Выпуск 11 1970

# ПРИМАРНЫЕ ИДЕАЛЫ АЛГЕБРЫ $W_+$

*Г. М. Фельдман*

Пусть $W_+$ — банахова алгебра аналитических в единичном круге функций $f(z)$ с абсолютно сходящимися рядами Тейлора

$$f(z)=\sum_{k\geqslant 0} c_k z^k \tag{1}$$

и нормой

$$\|f\|=\sum_{k\geqslant 0}|c_k|.$$

В настоящей работе описываются примарные идеалы этой алгебры. Как известно, алгебра $W_+$ является дискретным аналогом алгебры $L_+(R)$, примарные идеалы в которой были описаны В. П. Гурарием в работе [1].

Пространством максимальных идеалов алгебры $W_+$ является замкнутый единичный круг $|z|\leqslant 1$.

Обозначим через $M(z)$ максимальный идеал, соответствующий точке $z$.

При описании примарных идеалов $W_+$ рассмотрим отдельно два случая:

1. Примарные идеалы содержатся в максимальном, которому отвечает точка $|z_0|<1$.

2. Примарные идеалы содержатся в максимальном, которому отвечает точка $|z_0|=1$.

*Случай 1.* Пусть $|z_0|<1$. Введем в рассмотрение множества

$$I_k(z_0)=\{f\in W_+ : f^{(j)}(z_0)=0,\ j=0,1,\ \dots\ k\}.$$

Очевидно, что $I_k(z_0)=(z-z_0)^k W_+$. Множества $I_k(z_0)$ образуют упорядоченную по включению цепочку примарных идеалов. Покажем, что эта цепочка максимальна, т. е. любой примарный идеал, содержащийся в $M(z_0)$, совпадает с одним из $I_k(z_0)$. Пусть $I=\{f_\alpha\}$ — примарный идеал. Единственной точкой, в которой все $f_\alpha$ обращаются в ноль, является $z_0$. Это значит, что существует $k$ такое, что

$$f_\alpha(z)=(z-z_0)^k \varphi_\alpha(z),$$

где $\{\varphi_\alpha\}$ уже одновременно не обращаются в ноль ни в одной точке. Очевидно также, что $\{\varphi_\alpha\}$ образует идеал. Так как он не содержится ни в одном максимальном идеале, то

$$\{\varphi_\alpha\}=W_+ \text{ и } I=(z-z_0)^k W_+, \text{ т. е. } I=I_k(z_0).$$

*Случай 2.* Пусть $z_0=e^{i\theta}$. Введем в рассмотрение множества

$$I_\alpha(\theta)=\{f\in W_+ : \sum_{k\geqslant 0} c_k e^{ik\theta} g_k=0\ \ \forall g\in B_{1/2,\,\alpha}\},$$

где через $B_{1/2,\alpha}$ обозначен класс ограниченных последовательностей, таких что

$$g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty} \in B_{1/2,\alpha} \Leftrightarrow \exists A_g(z),$$

целая функция порядка $1/2$ типа $\leqslant \alpha$ такая, что

$$g_k = A_g(k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отметим теперь некоторые из свойств $I_\alpha(\theta)$.

1. Отображение $f(z) \to f(ze^{-i\theta})$ осуществляет изоморфизм между $I_\alpha(\theta)$ и $I_\alpha(0) = I_\alpha$. Это простое соображение позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением $I_\alpha$.

2. $I_\alpha$ — замкнутый идеал, содержащийся в $M(1) = I_0$. Замкнутость $I_\alpha$ очевидна. Чтобы показать, что $I_\alpha$ идеал, достаточно проверить, что $\forall k \geqslant 0$ $z^k f(z) \in I_\alpha$, если $f(z) \in I_\alpha$. Заметим, что если $\{g_k\}_{k=0}^{\infty} \in B_{1/2,\alpha}$, то $\forall n \geqslant 0$ $\{g_{k+n}\}_{k=0}^{\infty} \in B_{1/2,\alpha}$, так как последовательность $\{g_{k+n}\}_{k=0}^{\infty}$ интерполируется функцией $A_g(z+n)$, которая имеет тот же порядок и тип, что и функция $A_g(z)$. Итак, $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k g_{k+n} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, но это в точности означает, что $z^k f(z) \in I_\alpha$. Поскольку последовательность, тождественно равная единице, принадлежит $B_{1/2,\alpha} \forall \alpha$, то $\forall f \in I_\alpha$ $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k = 0$, т. е. $I_\alpha \subset M(1)$, а так как целая функция порядка $1/2$ минимального типа, ограниченная в точках $\{0, 1, 2, \ldots\}$, есть константа, то $I_0 = M(1)$.

