Выпуск 11 1970

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ Ю. В. ЛИННИКА В МЕТРИКЕ П. ЛЕВИ

Г. П. Чистяков

Настоящая заметка является продолжением работы [1], все обозначения и терминология которой будут в заметке сохранены*. Напомним основной результат рабсты [1].

Теорема 1. *Пусть X_1 и X_2 — независимые случайные величины, а $X = X_1 + X_2$. Предположим также, что медиана m_1 случайной величины X_1 равна 0. Обозначим через $F_j(x)$, $j = 1, 2$, $F(x)$ законы распределения случайных величин X_j, $j = 1, 2, X$.*

Пусть выполняется

$$\sup_x \left| F(x) - \Lambda\left(x, 0, \frac{1}{2}, 1\right)\right| < \varepsilon < e^{-\rho},$$

тогда справедливо неравенство

$$\sup_x |F_1(x) - \Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)| < \frac{A}{\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{1}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{300}}} + \frac{1}{\sqrt{\nu_2}}\right), \tag{1}$$

где

$$\nu_1 = \int_{-N}^{N} x\, dF_1(x) - \int_{-N}^{N} x^3\, dF_1(x) + 3\left(\int_{-N}^{N} x\, dF_1(x)\right)\cdot\left(\int_{-N}^{N} x^2\, dF_1(x)\right) - 2\left(\int_{-N}^{N} x\, dF_1(x)\right)^3,$$

$$\nu_2 = \max\left\{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{72}}, \frac{1}{2}\left|\int_{-N}^{N} x^2\, dF_1(x) - \left(\int_{-N}^{N} x\, dF_1(x)\right)^2 - \int_{-N}^{N} x^3\, dF_1(x) + 3\left(\int_{-N}^{N} x\, dF_1(x)\right)\cdot\left(\int_{-N}^{N} x^2\, dF_1(x)\right) - 2\left(\int_{-N}^{N} x\, dF_1(x)\right)^3\right|\right\},$$

$$\nu_3 = \left|\int_{-N}^{N} x^3\, dF_1(x) - 3\left(\int_{-N}^{N} x\, dF_1(x)\right)\cdot\left(\int_{-N}^{N} x^2\, dF_1(x)\right) + 2\left(\int_{-N}^{N} x\, dF_1(x)\right)^3\right|,$$

$$N\ln N = \ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Неравенство (1) становится тривиальным, когда величина ν_2, зависящая от компоненты F_1, достаточно мала. Поэтому, чтобы неравенство (1) было нетривиальным, следует накладывать ограничения на малость вели-

* В частности, через $\Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ мы обозначаем композицию законов Гаусса и Пуассона, характеристическая функция которой равна $\exp\{\nu_3(e^{it} - 1) - \nu_2 t^2 + i\nu_1 t\}$.

чины ν_2, т. е. на компоненту F_1. Переход к метрике Леви позволяет избавиться от таких ограничений. А именно, справедлива теорема 2, доказательству которой посвящена заметка.

Теорема 2. *Пусть* $F = F_1 * F_2$ *и* $L\left(F(x),\ \Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right) < \varepsilon < e^{-1}$, *где L — расстояние в метрике Леви, тогда*

$$\inf_{\Lambda \in K_\Lambda} L(F_j,\ \Lambda) < A \cdot \left(\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где K_Λ — класс композиций законов Гаусса и Пуассона, а A — абсолютная положительная постоянная.

Аналогичный результат, уточняющий теорему О. В. Шалаевского, был ранее получен Ю. Ю. Мачисом [2], а теорему Н. А. Сапогова — В. М. Золотаревым [3] и С. Г. Малошевским [4].

