ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 11 1970

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Д. Ш. Лундина

В работах [1—2] была исследована устойчивость обратной задачи теории рассеяния для одного уравнения Штурма — Лиувилля, т. е. были получены оценки для разности потенциалов и нормированных собственных функций двух скалярных задач, данные рассеяния которых совпадают на конечном интервале энергий $\lambda^2 < N^2$.

Настоящая статья посвящена тем же вопросам для систем дифференциальных уравнений Штурма — Лиувилля. Устойчивость обратной задачи исследуется в классе потенциалов $V_{\alpha(x)}$, в который входят все эрмитовы матрицы-функции $V(x)$, удовлетворяющие условию

$$\int_x^\infty |V(t)|\,dt \leqslant \alpha(x), \tag{1}$$

где $\alpha(x)$ — произвольная неотрицательная невозрастающая и суммируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция. Норму $|V(t)|$ матрицы $V(t)$ определим как норму линейного оператора, порождаемого матрицей $V(t)$ в унитарном n-мерном пространстве,

$$|V(t)|^2 = \sup_{|x|=1}(V(t)\,x,\ V(t)\,x).$$

Пусть данные рассеяния на потенциале $V_1(x)$ совпадают с данными рассеяния на потенциале $V_2(x)$ при всех значениях $\lambda^2 < N^2$ и потенциалы $V_1(x)$, $V_2(x)$ принадлежат классу $V_{\alpha(x)}$. Далее, пусть матрицы $K_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) есть ядра соответствующих операторов преобразования, а матрицы $F_j(x)$ ($j = 1, 2$) строятся по данным рассеяния

$$\{\lambda_j^{(1)}, \ldots, \lambda_j^{(n)}, M_j^{(1)}, \ldots, M_j^{(n)};\ S_j(\lambda)\}$$

согласно формуле

$$F_j(x) = \sum_{k=1}^{n} [M_j^{(k)}]\, e^{-\left|\lambda_j^{(k)}\right| x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [I - S_j(\lambda)]\, e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{2}$$

Составляя для каждой из двух обратных задач теории рассеяния основное уравнение, а затем вычитая одно уравнение из другого, получим при $y \geqslant x$

$$\begin{gathered} F_j(x+y) - F_k(x+y) + K_j(x, y) - K_k(x, y) + \\ + \int_x^\infty [K_j(x, t) - K_k(x, t)]\, F_j(t+y)\, dt + \int_x^\infty K_k(x, t)\,[F_j(t+y) - \\ - F_k(t+y)]\; dt = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Полагая

$$K_{j,k}(x, y) = K_j(x, y) - K_k(x, y),$$
$$F_{jk}(x+y) = F_j(x+y) - F_k(x+y),$$

мы можем равенство (3) записать в виде

$$K_{j,k}(x, y) + F_{j,k}(x+y) + \int_x^\infty K_{j,k}(x, t)\, F_j(t+y)\, dt +$$
$$+ \int_x^\infty K_k(x, t)\, F_{j,k}(t+y)\, dt = 0. \quad (4)$$

Учитывая, что $F_j(x) = F_j^*(x)$, перейдем в этом равенстве к сопряженным матрицам:

$$K_{j,k}^*(x, y) + F_{j,k}(x+y) + \int_x^\infty F_j(t+y)\, K_{j,k}^*(x, t)\, dt +$$
$$+ \int_x^\infty F_{j,k}(t+y)\, K_k^*(x, t)\, dt = 0. \quad (5)$$

При каждом фиксированном $x \geqslant 0$ последнее равенство является уравнением относительно матрицы-функции $K_{j,k}^*(x, y)$. Имея в виду обращение этого уравнения, определим в пространстве $L_2^{(n,n)}(x, \infty)$ оператор F_{jx} формулой

$$F_{jx}[A(t)] = \int_x^\infty F_j(t+y)\, A(t)\, dt.$$

Решая уравнение (5), находим

$$K_{j,k}^*(x, y) = -(I + F_{jx})^{-1}\Big\{F_{j,k}(x+y) + \int_x^\infty F_{j,k}(t+y)\, K_k^*(x, t)\, dt\Big\}. \quad (6)$$

Подобно тому, как это делалось в работе [1], найдем явный вид оператора $(I + F_{jx})^{-1}$, а именно, покажем, что справедлива

Лемма 1. *При любом $x \geqslant 0$ имеет место равенство*

$$(I + F_{jx})^{-1} = (I + \overset{\circ}{K}_{jx})(I + K_{jx}), \quad (7)$$

где оператор преобразования $(I + K_{jx})$ и ему сопряженный оператор $(I + K_{jx}^0)$ действуют в пространстве $L_2^{(n,n)}(x, \infty)$ и определяются формулами

$$(I + K_{jx})[A(t)] = A(y) + \int_y^\infty K_j(y, t)\, A(t)\, dt,$$
$$(I + K_{jx}^0)[A(t)] = A(y) + \int_x^y K_j^*(t, y)\, A(t)\, dt.$$