3. Если $\alpha < \beta$ то $I_\alpha \supset I_\beta$, причем включение строгое.

4. Для каждой точки $z \neq 1$ и для каждого $\alpha$ существует $f$ из $I_\alpha$ такая, что $f(z) \neq 0$.

Свойства 3 и 4 могут быть доказаны непосредственно, но мы получим их как простые следствия леммы 4.

Пусть $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ограниченная последовательность. Обозначим

$$I_g = \{f \in W_+ : \sum_{k\geqslant 0} c_k g_{k+n} = 0 \ \forall n \geqslant 0\}.$$

Положим
$$h_k = \sum_{n\geqslant 0} c_n g_{k+n}, \quad H_f(z) = \sum_{k\geqslant 0} h_{-k} z^k \quad (|z| < 1) \tag{2}$$

и

$$G^+(z) = \sum_{k\geqslant 0} g_k z^{-k} \quad (|z| > 1). \tag{3}$$

Заметим теперь, что отношение $H_f(z)/f(z)$ не зависит от $f(z) \in I_g$. Действительно, пусть $f_1, f_2 \in I_g$,

$$f_1(z) = \sum_{k\geqslant 0} c_k^{(1)} z^k, \quad f_2(z) = \sum_{k\geqslant 0} c_k^{(2)} z^k;$$

$$f_2(z) H_{f_1}(z) = \Big(\sum_{k\geqslant 0} c_k^{(2)} z^k\Big)\Big(\sum_{k\geqslant 0} h_{-k}^{(1)} z^k\Big) = \sum_{m\geqslant 0} A_m^{(1)} z^m,$$

$$f_1(z) H_{f_2}(z) = \Big(\sum_{k\geqslant 0} c_k^{(1)} z^k\Big)\Big(\sum_{k\geqslant 0} h_{-k}^{(2)} z^k\Big) = \sum_{m\geqslant 0} A_m^{(2)} z^m,$$

$$A_m^{(1)} = \sum_{k=0}^{m} c_k^{(2)} h_{-(m-k)}^{(1)} = \sum_{k\geqslant 0} c_k^{(2)} h_{k-m}^{(1)} =$$

$$= \sum_{k\geqslant 0} c_k^{(2)} \sum_{n\geqslant 0} c_n^{(1)} g_{k+n-m} = \sum_{k=0}^{m} g_k \sum_{p+q=m+k} c_p^{(1)} c_q^{(2)}.$$

Перестановка порядка суммирования здесь законна, так как последовательность $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ ограничена, а последовательности $\{c_k^{(1)}\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{c_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$ суммируемы.

Аналогично получим, что $A_m^{(2)} = \sum_{k=0}^{m} g_k \sum_{p+q=m+k} c_p^{(1)} c_q^{(2)}$, и таким образом, $A_m^{(1)} = A_m^{(2)}$. Мы получили $f_2 H_{f_1} = f_1 H_{f_2}$, а отсюда немедленно следует, что отношение $H_f(z)/f(z)$ не зависит от выбора $f$ из $I_g$.

**Лемма 1.** *Пусть $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ограниченная последовательность, $f \in I_g$. Функция $G(z)$*

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z), & |z| > 1, \\ H_f(z)/f(z), & |z| < 1, \end{cases}$$

*где $f(z)$, $H_f(z)$ и $G^+(z)$ определены в (1)—(3), может быть доопределена до функции, аналитической в дополнении к $M_g$, где $M_g = \{z : f(z) = 0 \ \forall f \in I_g\}$.*

Доказательство. В случае, когда $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ суммируема, а не только ограничена, лемма 1 доказывается легко. Тогда у $G^+(z)$ и $H_f(z)$ существуют предельные значения на окружности и

$$G^+(e^{it}) f(e^{it}) = \left(\sum_{k\geqslant 0} g_k e^{-ikt}\right)\left(\sum_{k\geqslant 0} c_k e^{ikt}\right) = \sum_{k\geqslant 0} h_{-k} e^{ikt} = H_f(e^{it}).$$

Это значит, что вне $M_g$ $G^+(e^{it}) = H_f(e^{it})/f(e^{it})$.

