Выпуск 11 1970

ОБ ОПЕРАТОРАХ, ПОРОЖДЕННЫХ I_p-МАТРИЦАМИ, В СЛУЧАЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ИНДЕКСОВ ДЕФЕКТА

В. И. Коган

Пусть

$$A = \| A_{ik} \|_{i,\ k=0}^{\infty}$$

есть регулярная I_p-матрица [1], т. е. такая бесконечная симметрическая матрица, элементами которой являются квадратные матрицы p-го порядка A_{ik} $(i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots)$, причем $A_{ik} = 0$ при $|i-k| > 1$, и матрицы A_{ii+1} $(i = 0,\ 1,\ \ldots)$ неособенные.

Эта матрица A порождает минимальный замкнутый симметрический оператор $\hat{A}$ в пространстве последовательностей l^2. Если элементы матрицы A вещественны, то очевидно, что дефектные числа оператора $\hat{A}$ равны между собой, ибо каждому решению уравнения

$$\hat{A}^* x - \lambda x = 0$$

отвечает комплексно сопряженное решение уравнения

$$\hat{A}^* x - \bar{\lambda} x = 0,$$

однако в случае комплексной матрицы A это рассуждение не проходит.

Настоящая заметка посвящена доказательству равенства дефектных чисел оператора $\hat{A}$, порожденного комплексной матрицей A, в том случае, когда одно из дефектных чисел максимально, т. е. равно p, а также исследованию структуры и доказательству полной непрерывности резольвенты самосопряженного расширения оператора $\hat{A}$. Эти результаты подобны известным фактам теории дифференциальных операторов [2], [3]. Если матрицы A_{ii+1} имеют специальный вид (нижнетреугольные), а матрица A вещественна или I-симметрична, то полная непрерывность резольвенты соответствующих расширений оператора $\hat{A}$, когда дефектные числа максимальны, была доказана в [4] или соответственно в [5].

1. Сопоставим матрице A последовательность матричных полиномов $P_k(\lambda)$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots)$, определяемых рекуррентным соотношением

$$A_{kk-1} P_{k-1}(\lambda) + (A_{kk} - \lambda I) P_k(\lambda) + A_{kk+1} P_{k+1}(\lambda) = 0 \qquad (1)$$
$$(k = 0,\ 1,\ \ldots;\ P_{-1} \equiv 0),$$

причем полином $P_0(\lambda)$ положим равным единичной матрице I. При любом комплексном z существует матричный предел

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} P_k^*(z)\, P_k(z) \Big)^{-1}.$$

М. Г. Крейну [1] принадлежит теорема, утверждающая, что ранг $r(z)$ эрмитовой матрицы $\Gamma(z)$ один и тот же для всех z, принадлежащих одной и той же открытой полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ или $\operatorname{Im} z < 0$ и совпадает соответственно с верхним и нижним дефектными числами эрмитова оператора $\hat{A}$. Очевидно, что

$$0 \leqslant r(z) \leqslant p \quad (\operatorname{Im} z \gtrless 0).$$

Докажем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если одно из дефектных чисел симметрического оператора $\hat{A}$, порожденного комплексной I_p-матрицей A, равно p, то дефектные числа этого оператора равны между собой.*

Для доказательства нам понадобится формула Грина для I_p-матриц [6]

$$P_n^*(\mu) A_{nn+1} P_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}^*(\mu) A_{n+1n} P_n(\lambda) = (\lambda - \bar{\mu}) \sum_{k=0}^{n} P_k^*(\mu) P_k(\lambda). \qquad (2)$$

Полагая здесь последовательно $\mu = \bar{\lambda}$ и $\mu = \lambda$, получим соответственно равенства

$$P_n^*(\bar{\lambda}) A_{nn+1} P_{n+1}(\lambda) = P_{n+1}^*(\bar{\lambda}) A_{n+1n} P_n(\lambda), \qquad (3)$$

$$P_n^*(\lambda) A_{nn+1} P_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}^*(\lambda) A_{n+1n} P_n(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}) H_n(\lambda), \qquad (4)$$

где

$$H_n(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{n} P_k^*(\lambda) P_k(\lambda).$$