Доказательство. Для краткости индекс j будем опускать. Так как существует обратный оператор $(I + K)^{-1}$, то доказываемое тождество (7) эквивалентно равенству

$$I = (I + K_x)(I + F_x)(I + \overset{\circ}{K}_x),$$

которое после раскрытия скобок приводится к такому виду:

$$0 = K_x + F_x + K_x F_x + \overset{\circ}{K}_x + K_x \overset{\circ}{K}_x + F_x \overset{\circ}{K}_x + K_x F_x \overset{\circ}{K}_x.$$

Поэтому, переходя к ядрам соответствующих интегральных операторов, заключаем, что для справедливости доказываемой леммы достаточно установить, что при всех $t \geqslant x$, $y \geqslant x$ выполняется тождество

$$K(t, y) + F(t+y) + K^*(y, t) + \int_t^\infty K(t, \tau) F(\tau + y)\, d\tau +$$
$$+ \int_t^\infty K(t, \tau) K^*(y, \tau)\, d\tau + \int_y^\infty F(t+\tau) K^*(y, \tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_t^\infty \int_y^\infty K(t, \tau) F(\xi + \tau) K^*(y, \xi)\, d\tau d\xi = 0.$$

Как показано в [3, стр. 97, формула (4. 3. 7)] это тождество действительно имеет место, и лемма доказана.

Перепишем теперь равенство (6), используя лемму (1),

$$\overset{*}{K}_{j,k}(x, y) = -(I + \overset{\circ}{K}_{jx})(I + K_{jx})\{F_{j,k}(x+y) + \int_x^\infty F_{j,k}(t+y) K_k^*(x, t)\, dt\}. \quad (8)$$

Так как данные рассеяния рассматриваемых задач совпадают при всех $\lambda^2 < N^2$, то

$$F_{j,k}(x+y) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda| > N} [S_k(\lambda) - S_j(\lambda)]\, e^{i\lambda(x+y)} d\lambda,$$

откуда следует, что

$$(I + K_{jx})[F_{j,k}(x+y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda| > N} E_j(y, \lambda)[S_k(\lambda) - S_j(\lambda)] e^{i\lambda x} d\lambda$$

и

$$(I + K_{jx})\{F_{j,k}(x+y) + \int_x^\infty F_{j,k}(t+y) K_k^*(x, t)\, dt\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda| > N} E_j(y, \lambda)[S_k(\lambda) - S_j(\lambda)] E_k^*(x, -\lambda) d\lambda = \Phi_{j,k}(x, y), \quad (9)$$

где через

$$E_j(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty K_j(x, t)\, e^{i\lambda t} dt$$

обозначены те решения соответствующих матричных дифференциальных уравнений, которые при $x \to \infty$ ведут себя, как $e^{i\lambda x} I$.

Из последнего равенства и формулы (8) получаем соотношение

$$K_{j,k}^*(x, y) = -(I + \overset{\circ}{K}_{jx})[\Phi_{j,k}(x, y)], \quad (10)$$

которое будет использовано в дальнейшем как при оценке разности потенциалов, так и при оценке разности собственных матриц-функций.

Полагая в равенстве (10) $y = x$, находим

$$K_{j,k}(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty [V_j(t) - V_k(t)]\, dt =$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda| > N} E_j(x, \lambda)[S_k(\lambda) - S_j(\lambda)] E_k^*(x, -\lambda)\, d\lambda. \quad (11)$$

При $\operatorname{Im}\mu > 0$ из определения оператора $(I + \overset{\circ}{K}_{jx})$ следует, что

$$E_j^*(x, \mu) - E_k^*(x, \mu) = \int_x^\infty K_{j,k}^*(x, t)\, e^{-i\bar{\mu}t} dt =$$

$$= -\int_x^\infty (I + \overset{\circ}{K}_{jx}) [\Phi_{j,k})(x, y)] \cdot e^{-i\bar{\mu}t} dt =$$

$$= -\int_x^\infty [e^{i\mu t} + \int_t^\infty K_j(t, \xi)\, e^{i\mu\xi} d\xi]^* \, \Phi_{j,k}(x, t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\lambda| > N} d\lambda \int_x^\infty E_j^*(t, \mu)\, E_j(t, \lambda) [S_k(\lambda)] = S_j(\lambda)]\, E_k^*(x, -\lambda)\, dt. \qquad (12)$$

Поскольку матрица $E_j(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Y'' + \lambda^2 Y = V_j(x)\, Y,$$

то

$$\int_x^\infty E_j^*(t, \mu)\, E_j(t, \lambda)\, dt = \frac{E_j^*(x, \mu)\, E_j'(x, \lambda) - E_j^{*\prime}(x, \mu)\, E_j(x, \lambda)}{\lambda^2 - \bar{\mu}^2},$$

и следовательно,

$$E_j^*(x, \mu) - E_k^*(x, \mu) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\lambda| > N} \frac{E_j^{*\prime}(x, \mu)\, E_j(x, \lambda) - E_j^*(x, \mu)\, E_j'(x, \lambda)}{\lambda^2 - \bar{\mu}^2} [S_k(\lambda) - S_j(\lambda)]\, E_k^*(x, -\lambda)\, d\lambda. \qquad (13)$$

В этом равенстве можно, очевидно, сделать предельный переход при $\mu \to \mu_0$, если вещественное число $\mu_0 \in (-N, N)$. Поэтому формула (13) верна для вещественных $\mu \in (-N, N)$, и мы в дальнейшем будем рассматривать только такие значения μ.