Лемма доказана.

В том случае, когда $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ только ограничена, доказательство значительно сложнее. В своей существенной части оно опирается на следующую теорему.

**Теорема** (Н. Левинсон) [2]. *Пусть $M(y)$ — положительная монотонно убывающая функция в интервале $(0, 1)$ и $M(y) \to \infty$ при $y \to 0$.*

*Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в прямоугольнике $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ $(z = x + iy)$, и в этом прямоугольнике справедливо неравенство*

$$|f(z)| < M(y).$$

Если

$$\int_0^1 \ln \ln M(y)\, dy < \infty,$$

то существует постоянная $C$, зависящая только от $M(y)$ и $\delta > 0$, такая что в прямоугольнике $|x| \leqslant a - \delta$, $|y| \leqslant B$ выполняется неравенство

$$|f(z)| < C.$$

Перейдем к доказательству леммы.

Рассмотрим $\{K_n(x)\}$ — последовательность функций из $W$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $K_n(-x) = K_n(x)$.
2. $K_n(x) \geqslant 0$.
3. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx = 1$.
4. $K_n(x) = 0 \quad \left(|x| \geqslant \frac{1}{n}\right)$.

Пусть

$$K_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(n)} e^{ikx}. \tag{4}$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Действительно,

$$|1 - a_k^{(n)}| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, e^{-ikx}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} K_n(x)\, |1 - e^{-ikx}|\, dx \leqslant \max_{|x| \leqslant \frac{1}{n}} |1 - e^{-ikx}|,$$

то, очевидно, $\max\limits_{|x|\leqslant\frac{1}{n}} |1 - e^{-ikx}| \to 0$ при $n \to \infty$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)} = 1$.

Пусть $\theta_0$ таково, что $f(e^{i\theta_0}) \neq 0$ для некоторой $f \in I_g$. Положим для простоты, что $\theta_0 = 0$. Нам нужно доказать, что $G(z)$ аналитична в окрестности $z = 1$.

Для этого рассмотрим область

$$S_{\delta, h} = \{re^{it} : |t| \leqslant 2\delta,\ 1 - h \leqslant r \leqslant 1 + h\},$$

а также области

$$S_{\delta', h} = \{re^{it} : |t| \leqslant \delta,\ 1 - h \leqslant r \leqslant 1 + h\},$$
$$S^1_{\delta', h} = \{re^{it} : |t| \leqslant \delta,\ 1 < r \leqslant 1 + h\},$$
$$S^2_{\delta', h} = \{re^{it} : |t| \leqslant \delta,\ 1 - h \leqslant r < 1\}.$$

Мы построим последовательность функций, аналитических в $S_{\delta', h}$, так, чтобы на каждом компакте в $S^1_{\delta', h}$ и $S^2_{\delta', h}$ она сходилась соответственно к $G^+(z)$ и к $H_f(z)/f(z)$

Пусть $|f(z)| \geqslant c,\ z \in S_{\delta, h}$.

Рассмотрим функцию

$$b_n(r, \theta, t) = \frac{K_n(t - \theta)}{f(re^{it})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n, k}(r, \theta)\, e^{ikt}, \tag{5}$$

где $|\theta| < \delta$, а $n > 2/\delta$. По локальной теореме Винера [5, стр. 11, 6, стр. 223] $b_n(r, \theta, t) \in W$ (при $|t| < 2\delta\ |f(re^{it})| \geqslant c$, а при $|t| \geqslant 2\delta$ по выбору $\delta$ $b_n(r, \theta, t) = 0$). Умножим обе части равенства $h_k = \sum\limits_{n\geqslant 0} c_n g_{n+k}$ на $b_{n, k}(1, \theta)$ и просуммируем по $k$;

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n, k} \Big( \sum_{p\geqslant 0} c_p g_{p+k} \Big) = \sum_{p\geqslant 0} g_p \Big( \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{n, k} c_{p-k} \Big) = \sum_{p\geqslant 0} g_p a_p^{(n)} e^{-ip\theta}.$$

Здесь мы воспользовались (4) — (5).