Заметим [2], что $\det P_k(\lambda) \neq 0$ при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Из соотношений (3), взятых для λ и для $\bar{\lambda}$, и из тождества

$$P_{n+1}^*(\lambda) [P_{n+1}^*(\bar{\lambda})]^{-1} \{P_n^*(\bar{\lambda}) [P_n^*(\lambda)]^{-1} - P_{n+1}^*(\bar{\lambda}) [P_{n+1}(\lambda)]^{-1}\} P_n^*(\lambda) [P_n^*(\bar{\lambda})]^{-1} =$$
$$= P_{n+1}^*(\lambda) [P_{n+1}^*(\bar{\lambda})]^{-1} - P_n^*(\lambda) [P_n^*(\bar{\lambda})]^{-1} \qquad (5)$$

следует формула для $H_n(\bar{\lambda})$

$$H_n(\bar{\lambda}) = [P_{n+1}^{-1}(\lambda) P_{n+1}(\bar{\lambda})]^* H_n(\lambda) P_{n+1}^{-1}(\lambda) P_{n+1}(\bar{\lambda}), \qquad (6)$$

если учесть соотношение

$$(\lambda - \bar{\lambda}) H_n(\lambda) = \{P_n^*(\lambda) [P_n^*(\bar{\lambda})]^{-1} - P_{n+1}^*(\lambda) [P_{n+1}^*(\bar{\lambda})]^{-1}\} P_{n+1n}^*(\bar{\lambda}) A_{n+1n} P_n(\lambda),$$

вытекающее из (3), (4).

Перейдя к определителям в равенстве (6), получим

$$\det H_n(\bar{\lambda}) = \left| \frac{\det P_{n+1}(\bar{\lambda})}{\det P_{n+1}(\lambda)} \right|^2 \det H_n(\lambda). \qquad (7)$$

А так как из тождества (3) следует равенство

$$\left| \frac{\det P_{n+1}(\bar{\lambda})}{\det P_{n+1}(\lambda)} \right| = 1,$$

то

$$\det H_n^{-1}(\lambda) = \det H_n^{-1}(\bar{\lambda}).$$

Отсюда после перехода к пределу при $n \to \infty$ получим соотношение

$$\det \Gamma(\lambda) = \det \Gamma(\bar{\lambda}),$$

которое означает, что если $rq\Gamma(\lambda) = p$, то и $rq\Gamma(\bar{\lambda}) = p$, так как тогда $\det \Gamma(\bar{\lambda}) \neq 0$. Это в силу приведенной выше теоремы М. Г. Крейна [1] завершает доказательство теоремы 1.

2. **Теорема 2.** *Пусть дефектные числа рассмотренного выше оператора $\hat{A}$ равны p. Тогда резольвента $\tilde{R}_\lambda$ любого самосопряженного расширения $\tilde{A} \supset \hat{A}$ определяется матрицей $\| H_{ik} \|_{i,k=0}^{\infty}$ Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Элемент $\tilde{R}_\lambda y$ ищем в многообразии решений системы конечно-разностных уравнений с матричными коэффициентами

$$A_{kk-1}\vec{x}_{k-1} + (A_{kk} - \lambda I)\vec{x}_k + A_{kk+1}\vec{x}_{k+1} = \vec{y}_k \qquad (8)$$
$$(k = 0, 1, \ldots)$$

с начальным условием $\vec{x}_{-1} = 0$.

Общее решение однородных уравнений

$$A_{kk-1}\vec{x}_{k-1} + (A_{kk} - \lambda I)\vec{x}_k + A_{kk+1}\vec{x}_{k+1} = 0 \qquad (9)$$
$$(k = 0, 1, \ldots)$$

имеет вид

$$\vec{x}_n(\lambda) = P_n(\lambda)\vec{c} + Q_n(\lambda)\vec{d} \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

где $P_n(\lambda)$ и $Q_n(\lambda)$ — матричные решения уравнений (9), удовлетворяющие начальным условиям:

$$P_0(\lambda) = I, \quad P_1(\lambda) = A_{01}^{-1}(\lambda I - A_{00}),$$
$$Q_0(\lambda) = 0, \quad Q_1(\lambda) = A_{01}^{-1}$$

соответственно, а $\vec{c}$ и $\vec{d}$ — произвольные постоянные p-компонентные векторы (или матрицы, если ищется матричное решение). Применяя метод вариации произвольных постоянных, найдем частное решение уравнений (8) в виде

$$\vec{z}_n(\lambda) = P_n(\lambda)\vec{c}_n + Q_n(\lambda)\vec{d}_n \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