Введем для краткости следующие обозначения ($j = 1, 2$; $k = 1, 2$):

$$\Delta_{j,k}(x, \mu) = E_j(x, \mu) - E_k(x, \mu), \qquad (14)$$

$$A_{j,k}(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\lambda| > N} \frac{E_j(x, \lambda) [S_k(\lambda) - S_j(\lambda)]\, E_k^*(x, -\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} d\lambda, \qquad (15)$$

$$B_{j,k}(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\lambda| > N} \frac{E_j'(x, \lambda) [S_k(\lambda) - S_j(\lambda)]\, E_k^*(x, -\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} d\lambda. \qquad (16)$$

Тогда формулу (13) можно записать так:

$$\Delta_{j,k}^*(x, \mu) = E_j^{*\prime}(x, \mu)\, A_{j,k}(x, \mu) - E_j^*(x, \mu)\, B_{j,k}(x, \mu). \qquad (17)$$

Как известно, матрицы $S(\lambda)$ удовлетворяют соотношению $S^*(\lambda) = S(-\lambda)$ [3, стр. 44, формула (2. 3. 4)], используя которое находим, что

$$A_{j,k}^*(x, \mu) + A_{k,j}(x, \mu) = 0, \qquad (18)$$

$$B_{j,k}^*(x, \mu) + B_{k,j}(x, \mu) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\lambda| > N} \frac{E_k'(x, \lambda) [S_j(\lambda) - S_k(\lambda)]\, E_j^*(x, -\lambda) - E_k(x, \lambda) [S_j(\lambda) - S_k(\lambda)]\, E_j^{*\prime}(x, -\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} d\lambda. \qquad (19)$$

Имеем далее

$$\Delta_{1,2}^*(x, \mu)\Delta_{1,2}(x, \mu) = \Delta_{1,2}^*(x, \mu) E_1(x, \mu) - \Delta_{1,2}^*(x, \mu) E_2(x, \mu) =$$
$$= -\Delta_{2,1}^*(x, \mu) E_1(x, \mu) - \Delta_{1,2}^*(x, \mu) E_2(x, \mu),$$

откуда согласно формуле (17) следует

$$\Delta_{1,2}^*(x, \mu)\cdot\Delta_{1,2}(x, \mu) = -E_2^{*\prime}(x, \mu) A_{2,1}(x, \mu) E_1(x, \mu) +$$
$$+ E_2^*(x, \mu) B_{2,1}(x, \mu) E_1(x, \mu) - E_1^{*\prime}(x, \mu) A_{1,2}(x, \mu) E_2(x, \mu) +$$
$$+ E_1^*(x, \mu) B_{1,2}(x, \mu) E_2(x, \mu).$$

Сложив это равенство с равенством, получающимся из него переходом к сопряженным матрицам, получим

$$2\Delta_{1,2}^*(x, \mu)\Delta_{1,2}(x, \mu) = T_1 + T_1^* + T_2 + T_2^*, \tag{20}$$

где

$$T_1 = -E_2^{*\prime}(x, \mu) A_{2,1}(x, \mu) E_1(x, \mu) - E_2^*(x, \mu) A_{1,2}^*(x, \mu) E_1'(x, \mu),$$
$$T_2 = E_2^*(x, \mu)[B_{2,1}(x, \mu) + B_{1,2}^*(x, \mu)] E_1(x, \mu).$$

Формулы для матриц T_1 и T_2 нам удобнее записать в таком виде:

$$T_1 = E_2^*(y, \mu) A_{2,1}(x, \mu) E_1'(y, \mu) - E_2^{*\prime}(y, \mu) A_{2,1}(x, \mu) E_1(y, \mu)\big|_{y=x}, \tag{21}$$
$$T_2 = E_2^*(x, \mu)[B_{2,1}(y, \mu) + B_{1,2}^*(y, \mu)] E_1(x, \mu)\big|_{y=x}. \tag{22}$$

(В формуле (21) учтено, что согласно (18) $A_{1,2}^*(x, \mu) = -A_{2,1}(x, \mu)$).