С другой стороны,

$$\sum_{k\leqslant 0} h_k b_{n,k}(1,\theta)=\lim_{r\to 1}\sum_{k\geqslant 0} r^k h_{-k} b_{n,-k}(r,\theta)=$$

$$=\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_f(re^{it})\, b_n(r,\theta,t)\,dt=\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{H_f(re^{i(t+\theta)})}{f(re^{i(t+\theta)})}K_n(t)\,dt.$$

Таким образом, функция $G_n(z)$, $z=re^{i\theta}$

$$G_n(z)=\begin{cases}\sum\limits_{k\geqslant 0} g_k a_k^{(n)} z^{-k} & |z|>1\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{H_f(re^{i(t+\theta)})}{f(re^{i(t+\theta)})}K_n(t)\,dt & |z|<1\end{cases}$$

непрерывна в $S_{\delta',h}$ и аналитична в областях $S^1_{\delta',h}$ и $S^2_{\delta',h}$. По известной теореме теории функций $G_n(z)$ аналитична в $S_{\delta',h}$. Проверим теперь сходимость $G_n(z)$ к $H_f(z)/f(z)$ и к $G^+(z)$ в соответствующих областях;

$$|G_n(re^{i\theta})-G^+(re^{i\theta})|=\Big|\sum_{k\geqslant 0} g_k a_k^{(n)} z^{-k}-$$

$$-\sum_{k\geqslant 0} g_k z^{-k}\Big|\leqslant\Big|\sum_{k\geqslant 0} g_k(a_k^{(n)}-1)z^{-k}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\|g\|\sum_{k=0}^{n_0}|a_k^{(n)}-1|+2\|g\|\frac{1}{r-1}\frac{1}{r^{n_0}}.$$

Так как $a_k^{(n)}\to 1$ при $n\to\infty$ и $r>1$, то правая часть неравенства стремится к 0 при $n\to\infty$, таким образом, на любом компакте в $S^1_{\delta',h}G_n(z)$ сходится к $G^+(z)$. Заметим теперь, что

$$A_r(\theta)=\frac{H_f(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{H_f(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}K_\pi(t)\,dt,$$

$$|A_r(\theta)-G_n(re^{i\theta})|=\frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}(A_r(\theta)-A_r(t+\theta))K_n(t)\,dt\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}|A_r(\theta)-A_r(t+\theta)|K_n(t)\,dt\leqslant\sup_{|t|\leqslant\frac{1}{n}}|A_r(t+\theta)-A_r(\theta)|.$$

Правая часть неравенства, очевидно, стремится к нулю при $n\to\infty$. Таким образом, последовательность функций $G_n(z)$ сходится к $H_f(z)/f(z)$ равномерно на любом компакте в $S^2_{\delta',h}$.

Отметим, что

$$|G_n(re^{i\theta})|<\sum_{k\geqslant 0}|g_k|r^{-k}\leqslant\|g\|\frac{r}{r-1}\quad(r>1)$$

и

$$|G_n(re^{i\theta})|\leqslant\frac{\|h\|}{c}\frac{1}{1-r}\quad(r<1).$$

Таким образом, в $S_{\delta',h}$ имеет место неравенство $|G_n(re^{i\theta})| \leqslant C_1/\Delta r$, где $\Delta r = |1-r|$. Применяя теорему Левинсона, получим, что $|G_n(re^{i\theta})| \leqslant c_2$ в $S_{\delta',h}$, а значит, $G(z)$ — аналитическая функция в $S_{\delta',h}$.

**Лемма 2.** *Пусть $I$ — примарный идеал кольца $W_+$, содержащийся в $M(1)$, $I^\perp$ — аннулятор $I$. Тогда существует $\alpha > 0$ такое, что $I^\perp \subset B_{1/2,\alpha}$.*

Доказательство. Пусть $f \in I$, $g \in I^\perp$. Положим $h_k = \sum_{n\geqslant 0} c_n g_{n+k}$. Очевидно, $h_k = 0$ при $k \geqslant 0$. Так как $I$ не содержится ни в одном максимальном идеале, отличном от $M(1)$, то по лемме 1 функция

$$G(z) = \begin{cases} G^+(z) & |z| > 1 \\ \dfrac{H_f(z)}{f(z)} & |z| < 1, \end{cases}$$

