Выпуск 11 1970

ИЗОМОРФИЗМЫ НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СО СТЕПЕНЬЮ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

М. Ю. Царьков

Пусть G — односвязная ограниченная область комплексной плоскости. Рассмотрим пространство $\mathfrak{A}(G)$ всех однозначных аналитических в G функций с топологией компактной сходимости [1]. Через D обозначим оператор дифференцирования

$$Df(z) = \frac{d}{dz} f(z), \ f(z) \in \mathfrak{A}(G), \tag{1}$$

который линейно и непрерывно отображает $\mathfrak{A}(G)$ в себя. Пространство $\mathfrak{A}(G)'$ линейных непрерывных функционалов над $\mathfrak{A}(G)$ изоморфно пространству $\mathfrak{A}(CG)$ функций, локально аналитических на замкнутом множестве CG и равных нулю в $z = \infty$ [1].

Если $F \in \mathfrak{A}(G)'$ и $f(z) \in \mathfrak{A}(G)$, то

$$F(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C)} f(\zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta, \tag{2}$$

где $\varphi(z) \in \mathfrak{A}(CG)$ и C — положительно ориентированный, лежащий в общей области аналитичности функций $f(z)$ и $\varphi(z)$, контур. Последовательность $\varphi_n(z) \in \mathfrak{A}(CG)$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда существует замкнутая область $\overline{U}$, $U \supset CG$, в которой аналитичны все функции $\varphi_n(z)$, и $\varphi_n(z)$ сходится к нулю равномерно на $\overline{U}$ [1].

Оператор, сопряженный к D, есть оператор [1]

$$D^* \varphi(z) = -\frac{d}{dz} \varphi(z). \tag{3}$$

Описание изоморфизмов $\mathfrak{A}(G)$, перестановочных со степенью оператора дифференцирования, было получено в [3] для случая $\mathfrak{A}(K_R) = \mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, где K_R — либо круг радиуса R, $R < \infty$, либо комплексная плоскость при $R = \infty$.

В настоящей работе другим методом аналогичное описание дается для более общих областей.

Теорема 1. *Пусть G — односвязная ограниченная область, содержащая нуль и переходящая в самое себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{n}$ $(n \geqslant 1)$. Тогда, чтобы линейный оператор T был непрерывным оператором в $\mathfrak{A}(G)$, перестановочным с D^n, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид**

$$T = \sum_{p,\, q=0}^{n-1} \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} D^{sn+q-p} \Big) A_q, \tag{4}$$

---

* Сходимость ряда $\sum\limits_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} D^{sn+q-p}$ понимается в сильной операторной топологии, т. е. на каждом элементе из $\mathfrak{A}(G)$.

$$A_q f(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-qj} f(\omega^j z), \quad 0 \leqslant q \leqslant n-1, \tag{5}$$

$\omega = \exp \frac{2\pi i}{n}$, *причем коэффициенты* t_{kq} $(k \geqslant 0,\ 0 \leqslant q \leqslant n-1)$ *удовлетворяют условию*

$$\lim_k \sqrt[k]{|t_{kq}|\,k!} = 0, \ 0 \leqslant q \leqslant n-1. \tag{6}$$

Замечание 1. В (4) при $s=0$ и $q<p$, D^{q-p} заменяется на I^{p-q}, где I — оператор интегрирования

$$I f(z) = \int_0^z f(\zeta)\, d\zeta. \tag{7}$$

Замечание 2. Описание верно также для областей, инвариантных относительно вращения на угол $\frac{2\pi}{n}$ вокруг некоторой своей точки z_0. В этом случае вместо (5) нужно положить

$$A_q f(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-qj} f(\omega^j (z-z_0) + z_0).$$

Укажем на некоторые свойства операторов A_q. В силу предположенных свойств области операторы A_q определены на всем пространстве $\mathfrak{A}(G)$ и непрерывны. Непосредственно проверяются следующие свойства операторов A_g:

1°. Если разложение функции $f(z) \in \mathfrak{A}(G)$ в ряд Тэйлора имеет вид $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, то для $A_q f(z)$ оно имеет вид

$$A_q f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{sn+q}\, z^{sn+q}. \tag{8}$$

Действительно, так как $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(p-q)} = \delta_{qp}$, то

$$A_q f(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-qj} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} a_{sn+p}\, z^{sn+p}\, \omega^{jp} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} a_{sn+p}\, z^{sn+p} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(p-q)} \right) = \sum_{s=0}^{\infty} a_{sn+q}\, z^{sn+q}.$$

2°. Операторы A_q перестановочны с D^n в $\mathfrak{A}(G)$. Из свойства 1° легко следует, что

3°. $A_q^2 = A_q$, $0 \leqslant q \leqslant n-1$;

4°. $A_q A_p = 0$, $\quad q \neq p$;

5°. $\sum_{q=0}^{n-1} A_q = E$ (E — единичный оператор).