Из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют матрицы $E_i(y, \mu)$ следует, что

$$E_2^*(y, \mu) A_{2,1}(x, \mu) E_1'(y, \mu) - E_2^{*\prime}(y, \mu) A_{2,1}(x, \mu) E_1(y, \mu) =$$
$$= \int_y^\infty E_2^*(t, \mu)[V_2(t) A_{2,1}(x, \mu) - A_{2,1}(x, \mu) V_1(t)] E_1(t, \mu)\, dt$$

и

$$T_1 = \int_x^\infty E_2^*(t, \mu)[V_2(t) A_{2,1}(x, \mu) - A_{2,1}(x, \mu) V_1(t)] E_1(t, \mu)\, dt. \tag{23}$$

Из формулы (19) аналогичным образом находим, что

$$B_{2,1}(y, \mu) + B_{1,2}^*(y, \mu) = \int_y^\infty [A_{1,2}(t, \mu) V_2(t) - V_1(t) A_{1,2}(t, \mu)]\, dt$$

и

$$T_2 = \int_x^\infty E_2^*(x, \mu)[A_{1,2}(t, \mu) V_2(t) - V_1(t) A_{1,2}(t, \mu)] E_1(x, \mu)\, dt. \tag{24}$$

Из формул (11), (20), (23) и (24) вытекает следующая основная для дальнейшего.

Теорема 1.1. *Если данные рассеяния на потенциалах $V_1(x)$ и $V_2(x)$ совпадают при всех $\lambda^2 < N^2$, то*

$$\int_x^\infty [V_1(t) - V_2(t)]\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} E_1(x, \lambda)[S_1(\lambda) - S_2(\lambda)] E_2^*(x, -\lambda)\, d\lambda,$$

$$2(E_1^*(x,\mu)-E_2^*(x,\mu))(E_1(x,\mu)-E_2(x,\mu))=(T_1+T_2)+(T_1+T_2)^*,$$

где матрицы T_1 *и* T_2 *определены формулами* (23), (24), *причем содержащиеся в них матрицы* $A_{1,2}(x,\mu)$ *и* $A_{2,1}(x,\mu)$ *определены формулой* (15).

Теперь нам нужно оценить норму матриц $E_j(x,\lambda)$.

Лемма 2. *Если матрица* $V(x)$ *принадлежит классу* $V_{\alpha(x)}$, *то для решения* $E(x,\lambda)$ *соответствующего матричного дифференциального уравнения имеет место такая оценка:*

$$|E(x,\lambda)|\leqslant \exp\beta(x,\lambda),\quad (-\infty<\lambda<+\infty),\tag{25}$$

где

$$\beta(x,\lambda)=\alpha_1(x)-\alpha_1\left(x+\frac{1}{|\lambda|}\right),\quad \alpha_1(x)=\int\limits_x^\infty \alpha(t)\,dt.\tag{26}$$

Доказательство. Матрица-функция $E(x,\lambda)$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$E(x,\lambda)=e^{i\lambda x}I+\int\limits_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}V(t)\,E(t,\lambda)\,dt,\tag{27}$$

которое может быть решено методом последовательных приближений. Поэтому

$$|E(x,\lambda)|\leqslant 1+\int\limits_x^\infty\left|\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}\right||V(t)||E(t,\lambda)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 1+\int\limits_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}}(t-x)|V(t)||E(t,\lambda)|\,dt+\frac{1}{|\lambda|}\int\limits_{x+\frac{1}{|\lambda|}}^\infty|V(t)||E(t,\lambda)|\,dt=$$

$$=1+\int\limits_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}}d\xi\int\limits_\xi^\infty|V(t)||E(t,\lambda)|\,dt,$$

т. е.

$$|E(x,\lambda)|\leqslant 1+\int\limits_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}}d\xi\int\limits_\xi^\infty|V(t)||E(t,\lambda)|\,dt.$$

Итерируя это неравенство, находим, что

$$|E(x,\lambda)|\leqslant\sum_{n=0}^\infty a_n(x,\lambda),\tag{28}$$

где

$$a_0(x,\lambda)=1;\quad a_n(x,\lambda)=\int\limits_x^{x+\frac{1}{|\lambda|}}d\xi\int\limits_\xi^\infty|V(t)|\,a_{n-1}(t,\lambda)\,dt.$$

Покажем, что

$$a_n(x,\lambda)\leqslant\frac{\left[\alpha_1(x)-\alpha_1\left(x+\frac{1}{|\lambda|}\right)\right]^n}{n!}.\tag{29}$$

Это неравенство верно при $n = 0$, и если оно верно для n, то

$$a_{n+1}(x, \lambda) \leqslant \int\limits_{x}^{x+\frac{1}{|\lambda|}} d\xi \int\limits_{\xi}^{\infty} |V(t)| \frac{\left\{\alpha_1(t) - \alpha_1\left(t + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right\}^n}{n!} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{x}^{x+\frac{1}{|\lambda|}} \frac{\left[\alpha_1(\xi) - \alpha_1\left(\xi + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right]^n}{n!} \alpha(\xi)\, d\xi = \varphi_n(x).$$