где $f(z)$, $H_f(z)$ и $G^+(z)$ определены в (1)—(3), доопределяется как аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением точки $z = 1$. Изучим поведение $G(z)$ в окрестности этой точки. Для этого заметим, что

$$|G^+(z)| \leqslant \sum_{k\geqslant 0} |g_k||z|^{-k} \leqslant \frac{\|g\||z|}{|z|-1} \quad (|z|>1), \tag{6}$$

$$|H_f(z)| \leqslant \sum_{k\geqslant 0} |h_{-k}||z|^k \leqslant \frac{\|h\|}{1-|z|} \quad (|z|<1), \tag{7}$$

$$|f(z)| \leqslant \|f\| \quad (|z|<1). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\hat{G}(z) = G\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = \begin{cases} G^+\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) & \operatorname{Im} z > 0 \\ \dfrac{H_f\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)}{f\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)} & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Обозначим

$$\hat{G}^+(z) = G^+\left(\frac{z+i}{z-i}\right), \quad \hat{H}_f(z) = H_f\left(\frac{z+i}{z-i}\right), \quad \hat{f}(z) = f\left(\frac{z+i}{z-i}\right).$$

Из (6) и (7) мы имеем

$$|\hat{G}^+(z)| \leqslant \frac{\|g\|(|z|^2+|z|+1)}{2y} \quad (y>0), \tag{9}$$

$$|\hat{H}_f(z)| \leqslant \frac{\|h\|(|z|^2+|z|+1)}{2|y|} \quad (y<0). \tag{10}$$

В полуплоскости $\operatorname{Im} z < -h$, $h > 0$, функции $\hat{H}_f(z)$ и $\hat{f}(z)$ вполне регулярного роста [3, стр. 314], и индикатор $h_{\hat{G}}(\theta)$ функции $\hat{G}(z)$ равен

$$h_{\hat{G}}(\theta) = (K_{\hat{H}_f} - K_{\hat{f}})|\sin\theta|, \quad -\pi < \theta < 0,$$

где

$$K_{\hat{H}_f} = \overline{\lim_{y\to-\infty}} \frac{\ln|H_f(iy)|}{|y|}, \quad K_{\hat{f}} = \overline{\lim_{y\to-\infty}} \frac{\ln|\hat{f}(iy)|}{|y|}.$$

Из (8) и (10) следует, что $K_{\hat{f}} \leqslant 0$ и $K_{\hat{H}_f} \leqslant 0$.

Обозначим

$$K_I = \sup_{f \in I} K_{\hat{f}}, \quad K_I \leqslant 0.$$

Очевидно,

$$h_{\hat{G}}(\theta) \leqslant -K_I |\sin\theta|. \tag{11}$$

Из (9) и (11) следует, что функция $\hat{G}(z)$ конечной степени $\sigma$, $\sigma = -K_I$, внутри углов $\left| |\theta| - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2} - \delta$ при $|z| \to \infty$, причем $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым.

Для оценки $\hat{G}(z)$ внутри оставшихся углов воспользуемся следующим неравенством для $\ln\left|\hat{G}\left(z - i\frac{h}{2}\right)\right|$ в нижней полуплоскости [3, стр. 311]:

$$\ln\left|\hat{G}\left(z - i\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left|\hat{G}\left(t - i\frac{h}{2}\right)\right|}{(t-x)^2 + y^2} dt + |K_I y|.$$

Из этого неравенства с учетом (10) и того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left|\hat{f}\left(t - i\frac{h}{2}\right)\right|}{1 + t^2} dt < \infty,$$

а также

$$\frac{1 + t^2}{(t-x)^2 + y^2} \leqslant \frac{x^2 + y^2 + 1}{y^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

следует, что

$$\ln\left|\hat{G}\left(z - i\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\frac{C_1}{h} + \ln\left|t^2 + \frac{h^2}{4} + \sqrt{t^2 + \frac{h^2}{4}}\right|}{(t-x)^2 + y^2} dt -$$

$$- \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left|\hat{f}\left(t - i\frac{h}{2}\right)\right|}{(t-x)^2 + y^2} dt + |K_I y| \leqslant \ln\frac{C_1}{h} + C_2 \frac{1 + |z|^2}{|y|} + C_3.$$

Таким образом, при $y \leqslant -\frac{h}{2}$ справедливо неравенство

$$\ln\left|\hat{G}\left(z - i\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant \frac{C_4}{h^2} + C_5 |z|^4 + C_6.$$

Отсюда следует, что $\exists C_7$, $C_8$ такие, что при $y < -h$, $0 < h < 1$, выполняется неравенство

$$\ln|\hat{G}(z)| \leqslant \frac{C_7}{h^2} + C_8 |z|^4. \tag{12}$$

Рассмотрим в полосе $|y| \leqslant h$ функцию

$$G_1(z) = \hat{G}(z) \exp[-2C_8 z^4].$$

Из (9) и (12) следует, что

$$|G_1(z)| \leqslant C_9 \exp\frac{C_7}{h^2}$$

при $|y| \leqslant h$.