Переходим к доказательству теоремы 1.

Достаточность условий этой теоремы очевидна, так как (в силу свойства 2°) $A_q D^n = D^n A_q$, а условие (6) и оценки Коши для производных аналитической функции обеспечивают сходимость в $\mathfrak{A}(G)$ ряда $\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\,q} D^{sn+q-p}$ в сильной операторной топологии.

Доказательство *необходимости*.

Лемма 1. *Если линейные непрерывные операторы A и B перестановочны в $\mathfrak{A}(G)$, то сопряженные операторы A^* и B^* перестановочны в $\mathfrak{A}(CG)$.*

Таким образом, в силу леммы, задача описания всех перестановочных с оператором D^n операторов в $\mathfrak{A}(G)$ сводится к описанию линейных непрерывных операторов в $\mathfrak{A}(CG)$ перестановочных с оператором $(D^*)^n = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}$.

Преобразуем множество $\mathfrak{A}(CG)$ в множество целых функций преобразованием Бореля

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C_R)} \varphi(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta, \quad \varphi(z) \in \mathfrak{A}(CG), \tag{9}$$

C_R — окружность радиуса R, содержащая G. Преобразование (9) взаимно однозначно отображает $\mathfrak{A}(CG)$ на некоторое множество Z, все элементы которого являются целыми функциями класса $[1, R]$ [4].

Обозначим через k топологию компактной сходимости в Z и через τ — топологию, перенесенную в Z из $\mathfrak{A}(CG)$ преобразованием (9). Таким образом, преобразование (9) является изоморфизмом между локально выпуклыми пространствами (Z, τ) и $\mathfrak{A}(CG)$. Из неравенства

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C_R)} \varphi(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta \right| \leqslant Re^{R|z|} \max_{|z|=R} |\varphi(z)| \tag{10}$$

следует, что топология τ сильнее k.

Функции вида z^{-k}, $k \geqslant 1$, принадлежат $\mathfrak{A}(CG)$ и переводятся преобразованием Бореля в функции $\frac{z^k}{k!}$. Так как пространство, сопряженное к $\mathfrak{A}(CG)$, изоморфно пространству $\mathfrak{A}(G)$ [1], то легко показать, что линейный непрерывный функционал, равный нулю на функциях z^{-k}, $k \geqslant 1$, является нулевым. Значит, система $\{z^{-k}\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $\mathfrak{A}(CG)$. Тогда система $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ будет полной в (Z, τ) и, таким образом, имеет место.

Лемма 2. *Многочлены образуют в (Z, τ) плотное подмножество.*

Посмотрим теперь, во что перейдет оператор D^* при преобразовании (9). Проинтегрируем равенство

$$\frac{d}{d\zeta}(\varphi(\zeta) e^{z\zeta}) = \left(\frac{d}{d\zeta}\varphi(\zeta)\right) e^{z\zeta} + z\varphi(\zeta) e^{z\zeta}, \quad \varphi(z) \in \mathfrak{A}(CG)$$

по контуру C_R по переменной ζ. Тогда получим, что

$$\oint\limits_{(C_R)} \left(\frac{d}{d\zeta}\varphi(\zeta)\right) e^{z\zeta} d\zeta + z \oint\limits_{(C_R)} \varphi(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta = 0,$$

т. е.

$$z \oint\limits_{(C_R)} \varphi(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta = \oint\limits_{(C_R)} D^*\varphi(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta. \tag{11}$$

Если обозначить преобразование Бореля через B, то (11) принимает вид

$$zB\varphi(z) = BD^*\varphi(z), \tag{12}$$

т. е. D^* переходит в оператор умножения на z и $(D^*)^n$ — в оператор умножения на z^n. В дальнейшем оператор умножения на функцию $t(z)$ в Z будем обозначать $Q_{t(z)}$, т. е. $Q_{t(z)}\Phi(z) = t(z)\Phi(z)$.

Наша задача описания операторов в $\mathfrak{A}(G)$, перестановочных с D^n, перешла, таким образом, в задачу описания линейных непрерывных операторов в (Z, τ), перестановочных с оператором Q_z^n.