Имеем далее $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ и

$$\varphi_n'(x) = -\frac{\left[\alpha_1(x) - \alpha_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right]^n}{n!} \alpha(x) + \frac{\left[\alpha_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right) - \alpha_1\left(x + \frac{2}{|\lambda|}\right)\right]^n}{n!} \alpha\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right) =$$

$$= -\frac{\left[\alpha_1(x) - \alpha_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right]^n}{n!} \left[\alpha(x) - \alpha\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right] -$$

$$- \frac{\alpha\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)}{n!} \left\{\left[\alpha_1(x) - \alpha_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right]^n - \left[\alpha_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right) - \alpha_1\left(x + \frac{2}{|\lambda|}\right)\right]^n\right\}.$$

Поэтому

$$\varphi_n'(x) \geqslant \frac{-\left[\alpha_1(x) - \alpha_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right]^n}{n!} \left[\alpha(x) - \alpha\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right],$$

откуда, вспоминая определение $\alpha_1(x)$, находим, что

$$\varphi_n'(x) \geqslant \left\{\frac{\left[\alpha_1(x) - \alpha_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right]^{n+1}}{(n+1)!}\right\}'.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку (x, ∞), получим

$$-\varphi_n(x) \geqslant -\frac{\left[\alpha_1(x) - \alpha_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Следовательно,

$$a_{n+1}(x, \lambda) \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \frac{\left[\alpha_1(x) - \alpha_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right)\right]^{n+1}}{(n+1)!},$$

откуда и вытекает справедливость неравенства (29) при всех n. Доказываемое неравенство (25) немедленно вытекает из неравенств (28), (29).

Формула (20) и полученные неравенства для норм матриц $E_j(x, \lambda)$ позволяют оценить норму матрицы

$$(E_1^*(x, \mu) - E_2^*(x, \mu)(E_1(x, \mu) - E_2(x, \mu)).$$

Действительно, согласно формуле (20) имеем

$$|(E_1^*(x, \mu) - E_2^*(x, \mu))(E_1(x, \mu) - E_2(x, \mu)| \leqslant |T_1| + |T_2|. \qquad (30)$$

Воспользовавшись соотношением (23), определяющим матрицу T_1, и неравенством (25), оценим норму $|T_1|$ матрицы T_1:

$$|T_1| \leqslant \int_x^\infty |E_2^*(t, \mu)| [|V_2(t)|| A_{2,1}(x, \mu)| +$$

$$+ |A_{2,1}(x, \mu)|| V_1(t)|] |E_1(t, \mu)| dt \leqslant \exp 2\beta(x, \mu) |A_{2,1}(x, \mu)| \cdot 2\alpha(x).$$

Согласно формуле (15)

$$A_{2,1}(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda|>N} \frac{E_2(x, \lambda)[S_1(\lambda) - S_2(\lambda)] E_1^*(x, -\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} d\lambda,$$

поэтому, учитывая, что $|S_1(\lambda)| = |S_2(\lambda)| = 1$, получим

$$|A_{2,1}(x, \mu)| \leqslant \frac{2}{\pi} \exp 2\beta(x, N) \int_N^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 - \mu^2} \leqslant \frac{2}{\pi} \cdot \exp 2\beta(x, N) \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu^2}{N^2}\right) N}.$$

Таким образом,

$$|T_1| \leqslant \frac{4}{\pi} \exp 2\{\beta(x, \mu) + \beta(x, N)\} \frac{1}{1 - \frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \alpha(x). \tag{31}$$

Аналогичным образом, возвращаясь к формуле (24), оценим норму $|T_2|$ матрицы T_2:

$$|T_2| \leqslant \int_x^\infty |E_2^*(x, \mu)| [|A_{1,2}(t, \mu)|| V_2(t)| +$$

$$+ |V_1(t)|| A_{1,2}(t, \mu)|] |E_1(x, \mu)| dt \leqslant \exp 2\beta(x, \mu) \times$$

$$\times \frac{2}{\pi} \exp 2\beta(x, N) \frac{1}{1 - \frac{\mu^2}{N^2}} \frac{1}{N} \cdot 2\alpha(x) =$$

$$= \frac{4}{\pi} \exp 2[\beta(x, \mu) + \beta(x, N)] \frac{1}{1 - \frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \alpha(x). \tag{32}$$

Объединяя неравенства (30), (31), (32), имеем

$$|(E_1^*(x, \mu) - E_2^*(x, \mu))(E_1(x, \mu) - E_2(x, \mu))| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{\pi} \exp 2[\beta(x, \mu) + \beta(x, N)] \frac{1}{1 - \frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \alpha(x). \tag{33}$$

Обозначим через $U_j(x, \mu)$ $(j = 1, 2)$ нормированные собственные матрицы-функции рассматриваемых краевых задач. Так как при $\mu \in (-N, N)$

$$U_j(x, \mu) = E^j(x, \mu) - S_j(-\mu) E_j(x, -\mu),$$

а $S_1(-\mu) = S_2(-\mu)$ по предположению, то

$$|U_1(x, \mu) - U_2(x, \mu)| \leqslant 2 |E_1(x, \mu) - E_2(x, \mu)|,$$

откуда в силу неравенства (33) следует

Теорема 2. *Если данные рассеяния на потенциалах, принадлежащих классу $V_{\alpha(x)}$, совпадают при всех $\lambda^2 < N^2$, то нормированные собственные* *матрицы-функции этих краевых задач при всех* $\mu \in (-N, N)$ *могут быть оценены по норме следующим образом:*

$$|U_1(x, \mu) - U_2(x, \mu)|^2 \leqslant \frac{32}{\pi} \cdot \exp 2[\beta(x, \mu) + \beta(x, N)] \frac{\alpha(x)}{\left(1 - \frac{\mu^2}{N^2}\right) N}. \quad (34)$$