Рассмотрим в прямоугольнике $D = \{|x| \leqslant 1, |y| \leqslant h\}$ семейство аналитических функций $\{G_1(z \pm t)\}$ $(1 < t < \infty)$. Для всех функций этого семейства имеет место оценка

$$|G_1(z \pm t)| \leqslant C_9 \exp\frac{C_7}{|y|^2}. \tag{13}$$

Отсюда по теореме Левинсона следует, что все функции семейства равномерно ограничены в прямоугольнике $D_1$, $D_1 = \{|x| < 1 - \eta, |y| \leqslant h\}$ при фиксированном $\eta$, $0 < \eta < 1$. А это значит, что в полосе $|y| \leqslant h$ функция $G_1(z)$ ограничена. Поэтому внутри углов $\left||\theta| - \frac{\pi}{2}\right| > \frac{\pi}{2} - \delta$ при $|z| > r > 0$ справедлива оценка

$$|\hat{G}(z)| \leqslant C_r \exp C_8 |z|^1.$$

Применяя принцип Фрагмена — Линделефа, получим, что $\hat{G}(z)$ — целая функция конечной степени $\sigma = -K_I$ во всей комплексной плоскости.

Таким образом доказано, что $G(z)$ — целая функция конечной степени от $(1 - z)^{-1}$.

Заметим теперь, что если функция

$$\sum_{k \geqslant 0} g_k z^{-k}$$

продолжается внутри единичного круга $|z| < 1$ как целая функция конечной степени от $(1 - z)^{-1}$, то и

$$\sum_{k \geqslant 0} g_k z^k$$

продолжается как целая функция конечной степени от $(1 - z)^{-1}$. Поэтому по теореме Вигерта [4, стр. 30] существует целая функция $A_g(z)$ порядка $1/2$ такая, что

$$g_k = A_g(k) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty} \in B_{1/2, \alpha}$, и лемма 2 доказана.

***Лемма 3.*** *Пусть $I$ — примарный идеал кольца $W_+$, содержащийся в $M(1)$, и пусть $I^\perp$ содержит хотя бы одну последовательность $g^0 = \{g_k^0\}_{k=0}^{\infty} \in B_{1/2, \alpha}$, причем тип $A_{g^0}(z)$ равен $\alpha$.*
*Тогда*

$$B_{1/2, \alpha} \subset I^\perp.$$

Доказательство. Пусть $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty} \in B_{1/2, \alpha}$. Нам нужно доказать, что $\forall f \in I$ $\sum_{k \geqslant 0} c_k g_k = 0$. Рассмотрим вначале случай, когда $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_1$.

Положим

$$G(z) = \sum_{k \geqslant 0} g_k z^{-k} \qquad (|z| \geqslant 1).$$

Определим последовательность $h = \{h_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$

$$h_k = \sum_{n \geqslant 0} c_n g_{n+k}.$$

Очевидно, $h \in l_1$. Из определения $h$ следует, что

$$f(e^{it})\, G(e^{it}) = \Big(\sum_{k\geqslant 0} c_k e^{ikt}\Big)\Big(\sum_{k\geqslant 0} g_k e^{-ikt}\Big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-ikt}. \tag{14}$$

Обозначим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-ikt} = H(e^{it}).$$

Определим теперь последовательность $h^0 = \{h_k^0\}_{k=0}^{\infty}$

$$h_k^0 = \sum_{n\geqslant 0} c_n g_{n+k}^0.$$

Определим также следующие функции:

$$H^0(z) = \sum_{k\geqslant 0} h_{-k} z^k \quad \text{и} \quad G_0^+(z) = \sum_{k\geqslant 0} g_k^0 z^{-k}.$$

По лемме 2 функция

$$G_0(z) = \begin{cases} G_0^+(z) & |z| > 1 \\ H^0(z)/f(z) & |z| < 1 \end{cases}$$

аналитична во всей комплексной плоскости кроме точки $z = 1$. Так как

$$G_0(z) = H^0(z)/f(z) \quad (|z| < 1) \tag{15}$$

и так как для любого $t$, не равного нулю, существует $f \in I$, такая что $f(e^{it}) \neq 0$, то из (14) и (15) имеем

$$H(e^{it}) = \frac{H^0(e^{it})\, G(e^{it})}{G_0(e^{it})}, \quad t \neq 0. \tag{16}$$