Доказательство теоремы 2 будет опираться на следующий промежуточный результат работы [1]. Сформулируем его.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть* $f_1^*(t)$ *и* $\exp\{\nu_3(e^{it}-1)-\nu_2 t^2+i\nu_1 t\}$ *соответственно характеристические функции законов* $F_1^*(x)$ и $\Lambda(x,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)$, *где*

$$F_1^*(x) = P(X_1^* < x), \quad X_1^* = \begin{cases} X_1, & |X_1| \leqslant N \\ 0, & |X_1| > N \end{cases} \quad N\ln N = \ln\frac{1}{\varepsilon},$$

а $\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3$ *берутся из (2), то в круге* $|z| \leqslant A\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}$ *имеет место*

$$f_1^*(z) = e^{\nu_3(e^{iz}-1)-\nu_2 z^2+i\nu_1 z}(1+H(z)),$$

$$H(0)=0, \quad |H(z)| < A\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{300}}. \tag{4}$$

Заметим, что прием, которым мы будем пользоваться при доказательстве теоремы 2, принадлежит С. Г. Малошевскому [4].

Доказательство теоремы 2. Мы будем пользоваться неравенством *, связывающим расстояние в равномерной метрике и расстояние в метрике Леви. А именно, пусть F, G — законы, причем закон G абсолютно непрерывен, тогда

$$L(F,\ G) \leqslant \sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant (1 + \sup_x G')\, L(F,\ G). \tag{5}$$

Левая часть неравенства (5), очевидно, справедлива без условий на законы F, G. Далее, если выполнено неравенство

$$L\left(F(x),\ \Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right) < \varepsilon,$$

то из (5) следует, что

$$\sup_x \left| F(x) - \Lambda\left(x,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\right| < A\cdot\varepsilon.$$

Заметим, что можно считать медиану m_1 случайной величины X_1 с функцией распределения $F_1(x)$ равной 0, так как в противном случае можно рассматривать вместо X_1 случайную величину $X_1 - m_1$, а вместо X_2 — величину $X_2 + m_1$.

* Это неравенство впервые использовано В. М. Золотаревым в [5].

Теперь видно, что к законам $F_1^*(x)$ и $\Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$, где ν_1, ν_2, ν_3 из (2), можно применить лемму 1. Из этой леммы следует справедливость соотношения (4) в круге $|z| \leqslant A \ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}$. Отметим для дальнейшего, что поскольку в [1] было доказано неравенство

$$\sup_x |F_1(x) - F_1^*(x)| < A \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

то достаточно показать справедливость оценки (3) для закона F_1^*.

Сформулируем теперь теорему Эссеена [6, стр. 25], которая нам сейчас понадобится.

Пусть T, δ_1, δ_2 — постоянные, $F(x)$ и $G(x)$ — функции ограниченной вариации, $f(t)$ и $g(t)$ — их характеристические функции. Если

1) $F(-\infty) = G(-\infty)$, $F(\infty) = G(\infty)$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|\, dx < \infty$;

3) $\int\limits_{-T}^{T} \left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right|^2 dt = \delta_1$;

4) $\int\limits_{-T}^{T} \left|\frac{d}{dt}\,\frac{f(t) - g(t)}{t}\right|^2 dt = \delta_2$,

то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|\, dx \leqslant \frac{c}{T}(\operatorname{Var} G + \operatorname{Var} F) + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}} \delta_1^{\frac{1}{2}} + \delta_2^{\frac{1}{2}},$$

где c — абсолютная постоянная ($c \leqslant 4\pi$).

Обозначим через

$$f(t) = f_1^*(t), \quad g(t) = \exp\{\nu_3(e^{it} - 1) - \nu_2 t^2 + i\nu_1 t\}.$$

Легко видеть, что первые два условия теоремы Эссеена выполнены. Заметим, что как было показано в [1], для величин ν_1, ν_2, ν_3, взятых из (2), справедливы неравенства

$$|\nu_j| < A, \quad j = 1, 2, 3, \tag{7}$$

где A — абсолютная постоянная.