где

$$\vec{c}_0 = \vec{d}_0 = 0,$$

$$\vec{c}_n = \sum_{k=1}^{n} (Q_{k-1}(\lambda) Q_k^{-1}(\lambda) P_k(\lambda) - P_{k-1}(\lambda))^{-1} A_{kk-1}^{-1}\vec{y}_k,$$

$$\vec{d}_n = \sum_{k=1}^{n} (P_{k-1}(\lambda) P_k^{-1}(\lambda) Q_k(\lambda) - Q_{k-1}(\lambda))^{-1} A_{kk-1}^{-1}\vec{y}_k \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Матрицы

$$Q_{k-1}(\lambda) Q_k^{-1}(\lambda) P_k(\lambda) - P_{k-1}(\lambda) \quad \text{и} \quad P_{k-1}(\lambda) P_k^{-1}(\lambda) Q_k(\lambda) - Q_{k-1}(\lambda)$$

невырождены при любом невещественном λ, что следует из легко выводимых соотношений

$$P_{k-1}P_k^{-1}Q_k - Q_{k-1} = P_{k-1}P_k^{-1}A_{k-1k}^{-1}A_{k-1\,k-2}(P_{k-2}P_{k-1}^{-1}Q_{k-1} - Q_{k-2})$$

и

$$Q_{k-1}Q_k^{-1}P_k - P_{k-1} = Q_{k-1}Q_k^{-1}A_{k-1k}^{-1}A_{k-1\,k-2}(Q_{k-2}Q_{k-1}^{-1}P_{k-1} - P_{k-2}).$$

Итак, общее решение уравнений (8) имеет вид

$$\vec{x}_n(\lambda) = P_n\vec{c} + Q_n\vec{d} + P_n\sum_{k=1}^{n}(Q_{k-1}Q_k^{-1}P_k - P_{k-1})^{-1}A_{kk-1}^{-1}\vec{y}_k + \\ + Q_n\sum_{k=1}^{n}(P_{k-1}P_k^{-1}Q_k - Q_{k-1})^{-1}A_{kk-1}^{-1}\vec{y}_k. \qquad (10)$$

Определим произвольные постоянные p-компонентные векторы $\vec{c} = \vec{c}(y)$ и $\vec{d} = \vec{d}(y)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\tilde{R}_\lambda y = \vec{x}_0(\lambda) \oplus \vec{x}_1(\lambda) \oplus \cdots \oplus \vec{x}_n(\lambda) \oplus \cdots \qquad (11)$$

в предположении финитности вектора $y = \vec{y}_0 \oplus \vec{y}_1 \oplus \cdots \oplus \vec{y}_n \oplus \cdots$. Так как компоненты p-мерных векторов $\vec{c}(y)$ и $\vec{d}(y)$, как видно из равенств (10), (11), являются однородными и аддитивными функционалами, определенными на финитных векторах y, то имеет место представление

$$\vec{c}(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k\vec{y}_k, \qquad (12)$$

$$\vec{d}(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\Phi_k\vec{y}_k, \qquad (13)$$

где Ψ_k и $\Phi_k (k = 0, 1, \ldots)$ — $p \times p$ матрицы, однозначно определяемые соответствующими функционалами или, что то же самое, выбором самосопряженного расширения $\tilde{A}$.

Теперь равенство (11), учитывая (10), (12), (13) можно записать в виде

$$\vec{x}_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}R_{nk}(\lambda)\vec{y}_k \quad (n = 0, 1, \ldots), \qquad (14)$$

где

$$R_{nk}(\lambda) = \begin{cases} P_n(\lambda)[U_k(\lambda) + \Psi_k(\lambda)] + Q_n(\lambda)[W_k(\lambda) + \Phi_k(\lambda)], & n \geqslant k \\ P_n(\lambda)\Psi_k(\lambda) + Q_n(\lambda)\Phi_k(\lambda), & k > n. \end{cases} \qquad (15)$$

Здесь положено

$$U_0(\lambda) \equiv W_0(\lambda) \equiv 0,$$
$$U_k(\lambda) \equiv (Q_{k-1}(\lambda)Q_k^{-1}(\lambda)P_k(\lambda) - P_{k-1}(\lambda))^{-1}A_{kk-1}^{-1},$$
$$W_k(\lambda) \equiv (P_{k-1}(\lambda)P_k^{-1}(\lambda)Q_k(\lambda) - Q_{k-1}(\lambda))^{-1}A_{kk-1}^{-1} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Так как $\tilde{R}_\lambda^* = \tilde{R}_{\bar{\lambda}}$, то

$$R_{nk}(\lambda) = R_{kn}^*(\bar{\lambda}). \qquad (16)$$

Заметим, что если дефектные числа оператора $\hat{A}$ равны p, то все решения уравнений (9) при любом невещественном λ принадлежат l^2. Это следует из возможности выбора в качестве векторов фундаментальной системы уравнения (9) p базисных векторов из дефектного подпространства оператора $\hat{A}$ и p из дефектного подпространства оператора $\hat{B}$, матрица которого отличается от матрицы оператора $\hat{A}$ тем, что в ней положено $A_{00} = A_{01} = A_{10} = 0$, и который, таким образом, имеет те же дефектные числа, что и оператор $\hat{A}$.