Представим $H(e^{it})$ в виде

$$H(e^{it}) = H^+(e^{it}) + H^-(e^{it}),$$

где

$$H^+(e^{it}) = \sum_{k\geqslant 0} h_k e^{-ikt}.$$

Положим также

$$H^+(z) = \sum_{k\geqslant 0} h_k z^{-k} \qquad (|z| > 1),$$

$$H^-(z) = \sum_{k\geqslant 1} h_{-k} z^k \qquad (|z| < 1).$$

Тогда из (16) получим

$$H^+(e^{it}) = \frac{H^0(e^{it})\, G(e^{it})}{G_0(e^{it})} - H^-(e^{it}). \tag{17}$$

Заметим теперь, что так как $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty} \in B_{1/2,\,\alpha}$, то по теореме Вигерта $G(z) = \sum_{k\geqslant 0} g_k z^{-k}$ — целая функция от $(1-z)^{-1}$. Так как $H^-(z)$, $G_0(z)$, $H^0(z)$ определены при $|z| < 1$, то из (17) следует, что $H^+(z)$ может быть аналитически продолжена внутрь круга $|z| < 1$ как целая функция от $(1-z)^{-1}$.

Рассмотрим функцию $\hat{H}^+(z) = H^+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$. По доказанному $\hat{H}^+(z)$ — целая функция, ограниченная в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Оценим рост этой функции в нижней полуплоскости. Так как $\hat{H}^+(z)$ вполне регулярного роста в полуплоскости $\operatorname{Im}(z) < 0$, то легко видеть, что

$$h_{\hat{H}^+}(\theta) = (K_{\hat{H}^0} - K_{\hat{G}_0} + K_{\hat{G}}) |\sin\theta| \leqslant 0,$$

поскольку тип $A_{g^0}(z)$ равен $\alpha$, а тип $A_g(z)$ не превосходит $\alpha$.

Повторяя рассуждения леммы 2, получим, что $\hat{H}^+(z)$ стремится к 0 при $|z| \to \infty$, т. е. $\hat{H}^+(z) \equiv 0$. Это значит, что $h_k = 0$ при $k \geqslant 0$, в частности, $h_0 = \sum\limits_{k \geqslant 0} c_k g_k = 0$. Таким образом, в случае, когда $g \in l_1$, лемма 3 доказана.

Пусть теперь $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty} \in B_{1/2,\,\alpha_1}$ где $\alpha_1 < \alpha$; $A(z)$ — целая функция порядка 1/2 типа $\alpha$, ограниченная в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, причем

$$A(z) = z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots.$$

Тогда $A_g(z) \frac{A(\varepsilon z)}{(\varepsilon z)^2}$ — целая функция порядка 1/2 типа $\leqslant \alpha$ при достаточно малом $\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\left\{A_g(k) \frac{A(\varepsilon k)}{(\varepsilon k)^2}\right\}_{k=0}^{\infty} \in l_1.$$

Поэтому

$$\sum_{k \geqslant 0} g_k \frac{A(\varepsilon k)}{(\varepsilon k)^2} c_k = 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим $\sum\limits_{k \geqslant 0} g_k c_k = 0$, т. е. $f(z) \in I_{\alpha_1}$, $\alpha_1 < \alpha$. Пусть $g = \{g_k\}_{k=0}^{\infty} \in B_{1/2,\,\alpha}$. Тогда при $\lambda < 1$ $\sum\limits_{k \geqslant 0} A_g(\lambda k) c_k = 0$. Переходя здесь к пределу при $\lambda \to 1$, получим

$$\sum_{k \geqslant 0} A_g(k) c_k = 0,$$

т. е $f \in I_\alpha$, и таким образом, $B_{1/2,\,\alpha} \subset I^{\perp}$. Лемма 3 полностью доказана.

***Лемма 4.*** *Для того, чтобы $f \in I^{\alpha}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{r \to 0} r \ln |f(1-r)| \leqslant -\frac{\alpha^2}{2}.$$

Доказательство. Заметим, что по теореме Вигерта если $A_g(z)$ — целая функция порядка 1/2 типа $\alpha$ и $g_k = A_g(k)$, то $G(z) = \sum\limits_{k \geqslant 0} g_k z^k$ — целая функция от $(1-z)^{-1}$ типа $\frac{\alpha^2}{4}$. Кроме того, если обозначить $\hat{f}(z) = = f\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$, то

$$\lim_{r \to 0} r \ln |f(1-r)| = 2 \lim_{y \to -\infty} \frac{\ln |\hat{f}(iy)|}{|y|}.$$

Докажем вначале необходимость.