Непосредственным следствием этого факта является

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2, то при всех* $\mu \in (-N, N)$ *справедливо неравенство*

$$\left\{\int_0^\infty |U_1(x, \mu) - U_2(x, \mu)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 4e^{2\alpha_1(0) - \alpha_1\left(\frac{1}{N}\right)} \sqrt{\frac{2\alpha_1(0)}{\pi N\left(1 - \frac{\mu^2}{N^2}\right)}}. \quad (35)$$

Для оценки разности потенциальных матриц нам понадобится более точная аппроксимация решений $E_j(x, \lambda)$.

Используя уравнение (27), которому удовлетворяют матрицы-функции $E_i(x, \lambda)$, и неравенство (25), находим, что

$$|E_j(x, \lambda) - e^{i\lambda x} I| \leqslant \frac{\alpha(x) e^{\beta(x, \lambda)}}{|\lambda|}. \quad (36)$$

Итерируя один раз уравнение (27) и снова воспользовавшись неравенством (25), получим

$$|E_j(x, \lambda) - e^{i\lambda x} I - \int_x^\infty \frac{\sin \lambda (t - x)}{\lambda} V_j(t) e^{i\lambda t} dt| \leqslant \frac{\alpha^2(x) e^{\beta(x, \lambda)}}{2\lambda^2}. \quad (37)$$

Применяя неравенства (25), (36), (37), можно показать, что

$$E_1(x, \lambda)[S_1(\lambda) - S_2(\lambda)] E_2^*(x, -\lambda) =$$
$$= e^{2i\lambda x}[S_1(\lambda) - S_2(\lambda)] + [S_1(\lambda) - S_2(\lambda)] \int_x^\infty Q_2(\xi) e^{2i\lambda\xi} d\xi +$$
$$+ \int_x^\infty Q_1(\xi) e^{2i\lambda\xi} d\xi \cdot [S_1(\lambda) - S_2(\lambda)] + R_1(\lambda, x), \quad (38)$$

где

$$Q_j(x) = \int_x^\infty V_j(t) dt, \quad (39)$$

а

$$|R_1(\lambda, x)| \leqslant \frac{4\alpha^2(x) e^{2\beta(x, \lambda)}}{\lambda^2}. \quad (39')$$

Отсюда следует, что

$$\int_x^\infty [V_1(t) - V_2(t)] dt = P_1(x) + \frac{1}{\pi} \int_{|\lambda| > N} \Big\{[S_1(\lambda) - S_2(\lambda)] (e^{2i\lambda x} +$$
$$+ \int_x^\infty Q_2(\xi) e^{2i\lambda\xi} d\xi) + \int_x^\infty Q_1(\xi) e^{2i\lambda\xi} d\xi \cdot [S_1(\lambda) - S_2(\lambda)]\Big\} d\lambda, \quad (40)$$

причем согласно неравенству (39′)

$$|P_1(x)| \leqslant \frac{8}{\pi}\alpha^2(x)\, e^{2\beta(x,\,N)} \cdot \frac{1}{N}. \tag{41}$$

Поскольку дальнейшие выкладки мало отличаются от соответствующих выкладок работы [2], часть из них будет опущена.

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям:

$$1)\ \int_0^\infty \varphi(t)\,dt = 1;\quad 2)\ \varphi(t) \geqslant 0;\quad 3)\ \varphi(t) = 0 \text{ при } t\,\overline{\in}\,(x,\ x+h).$$

Имея в виду получение оценки для нормы $|V_1(t) - V_2(t)|$ матрицы $[V_1(t) - V_2(t)]$, умножим обе части равенства (40) на $\varphi'(x)$ и проинтегрируем по полуоси $(0\ \infty)$. Выполнив нужное число раз интегрирование по частям, получим

$$\int_0^\infty [V_1(t) - V_2(t)]\,\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty P_1(t)\,\varphi'(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} d\lambda\,[S_1(\lambda) - S_2(\lambda)] \times$$
$$\times\left[-2i\lambda\tilde{\varphi}(-2\lambda) - \frac{1}{2i\lambda}\int_0^\infty [\varphi'(t)\,Q_2(t) + \varphi(t)\,Q_2'(t)]\,e^{2i\lambda t}\,dt\right] -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} \frac{1}{2i\lambda}\int_0^\infty [\varphi'(t)\,Q_1(t) + \varphi(t)\,Q_1'(t)]\,e^{2i\lambda t}\,dt \cdot [S_1(\lambda) - S_2(\lambda)]\,d\lambda, \tag{42}$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ — обычное преобразование Фурье функции $\varphi(t)$:

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt.$$

Полагая

$$\psi_j(t) = \varphi'(t)\,[Q_j(t) - Q_j(x)] + \varphi(t)\,[Q_j'(t) - Q_j'(x)], \tag{43}$$

находим

$$\int_0^\infty [V_1(t) - V_2(t)]\,\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty P_1(t)\,\varphi'(t)\,dt -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} [S_1(\lambda) - S_2(\lambda)]\,\frac{\tilde{\psi}_2(-2\lambda)}{2i\lambda}\,d\lambda - \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} \frac{\tilde{\psi}_1(-2\lambda)}{2i\lambda}\,[S_1(\lambda) - S_2(\lambda)]\,d\lambda -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} [S_1(\lambda) - S_2(\lambda)] \cdot 2i\lambda\tilde{\varphi}(-2\lambda)\left[1 - \frac{1}{2i\lambda}\,Q_2(x) - \frac{Q_2'(x)}{4\lambda^2}\right]d\lambda +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} 2i\lambda\tilde{\varphi}(-2\lambda)\left[\frac{Q_1(x)}{2i\lambda} + \frac{Q_1'(x)}{4\lambda^2}\right][S_1(\lambda) - S_2(\lambda)]\,d\lambda. \tag{44}$$

Предположим, что потенциалы $V_1(x)$, $V_2(x)$ непрерывны в точке x. Тогда функция

$$\omega_x(h) = \max_{j=1,\,2}\ \max_{t\in(0,\,h)} |V_j(x+t) - V_j(x)| \tag{45}$$

стремится к нулю при $h \to 0$.

Из свойства функции $\varphi(t)$ и определения величины $\omega_x(h)$ следует, что

$$\left|\int_0^\infty [V_1(t)-V_2(t)]\,\varphi(t)\,dt-[V_1(x)-V_2(x)]\right|\leqslant 2\omega_x(h). \tag{46}$$

Из оценки (41) следует, что

$$\left|\int_0^\infty P_1(t)\,\varphi'(t)\,dt\right|\leqslant \frac{8}{\pi}\,\alpha^2(x)\,e^{2\beta(x,\,N)}\cdot\frac{1}{N}\int_0^\infty|\varphi'(t)|\,dt. \tag{47}$$

Имеем далее

$$\left|-\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N}[S_1(\lambda)-S_2(\lambda)]\cdot 2i\lambda\tilde{\varphi}(-2\lambda)\left[1-\frac{1}{2i\lambda}Q_2(x)-\frac{1}{4\lambda^2}Q_2'(x)\right]d\lambda+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N}2i\lambda\tilde{\varphi}(-2\lambda)\left[\frac{1}{2i\lambda}Q_1(x)+\frac{1}{4\lambda^2}Q_1'(x)\right][S_1(\lambda)-S_2(\lambda)]\,d\lambda\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{|\mu|>2N}|\mu\cdot\tilde{\varphi}(-\mu)|\,d\mu\left[1+\frac{|Q_1(x)|+|Q_2(x)|}{2N}+\frac{|Q_1'(x)|+|Q_2'(x)|}{4N^2}\right]. \tag{48}$$

Покажем, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N}[S_1(\lambda)-S_2(\lambda)]\,\frac{\tilde{\psi}_i(-2\lambda)}{2i\lambda}\,d\lambda\right|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi N}}\cdot\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_i(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{49}$$

для чего рассмотрим произвольную матрицу $C=\int_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)\,B(\lambda)\,d\lambda$. Как легко видеть, какими бы ни были единичные векторы a, b имеем

$$|(Ca,\,b)|=\left|\left(\int_{-\infty}^{+\infty}A(\lambda)\,B(\lambda)\,d\lambda\,a,\;b\right)\right|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(A(\lambda)\,B(\lambda)\,a,\,b)\,d\lambda\right|=$$
$$=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}(B(\lambda)\,a,\;A^*(\lambda)\,b)\,d\lambda\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|B(\lambda)\,a|\cdot|A^*(\lambda)\,b|\,d\lambda\leqslant\right.$$
$$\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|B(\lambda)\,a|^2\,d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|A^*(\lambda)\,b|^2\,d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(B^*(\lambda)\,B(\lambda)\,a,\,a)\,d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|A(\lambda)|^2\,d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left(2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}(B^*(t)\,B(t)\,a,a)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|A(\lambda)|^2\,d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant\left(2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|B(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|A(\lambda)|^2\,d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Полагая

$$A(\lambda)=\frac{S_1(\lambda)-S_2(\lambda)}{2\pi i\lambda},\quad B_i(\lambda)=\tilde{\psi}_i(-2\lambda)$$

и учитывая, что $|S_1(\lambda)|=|S_2(\lambda)|=1$, получим доказываемое неравенство (49).