Стало быть, имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^* Q_k < C,$$

где C — постоянная матрица.

Формула (15) дает представление оператора $(\tilde{A}-\lambda I)^{-1}$ на всех финитных векторах y. Чтобы получить представление для $\tilde{R}_\lambda$ в виде (14), надо убедиться в сходимости ряда (14) при любом векторе $y \in l^2$, а эта сходимость вместе с утверждением о полной непрерывности резольвенты $\tilde{R}_\lambda$ следует из сходимости ряда

$$\sum_{n,\,k=0}^{\infty} |H_{nk}|^2 = \mathrm{sp} \sum_{n,\,k=0}^{\infty} R_{nk}^*(\lambda)\, R_{nk}(\lambda),$$

которая эквивалентна любому из матричных неравенств

$$\sum_{n,\,k=0}^{\infty} R_{nk}^*(\lambda)\ R_{nk}(\lambda) < C \sum_{n,\,k=0}^{\infty} R_{nk}(\lambda)\, R_{nk}^*(\lambda) < C. \tag{17}$$

Докажем второе из них. Из соотношений (15) и (16) следует, что

$$P_n(\lambda)\,[U_k(\lambda) + \Psi_k(\lambda)] + Q_n(\lambda)\,[W_k(\lambda) + \Phi_k(\lambda)] = \Psi_n^*(\bar{\lambda})\, P_k^*(\bar{\lambda}) + \Phi_n^*(\bar{\lambda})\, Q_k^*(\bar{\lambda}). \tag{18}$$

Последовательно полагая в (18) $k=0, 1$ и решая полученную систему двух матричных уравнений относительно матриц $\Psi_n^*(\bar{\lambda})$ и $\Phi_n^*(\bar{\lambda})$, легко проверить выполнение неравенств $\sum_{r=0}^{\infty} \Psi_r(\bar{\lambda})\, \Psi_r^*(\bar{\lambda}) < C$, $\sum_{r=0}^{\infty} \Phi_r(\bar{\lambda})\, \Phi_r^*(\bar{\lambda}) < C$ и аналогичных неравенств с λ вместо $\bar{\lambda}$, откуда с использованием матричного неравенства

$$X^*Y + Y^*X \leqslant X^*X + Y^*Y$$

получаем

$$\sum_{n,\,k=0}^{\infty} \{P_n(\lambda)\, \Psi_k(\lambda) + Q_n(\lambda)\, \Phi_k(\lambda)\}\, [P_n(\lambda)\, \Psi_k(\lambda) + Q_n(\lambda)\, \Phi_k(\lambda)]^* < C,$$

$$\sum_{n,\,k=0}^{\infty} [\Psi_n^*(\bar{\lambda})\, P_k^*(\bar{\lambda}) + \Phi_n^*(\bar{\lambda})\, Q_k^*(\bar{\lambda})]\, [\Psi_n^*(\bar{\lambda})\, P_k^*(\bar{\lambda}) + \Phi_n^*(\bar{\lambda})\, Q_k^*(\bar{\lambda})\}^* < C.$$

Эти неравенства эквивалентны в совокупности матричному неравенству (17).

Автор с глубокой благодарностью вспоминает И. М. Глазмана, предложившего тему этой работы, и выражает признательность Ф. С. Рофе-Бекетову за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов. ДАН СССР, 69, № 2, (1949), 125—128.

2. Ф. В. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Перевод с англ. Изд-во «Мир», М., 1968.

3. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во «Наука», М., 1966.

4. H. Nagel. Über die aus quadrierbaren Hermitischen Matrizen entstehen den Operatoren. Math. Ann. 112 (1936), 247—285.

5. Н. А. Жихарь. Обращение комплексных симметричных бесконечных якобиевых матриц любого порядка. Вестник ХПИ, № 2, матем. и физ., вып. 1, 1965, 13—18.

6. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Изд-во «Наукова думка», К., 1965.

Поступила 25 апреля 1969 г.