Пусть $f_0 \in I_\alpha$; $g \in B_{1/2,\,\alpha}$ и тип $A_g(z)$ равен $\alpha$. Из доказательства леммы 2 следует, что $G(z)$ как функция от $(1-z)^{-1}$ имеет тип $K_{\hat{H}_f} - K_{\hat{f}}$. Очевидно, $K_{\hat{H}_f} - K_{\hat{f}} \leqslant -K_{\hat{f}_0}$. Но выше мы отметили, что тип $G(z)$ равен $\frac{\alpha^2}{4}$. Итак,

$$\frac{\alpha^2}{4} \leqslant -K_{\hat{f}} \Rightarrow K_{\hat{f}} = \lim_{y \to -\infty} \frac{\ln |\hat{f}(iy)|}{|y|} \leqslant -\frac{\alpha^2}{4}.$$

Достаточность доказывается аналогично лемме 3. Нужно только вместо (17) воспользоваться соотношением

$$H^+(e^{it}) = f(e^{it})\,G(e^{it}) - H^-(e^{it}).$$

Следствие. Рассмотрим функцию

$$f(z) = (1-z)^3 \exp[-\gamma(1+z)/(1-z)].$$

На окружности эта функция непрерывно дифференцируема, и поэтому разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье, т. е. $f(z) \in W_+$. Легко проверить, что $\lim\limits_{r\to 0} r \ln|f(1-r)| = -2\gamma$. Положим $\gamma = \frac{\alpha^2}{4}$. Тогда $f(z) \in I_\alpha$ и $f(z) \overline{\in} I_\beta$ при $\alpha < \beta$. Очевидно также, что $f(z)$ обращается в нуль только в точке $z = 1$. Тем самым свойства 3, 4 множеств $I_\alpha$ доказаны.

Сформулируем теперь основной результат работы.

**Теорема 1.** *Точке единицы на окружности отвечает максимальная упорядоченная цепочка примарных идеалов* $\{I_\alpha\}$.

Из свойств 1—4 множеств $I_\alpha$ следует, что они образуют упорядоченную цепочку примарных идеалов. Нам нужно показать, что эта цепочка максимальна.

Пусть $I$ — примарный идеал. Рассмотрим $I^\perp$. По лемме 2 существует $\alpha$ такое, что $I^\perp \subset B_{1/2,\,\alpha}$. Пусть $\alpha^*$ — верхняя грань типов целых функций $A_g(z)$ при $g$, принадлежащих $I^\perp$. Очевидно, что $I^\perp \subset B_{1/2,\,\alpha^*}$. Кроме того, $\forall \alpha_1 < \alpha^*$ по лемме 3 $B_{1/2,\,\alpha_1} \subset I^\perp$. Пусть $A_g(z)$ — целая функция порядка 1/2 типа $\alpha^*$, ограниченная на полуоси. Тогда при $0 < \lambda < 1$

$$\sum_{k\geqslant 0} c_k A_g(\lambda k) = 0.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 1$, получим

$$\sum_{k\geqslant 0} c_k A_g(k) = 0,$$

т. е. $I^\perp \subset B_{1/2,\,\alpha^*}$. А отсюда следует, что $I = I_{\alpha^*}$.

**Теорема 2.** *Точке единицы на окружности отвечает максимальная упорядоченная цепочка примарных идеалов $J_\alpha$, где*

$$J_\alpha = \{f \in W_+ : \lim_{r\to 0} r \ln|f(1-r)| \leqslant -\alpha\} \text{ и } I_\alpha = J_{\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1 и леммы 4.

В заключение приношу глубокую благодарность В. Э. Кацнельсону за постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Гурарий. Спектральный анализ ограниченных функций на полуоси. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 5. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
2. N. Levinson. Gap and denity theorems, Amer. Math. Soc. Coll Publ., 1940.
3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.
4. Л. Бибербах. Аналитическое продолжение. Изд-во «Наука», М., 1967.
5. Н. Винер. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. Физматгиз, М., 1963.
6. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1960.

*Поступила 20 мая 1969 г*