (2.8), (4.1) *имеют решения на* $S(u_0(x)/\alpha, f_2(x, x))$.

Операторы A, A_i $(i = 1, 2)$ можно рассматривать на множестве $S(u_0(x)/\alpha(x), f_2(x, x))$. Очевидно, $S(u_0(x)/\alpha(x), f_2(x, x)) \subset S$ и теперь можно повторить все доказательства, изложенные в пунктах 3, 4, 5.

В качестве оператора B можно взять следующий оператор:

$$Bu(x) = \alpha(x) \cdot f_1\left(x, \int_0^x \left\{ \frac{\int_x^1 \frac{u(\sigma)}{\alpha(\sigma)} d\sigma}{\int_\omega^1 f_2(\sigma, \sigma)\, d\sigma} \right\}^{1/2} d\omega \right) = u(x). \tag{6.1}$$

Уравнению (6.1) отвечает дифференциальное уравнение

$$x'' + f_1\left(x, \int_0^x \left\{ 2 \int_\omega^1 f_2(\sigma, \sigma)\, d\sigma \right\}^{-\frac{1}{2}} d\omega \cdot x' \right) = 0 \quad (t \geqslant 0), \tag{6.2}$$
$$0 \leqslant x(t) \leqslant 1; \quad x(0) = 0, \quad x(\infty) = 1,$$

которое не зависит явно от t, и которое часто может быть решено непосредственно. Приведем пример, когда решение задачи (6.2) может быть получено в квадратурах.

Пусть $f_1(x, t \cdot x') = p(x) \cdot t^n \cdot x'^n$ $(0 < n < 2)$, где $p(x) \geqslant 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, непрерывная при $0 < x < 1$ функция, $p'(x)$ ограничена на $0 < x < 1$;

$$\int_x^1 [p(\sigma) \cdot \sigma^n]^{1+\varepsilon} d\sigma \in L_1[0, 1].$$

Имеем уравнение

$$x'' + p(x) \cdot \left(\int_0^x \left\{ 2 \int_\omega^1 p(\sigma) \cdot \sigma^n d\sigma \right\}^{-\frac{1}{2}} d\omega \right)^n \cdot x'^n = 0, \tag{6.3}$$
$$0 \leqslant x(t) \leqslant 1; \quad x(0) = 0, \quad x(\infty) = 1.$$

Нетрудно показать, что решение уравнения (6.3) существует и имеет вид

$$t(x) = \int_0^x \left\{ (2 - n) \cdot \int_\omega^1 \prod(\sigma)\, d\sigma \right\}^{-\frac{1}{2-n}} d\omega, \tag{6.4}$$

где $t(x)$ — обращение решения уравнения (6.3) и

$$\prod(x) = p(x) \cdot \left(\int_0^x \left\{ 2 \int_\omega^1 p(\sigma) \cdot \sigma^n \cdot d\sigma \right\}^{-\frac{1}{2}} d\omega \right)^n.$$

При $p(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $n = 1$ задача (1,3) является задачей об обтекании пластины вязкой несжимаемой жидкостью.

Приведем, наконец, две, полезные в приложениях, теоремы.

Теорема 6.2. *Если при* $1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant 1$, $f_1(x, z) \geqslant q(x) \cdot (1 - x)^m \cdot z^n$, *где* $q(x)$ *удовлетворяет условиям* 4°—6°, $q(1) > 0$, $0 \leqslant m < m + n < 1$, *то все решения задач* (1.1) *и* (1.3) — *вырожденные функции.*

Доказательство теоремы нетрудно получить, если воспользоваться сформулированной здесь теоремой сравнения, а также результатами последнего раздела.

Если же $f_1(x, 0) \neq 0$ при $1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$, то все решения задач (1.1) и (1.3) вырожденные при условии, что

$$\int_0^1 \left\{ \int_\omega^1 f_1(\sigma, 0)\, d\sigma \right\}^{-\frac{1}{2}} d\omega < \infty.$$

Это следует из (2.7).

Теорема 6.3. *Пусть*

$$\lim_{x\to 1} \int_0^x \left\{ \int_\omega^1 f_2(\sigma, \sigma)\, d\sigma \right\}^{-\frac{1}{2}} d\omega = \infty,$$

тогда все решения задач (1.1), (1.3) — *невырожденные функции.*

Действительно, из (2.7) для любого решения $x(t)$ указанных задач верна оценка

$$t(x) \geqslant \int_0^x \left\{ 2 \int_\omega^1 f_2(\sigma, \sigma)\, d\sigma \right\}^{-\frac{1}{2}} d\omega,$$

где $t(x)$ — обращение $x(t)$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Г. Я. Любарскому за постоянное внимание к данной работе и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Weyl. Proc. Nat. Acad. Sci., Washington, 27 (1941), p. 578.
2. Г. В. Щербина. «Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ», т. XXVIII, серия 4, 1961, 97—102.
3. Г. В. Гиль и А. Д. Мышкис. ДАН СССР, 112 (1957), 599—602.
4. G. Jungclaus. Rev. Modern Phys. 32 (1960), p. 823.
5. Л. Е. Калихман. Элементы магнитной газодинамики. Атомиздат, М., 1964.
6. Дж. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II. Изд-во иностр. лит., М., 1954.
7. М. А. Красносельский. Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, М., 1962.
8. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. Изд-во «Наука», М., 1965.

Поступила 28 января 1969 г.