Выясним еще, во что перейдут при двойном преобразовании операторы A_q и оператор интегрирования I.

Будем обозначать оператор в (Z, τ), полученный в результате двойного преобразования линейного непрерывного в $\mathfrak{A}(G)$ оператора T, через $\tilde{T}$.

Найдем вид оператора, сопряженного к A_q. Пусть $f(z)$ принадлежит $\mathfrak{A}(G)$, $\varphi(z)$ принадлежит $\mathfrak{A}(CG)$ и контур Γ, инвариантный относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$, лежит в общей области аналитичности функций $f(z)$ и $\varphi(z)$.

Тогда имеем

$$(A_q f(z), \varphi(z)) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-qj}\oint_{(\Gamma)} f(\omega^j\zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-(q+1)j}\oint_{(\Gamma)} f(\eta)\varphi(\omega^{-j}\eta)\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{(\Gamma)} f(\eta)\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-(q+1)j}\varphi(\omega^{-j}\eta)\right\}d\eta.$$

Таким образом, $A_q^*\varphi(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-(q+1)j}\varphi(\omega^{-j}z)$. Покажем, что преобразование Бореля переводит оператор A_q^* в оператор $\tilde{A}_q\Phi(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-qj}\Phi(\omega^j z)$, $\Phi(z) \in Z$. Действительно,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(C_R)} A_q^*\varphi(\zeta)e^{\zeta z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-(q+1)j}\oint_{(C_R)}\varphi(\omega^{-j}\zeta)e^{\zeta z}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-qj}\oint_{(C_R)}\varphi(\eta)e^{\eta\omega^j z}\,d\eta = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-qj}\Phi(\omega^j z),$$

где $\Phi(z) = B\varphi(z)$.

Определим теперь, во что перейдет при двойном преобразовании оператор интегрирования I. Так как I удовлетворяет соотношениям

$$IDf(z) = f(z) - f(o), \quad DIf(z) = f(z), \quad f(z) \in \mathfrak{A}(G), \tag{13}$$

то оператор $\tilde{I}$ удовлетворяет соотношениям

$$Q_z\tilde{I}\Phi(z) = \Phi(z) - \Phi(o), \quad \tilde{I}Q_z\Phi(z) = \Phi(z), \tag{14}$$

где $\Phi(z) \in Z$. Из (14) заключаем, что

$$\tilde{I}\Phi(z) = \frac{\Phi(z) - \Phi(o)}{z}. \tag{15}$$

Приступим к описанию линейных непрерывных операторов в (Z, τ), перестановочных с Q_z^n.

Пусть $\tilde{T}$ перестановочен с Q_z^n в (Z, τ). Оператор $\tilde{T}_{pq} = \tilde{I}^q \tilde{A}_q \tilde{T} Q^p \tilde{A}_0$ перестановочен в (Z, τ) с оператором Q_z^n, так как каждый из операторов $\tilde{I}^q \tilde{A}_q$, $\tilde{T}$, Q_z^p и $\tilde{A}_0$ перестановочен с Q_z^n.

Пусть $P(z)$ — полином из подпространства $Z_0 = \tilde{A}_0 Z$. Тогда $P(z) = \sum_{s=0}^{m} p_s z^{sn}$ и $\tilde{T}_{pq} P(z) = \sum_{s=0}^{m} p_s \tilde{T}_{pq} z^{sn} = P(z)\tilde{T}_{pq}(1) = P(z)\Psi_{pq}(z)$,
где $\Psi_{pq}(z) = \tilde{T}_{pq}(1)$.

По виду оператора $\tilde{T}_{pq}$ легко убедиться, что $\Psi_{pq}(z) \in Z_0$. Пусть теперь $f(z)$ — произвольная функция из Z_0. Тогда по лемме 2 существует такая последовательность многочленов $P_k(z) \in Z_0$, что $f(z) = \tau - \lim_k P_k(z)$. Следовательно,

$$\tilde{T}_{pq} f(z) = \tau - \lim_k \tilde{T}_{pq} P_k(z) = \tau - \lim_k P_k(z)\Psi_{pq}(z) =$$
$$= k - \lim_k P_k(z)\Psi_{pq}(z) = \Psi_{pq}(z) f(z)$$

и, в частности, $\tilde{T}_{pq}^k(1) = \Psi_{pq}^k(z)$.