Из формул (45), (39) следует, что

$$\max_{x\leqslant t\leqslant x+h} |Q_j'(t)-Q_j'(x)|\leqslant \omega_x(h),$$

$$\max_{x\leqslant t\leqslant x+h} |Q_j(t)-Q_j(x)|\leqslant \{|Q_j'(x)|+\omega_x(h)\}\cdot h,$$

откуда согласно (43) получим

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_i(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\int_{x}^{x+h}|\psi_i(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{|Q_i'(x)|+\omega_x(h)\right\}h\left\{\int_0^\infty|\varphi'(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}+\omega_x(h)\left\{\int_0^\infty|\varphi(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (50)$$

Возвращаясь к формуле (44) и учитывая оценки (46), (47), (48), (49), (50) получим основное неравенство

$$|V_1(x)-V_2(x)|\leqslant 2\omega_x(h)+\frac{8\alpha^2(x)\,e^{2\beta(x,\,N)}}{\pi N}\int_0^\infty|\varphi'(t)|\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[1+\frac{|Q_1(x)|+|Q_2(x)|}{2N}+\frac{|Q_1'(x)|+|Q_2'(x)|}{4N^2}\int_{|\mu|>2N}|\mu\tilde{\varphi}(-\mu)|\,d\mu+\right.$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi N}}[|Q_1'(x)|+|Q_2'(x)|+2\omega_x(h)]\cdot h\cdot\left\{\int_0^\infty|\varphi'(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.+2\omega_x(h)\left\{\int_0^\infty|\varphi(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (51)$$

Выбирая $\varphi(t)$ так, как это сделано в работе [2], и полагая $h=N^{-\frac{1}{3}}$, в частности, можно получить такую оценку:

$$|V_1(x)-V_2(x)|\leqslant 2\omega_x\left(N^{-\frac{1}{3}}\right)+12N^{-\frac{1}{3}}\left\{|Q_1'(x)|+|Q_2'(x)|+\right.$$

$$\left.+4\omega_x\left(N^{-\frac{1}{3}}\right)\right\}+2^6\,N^{-\frac{2}{3}}\left\{\alpha^2(x)\,e^{2\beta(x,\,N)}+8+4N^{-1}[|Q_1(x)|+\right.$$

$$\left.+|Q_2(x)|]+2N^{-2}[|Q_1'(x)|+|Q_2'(x)|]\right\}. \qquad (52)$$

Следствием этого неравенства является

Теорема 4. *Пусть потенциальные матрицы* $V_1(x)$, $V_2(x)$ *принадлежат классу* $V_{\alpha(x)}$ *и дифференцируемы в интервале* $\left(x,\ x+N^{-\frac{1}{3}}\right)$, *причем*

$$\max_{i=1,\,2}\ \max_{t\in\left(0,\,N^{-\frac{1}{3}}\right)}|V_i'(x+t)|=A(x).$$

Тогда, если данные рассеяния на этих потенциалах совпадают при всех $\lambda^2<N^2$, то

$$|V_1(x)-V_2(x)|\leqslant N^{-\frac{1}{3}}\left\{2A(x)+12[|Q_1'(x)|+|Q_2(x)|]+48A(x)\,N^{-\frac{1}{3}}\right\}+$$

$$+2^6\cdot N^{-\frac{2}{3}}\left\{\alpha^2(x)\,e^{2\beta(x,\,N)}+8+4N^{-1}[|Q_1(x)|+|Q_2(x)|]+\right.$$

$$\left.+2N^{-2}[|Q_1'(x)|+|Q_2'(x)|]\right\}, \qquad (53)$$

где

$$Q_j(x) = \int_x^\infty V_j(t)\,dt,$$

и следовательно,

$$|Q_1(x)| + |Q_2(x)| \leqslant 2\alpha(x).$$

Теоремы 1—4 решают вопрос об устойчивости обратной задачи теории рассеяния в классе потенциалов $V_{\alpha(x)}$. Заметим, что все приведенные рассуждения остаются в силе, если не накладывать ограничений на возможный рост потенциалов вблизи нуля. В частности, возможность представления оператора $(I+F)^{-1}$ в виде

$$(I+F)^{-1} = (I+\overset{\circ}{K})(I+K)$$

определяется условиями 1)—3) (см. [3, стр. 94]), которые накладывают априорные ограничения на матрицу $K(x, y)$ лишь в области $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant y < \infty$. Но в более широком классе потенциалов, имеющих сильные особенности вблизи нуля (функция $\alpha(x)$ определяющая класс $V_{\alpha(x)}$, не суммируема в окрестности нуля), теорема 3 теряет смысл.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. А. Марченко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко. Устойчивость обратной задачи теории рассеяния. «Матем. сб.», т. 77 (119) : 2, 1968.
2. Д. Ш. Лундина и В. А. Марченко. Уточнение оценок, характеризующих устойчивость обратной задачи теории рассеяния. «Матем. сб.», т. 78 (120) : 4, 1969.
3. З. С. Агранович и В. А. Марченко. Обратная задача теории рассеяния. Изд-во ХГУ, Харьков, 1960.

Поступила 26 мая 1969 г.