Поскольку функция $\frac{H(z)}{z}$ является аналитической в круге $|z| \leqslant A \ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}$, то, пользуясь принципом максимума модуля для $\frac{H(z)}{z}$, имеем

$$\left|\frac{f_1^*(t) - g(t)}{t}\right|^2 = \left|g(t)\frac{H(t)}{t}\right|^2 \leqslant \left|\frac{H(t)}{t}\right|^2 < A\frac{\left(\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-2}}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{150}}}.$$

Из формулы Коши легко получить для функции $\left(\frac{H(z)}{z}\right)$ в круге $|z| < \frac{1}{2} A \ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}$ следующую оценку:

$$\left|\left(\frac{H(z)}{z}\right)'\right| < A \cdot \frac{\left(\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-2}}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{300}}}.$$

Используя это неравенство и (4), (7), замечаем. что для $T = \frac{1}{2} A \ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}$

$$\left|\frac{d}{dt}\,\frac{f_1^*(t) - g(t)}{t}\right|^2 = \left|\frac{d}{dt}\, g(t)\,\frac{H(t)}{t}\right|^2 = |g(t)\{\nu_3 i e^{it} + i\nu_1 - 2\nu_2 t\} \cdot \frac{H(t)}{t} + g(t)\left(\frac{H(t)}{t}\right)'\Big|^2 < A\left(\left(1 + \frac{1}{|t|}\right)|H(t)| + \left|\left(\frac{H(t)}{t}\right)'\right|\right)^2 < A\,\frac{1}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{150}}}.$$

Но тогда теорема Эссеена позволяет утверждать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_1^*(x) - \Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)|\,dx < A\,\frac{1}{\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Таким образом, получено расстояние F_1^* от $\Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ в метрике L^1. Чтобы получить расстояние указанных законов в метрике Леви, воспользуемся леммой С. Г. Малошевского [4].

Лемма 2. *Для любых законов F и G справедливо неравенство*

$$(L(F, G))^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|\,dx.$$

Эта лемма* дает нам оценку

$$L(F_1^*(x), \Lambda(x, \nu_1, \nu_2, \nu_3)) < A \cdot \left(\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

---

* Приведем доказательство этой леммы, принадлежащее С. Г. Малошевскому. Можно считать $L(F, G) > 0$. Для любого $h \in (0, L(F, G))$ существует такое $x_h \in (-\infty, \infty)$, что верно одно из следующих неравенств:

а) $F(x_h) < G(x_h - h) - h$,

б) $F(x_h) > G(x_h + h) + h$.

Пусть, например, верно а). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|\,dx \geqslant \int_{x_h - h}^{x_h} [G(x) - F(x)]\,dx \geqslant \int_{x_h - h}^{x_h} [G(x) - F(x_h)]\,dx > \int_{x_h - h}^{x_h} [G(x) - G(x_h - h) + h]\,dx \geqslant h^2,$$

что и требовалось доказать.

Учитывая (6), окончательно получаем

$$L(F_1(x),\ \Lambda(x,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \nu_2)) < A\left(\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

В работе [1] было показано, что если $m_1 = 0$, то $|m_2| < A$, где A — абсолютная постоянная. Поэтому аналогичные рассуждения проходят и для второй компоненты F_2. Следовательно,

$$\inf_{\Lambda \in K_\Lambda^*} L(F_j,\ \Lambda) < A \cdot \left(\ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}},\ j = 1,\ 2,$$

и теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. П. Чистяков. Об устойчивости для теоремы Ю. В. Линника. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 9. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.

2. Ю. Ю. Мачис. Уточнения одной теоремы О. В. Шалаевского. Лит. матем. сб.», VII, 1967.

3. В. М. Золотарев. К вопросу об устойчивости разложения нормального закона распределения на компоненты. «Теория вероятности и ее применение», XIII, 4, 1968.

4. С. Г. Малошевский. Канд. дисс. Л., 1968.

5. В. М. Золотарев. Обобщение теоремы Линдеберга — Феллера. Теория вероятности и ее применение, XII, 4, 1967.

6. И. А. Ибрагимов и Ю. В. Линник. Независимые и стационарно связанные величины. Изд-во «Наука», М., 1965.

Поступила 22 апреля 1969 г.