Пусть тип функции $\Psi_{pq}(z)$ равен H. Покажем, что $H = 0$. Так как $\Psi_{pq}^k(z) \in Z$, то ее тип не превышает R. Но, с другой стороны, ее тип равен kH. Из неравенства $kH \leqslant R$, $k = 1, 2, \ldots,$ заключаем, что $H = 0$. Если $\Psi_{pq}(z)$ представить в виде $\Psi_{pq}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\,q} z^{sn}$, то

$$\lim_k \sqrt[k]{|t_{kq}|\, k!} = 0, \quad 0 \leqslant q \leqslant n-1. \tag{16}$$

Так как $\tilde{A}_0 f(z) \in Z_0$, то

$$\tilde{T}_{pq} f(z) = \Psi_{pq}(z)\tilde{A}_0 f(z), \quad f(z) \in Z. \tag{17}$$

В силу (16) и (17) оператор $\tilde{T}_{pq}$ может быть представлен в виде

$$\tilde{T}_{pq} = \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\,q} Q_z^{sn}\Big)\tilde{A}_0, \tag{18}$$

причем ряд $\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\,q} Q_z^{sn}$ сходится в сильной операторной топологии. Умножим обе стороны (18) слева на Q_z^q. В силу свойства 1° операторов A_q имеет место равенство $Q_z^q \tilde{I}^q \tilde{A}_q = \tilde{A}_q$, и поэтому

$$\tilde{A}_q \tilde{T} Q_z^p \tilde{A}_0 = Q_z^q \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\,q} Q_z^{sn}\Big)\tilde{A}_0. \tag{19}$$

Умножим (19) справа на $\tilde{I}^p \tilde{A}_p$. Учитывая равенство $\tilde{A}_0 \tilde{I}^p \tilde{A}_p = \tilde{I}^p \tilde{A}_p$, получим

$$\tilde{A}_q \tilde{T} \tilde{A}_p = Q_z^q \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\,q} Q_z^{sn}\Big)\tilde{I}^p \tilde{A}_p \quad (q,\ p = 0, \ldots, n-1). \tag{20}$$

Просуммировав равенства (20) по p и q, учитывая при этом свойство 5° операторов A_q, получим

$$\tilde{T} = \sum_{p,\, q=0}^{n-1} Q_z^q \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} Q_z^{sn} \Big) \tilde{I}^p \tilde{A}_p. \tag{21}$$

Приведем теперь формулу (21) к виду, удобному для перехода в $\mathfrak{A}(G)$. Очевидно,

$$\tilde{T} = \sum_{p,q=0}^{n-1} Q_z^q \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} Q_z^{sn} \Big) \tilde{I}^p \tilde{A}_p = \sum_{p,\, q=0}^{n-1} \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} Q_z^{sn+q-p} \Big) \tilde{A}_p =$$

$$= \sum_{p,\, q=0}^{n-1} \tilde{A}_q \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} Q_z^{sn+q-p} \Big) \tilde{A}_p.$$

В последнем выражении Q_z^{sn+q-p} при $s=0$ и $q<p$ заменяем на $\tilde{I}^{p-q}$. В итоге получаем, что

$$\tilde{T} = \sum_{p,\, q=0}^{n-1} \tilde{A}_q \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} Q_z^{sn+q-p} \Big) \tilde{A}_p. \tag{22}$$

Формула (22) при переходе в $\mathfrak{A}(CG)$ дает

$$T^* = \sum_{p,\, q=0}^{n-1} A_q^* \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} D^{*\, sn+q-p} \Big) A_p^*.$$

Переходя затем к $\mathfrak{A}(G)$, мы получим, что каждый линейный непрерывный перестановочный с D^n оператор T необходимо имеет вид

$$T = \sum_{p,\, q=0}^{n-1} \tilde{A}_p \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} D^{sn+q-p} \Big) A_q$$

и удовлетворяет условию (16) (D^{n+q-p} при $s=0$ и $q<p$ заменяется на I^{p-q}). Если теперь учесть, что

$$A_p \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} D^{sn+q-p} \Big) A_q = \Big(\sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q} D^{sn+q-q} \Big) A_q,$$

то придем к необходимым условиям (4) и (6) теоремы 1.

Теорема 1 дает нам возможность каждому линейному непрерывному перестановочному с D^n оператору T поставить в соответствие матрицу функций $\| \Psi_{pq}(z) \|_{p,\, q=0}^{n-1}$.

Так как операторы

$$\tilde{T}_1 = \sum_{p,\, q=0}^{n-1} Q_z^q \Psi_{pq}^{(1)}(z) \tilde{I}^p \tilde{A}_p$$

и

$$\tilde{T}_2 = \sum_{k,\, l=0}^{n-1} Q_z^l \Psi_{kl}^{(2)}(z) \tilde{I}^k \tilde{A}_k$$

вида (21) перестановочны с оператором Q_z^n в (Z, τ), то и их произведение $\tilde{T}_1 \tilde{T}_2$ также обладает этим свойством.

Покажем, что соответствующая ему по теореме 1 матрица функций $\| \Psi_{kq}(z) \|_{k,\, q=0}^{n-1}$ равна произведению матриц

$$\| \Psi_{kl}^{(2)}(z) \|_{k,\, l=0}^{n-1} \text{ и } \| \Psi_{pq}^{(1)}(z) \|_{p,\, q=0}^{n-1}.$$

Действительно, в силу свойства 4° операторов A_q

$$\tilde{A}_p\tilde{T}_2 = \sum_{k=0}^{n-1} Q_z^p\Psi_{kp}^{(2)}(z)\tilde{I}^k\tilde{A}_k, \quad 0 \leqslant p \leqslant n-1,$$

и так как $\tilde{I}^pQ_z^p = E$, $0 \leqslant p \leqslant n-1$, получаем

$$\tilde{T}_1\tilde{T}_2 = \sum_{p,\, q,\, k=0}^{n-1} Q_z^q\Psi_{pq}^{(1)}(z)\,\Psi_{kp}^{(2)}(z)\,\tilde{I}^kA_k =$$

$$= \sum_{k,\, q=0}^{n-1} Q_z^q\Big(\sum_{p=0}^{n-1} \Psi_{kp}^{(2)}(z)\,\Psi_{pq}^{(1)}(z)\Big)\tilde{I}^k\tilde{A}_k.$$

Таким образом,

$$\Psi_{kq}(z) = \sum_{p=0}^{n-1} \Psi_{kp}^{(2)}(z)\,\Psi_{pq}^{(1)}(z), \quad k,\ q = 0, \ldots, n-1.$$

Легко видеть, что единичному оператору по теореме 1 соответствует единичная матрица и для того, чтобы оператор $\tilde{T}$ вида (21) был изоморфизмом (Z, τ), необходимо, чтобы

$$\det \| \Psi_{pq}(z) \|_{p,\, q=0}^{n-1} \neq 0.$$

Так как $\det \| \Psi_{pq}(z) \|_{p,\, q=0}^{n-1}$ — целая функция класса [1, 0], то

$$\det \| \Psi_{pq}(z) \|_{p,\, q=0}^{n-1} \equiv \mathrm{const} \neq 0. \tag{23}$$

Это условие, очевидно, достаточно для того, чтобы оператор T был изоморфизмом (Z, τ). Но операторы T и $\tilde{T}$ являются изоморфизмами одновременно. Таким образом доказана

Теорема 2. *Для того, чтобы линейный оператор T был изоморфизмом $\mathfrak{A}(G)$, перестановочным с D^n, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид (4) и удовлетворял условиям (6) и (23), где в (23)*

$$\Psi_{pq}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} t_{sn+p,\, q}z^{sn}, \quad p,\ q = 0, \ldots, n-1.$$

Замечание 3. Аналогично тому, как это сделано в [3], можно получить описание изоморфизмов $\mathfrak{A}(G)$, перестановочных с D^n в виде, предложенном Дельсартом и Лионом [5].

Замечание 4. Аналогичные теоремы без существенных изменений в доказательстве можно получить в пространстве $\mathfrak{A}(F)$ [1], где F — ограниченное связное с связным дополнением, замкнутое, переходящее в самое себя при повороте на угол $\frac{2\pi}{n}$ множество.

В заключение приношу благодарность К. М. Фишману и Н. И. Нагнибиде за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Köthe. Dualität in der Funktionentheorie, J. f. reine und angew. Math., 191, 30—49, 1953.

2. Н. И. Нагнибида. К вопросу об изоморфизмах аналитического пространства, перестановочных со степенью оператора дифференцирования. ДАН СССР, т. 167, № 6, 1966, 1230—1233.

3. Н. И. Нагнибида. Об изоморфизмах аналитических пространств, перестановочных с оператором дифференцирования. «Матем. сб.», т. 72 (114), № 2, 1967, 250—260.

4. Л. Бибербах. Аналитическое продолжение. Изд-во «Наука», М., 1967.

5. J. Delsartes et Lions. Transmutations d'ope'rateurs differentieles daus le domaine complexe, Comment. Math. Helv., 32, N 2, 113—128, 1957.

Поступила 18 марта 1969 г.