ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

11 1970

ОБ H-СВОЙСТВЕ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. А. Седаев

Работа посвящена изучению H-свойства (см. определение 1) в симмет-ых пространствах относительно линеалов, заключенных между L_∞ ойственным пространством.

М. И. Кадец доказал существование эквивалентной нормы, обладаю- H-свойством, для любого сепарабельного пространства [1]. Однако чае симметричных пространств эта норма не симметрична.

Определение 1. *Говорят, что банахово пространство E обла- H-свойством относительно линеала $\Gamma \subset E^*$, если из того, что*

1) $x_n \underset{\Gamma}{\rightarrow} x$ (т. е. $f(x_n) \to f(x)$ при $f \in \Gamma$);

2) $\|x_n\|_E \to \|x\|_E$,

ет сильная сходимость $x_n \to x$ (E^* — сопряженное пространство).

Определение 2. *Банахово пространство E измеримых функций, еделенных на отрезке $[0,1]$ называется симметричным, если выполнены аксиомы:*

1) если $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ и $y \in E$, то $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

2) если $x(t)$ равноизмерима с $y(t)$, то $\|x\|_E = \|y\|_E$.

ноизмеримость двух функций $x(t)$ и $y(t)$ означает выполнение для всех τ енств $\operatorname{mes}\{t : x(t) > \tau\} = \operatorname{mes}\{t : y(t) > \tau\}$. Равноизмеримость будем обо-чать знаком $\sim$.

Двойственное пространство E' симметричного пространства E есть ба-ово пространство измеримых на $[0,1]$ функций, для которых конечна ма

$$\|y\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E = 1} \int_0^1 y(t)\, x(t)\, dt.$$

Через $\varkappa_e(t)$ или просто $\varkappa_e$ будем обозначать характеристическую функ- измеримого множества e.

Функция $\varphi_E(s) = \|\varkappa_{[0,\, s]}\|_E$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, называется фундаментальной кцией симметричного пространства E.

Нам понадобятся несколько свойств симметричных пространств, дока-ельство которых можно найти в работах Е. М. Семенова [2, 3].

Для симметричных пространств имеют место непрерывные вложения $0,1] \supseteq E \supseteq L_\infty [0,1]$.

Симметричное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда ма любого элемента x пространства абсолютно непрерывна, т. е. $\|x\varkappa_e\|_E \to 0$ $\operatorname{mes} e \to 0$.

Двойственное пространство E' симметричного пространства E симмет-но.

Если E сепарабельно, то $E' = E^*$, где E^* — сопряженное пространство.

Для сепарабельных симметричных пространств имеет место формула

$$\|x\|_E = \sup_{\varphi \in \Phi} \int_0^1 x^*(t)\, \varphi'(t)\, dt, \qquad (1)$$

где Φ — некоторое множество возрастающих, вогнутых и непрерывн функций $\varphi(t)$, $t\in[0,1]$, $\varphi(0)=0$. Такое множество будем называть н мирующим.

Из формулы (1) *видно, что сепарабельное пространство E всегда об* дает свойством Фату, т. е. из сходимости $x_n(t)\to x(t)$ почти всюду и $x_n(t)\leqslant x_{n+1}(t)$ следует, что $\lim\|x_n\|_E=\|x\|_E$.

Под перестановкой $x^*(t)$ некоторой функции $x(t)$ будем понимать н возрастающую неотрицательную функцию, равноизмеримую с $|x(t)|$. Д любого $0\leqslant s\leqslant 1$ выполняется равенство

$$\int_0^s x^*(t)\,dt=\sup_{\operatorname{mes} e=s}\int_e |x(t)|\,dt$$

п° 1. Рассматриваются симметричные пространства Лоренца [4] $\Lambda(\varphi)$ н отрезке $[0,1]$.

Они полностью определяются своей фундаментальной функцией $\varphi($ которую будем предполагать возрастающей, вогнутой и непрерывной, $\varphi(0)=$

В этом случае пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ есть банахово пространст измеримых на $[0,1]$ функций, для которых конечна норма

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)}=\int_0^1 x^*(t)\,d\varphi(t).$$

Непрерывность $\varphi(t)$ в нуле влечет сепарабельность $\Lambda(\varphi)$.

Доказывается важная для дальнейшего теорема 1, дающая прост критерий существования H-свойства в пространствах Лоренца $\Lambda(\varphi)$. О утверждает, что норма пространства $\Lambda(\varphi)$ обладает H-свойством относ тельно линеала Γ, $L_\infty\subseteq\Gamma\subseteq\Lambda'(\varphi)$, тогда и только тогда, когда фундаме тальная функция $\varphi(t)$ строго вогнута.

Поскольку пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ сепарабельно, двойственн пространство $\Lambda'(\varphi)$ совпадает с сопряженным. В силу этого функциона на $\Lambda(\varphi)$ имеют вид

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt.$$

Сопряженное пространство $\Lambda^*(\varphi)$ называют пространством Марцинкеви и обозначают $M(\varphi)$. Его норма имеет вид

$$\|y\|_{M(\varphi)}=\sup_{0\leqslant h\leqslant 1}\frac{\int_0^h y^*(t)\,dt}{\varphi(h)}.$$

Известна также формула

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)}=\sup_{h\sim\varphi'}\int_0^1 |x(t)|\,h(t)\,dt,$$

где sup всегда достигается на множестве функций $h(t)$, равноизмерим с $\varphi'(t)$.

Пусть $\delta\in(0,1)$. Обозначим через $\varphi_\delta(t)$ непрерывную функцию

$$\begin{cases} t\varphi'(\delta), & 0\leqslant t\leqslant\delta,\\ \delta\varphi'(\delta)-\varphi(\delta)+\varphi(t), & \delta\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

роизводная имеет вид

$$\varphi_\delta'(t) = \begin{cases} \varphi'(\delta), & 0 \leqslant t \leqslant \delta, \\ \varphi'(t), & \delta \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

кольку $\varphi_\delta'(t)$ меньше $\varphi'(t)$, то любой x из $\Lambda(\varphi)$ принадлежит $\Lambda(\varphi_\delta)$ $x\|_{\Lambda(\varphi)} \geqslant \|x\|_{\Lambda(\varphi_\delta)}$.

Легко показать, основываясь на сепарабельности $\Lambda(\varphi)$, что $\|x\|_{\Lambda(\varphi_\delta)} \to$ $x\|_{\Lambda(\varphi)}$ при $\delta \to 0$ для любого $x \in \Lambda(\varphi)$.

Для краткости будем обозначать $\|x\|_{\Lambda(\varphi)}$ через $\|x\|$, а $\|x\|_{\Lambda(\varphi_\delta)}$ че- $x\|_\delta$.

Поскольку функция φ_δ имеет ограниченную вариацию, интегрируя по тям, получим

$$\|x\|_\delta = \int_0^1 x^*(t)\,\varphi_\delta'(t)\,dt = \int_0^s x^*(t)\,dt\,\varphi_\delta'(s)\Big|_0^1 - \int_0^1\int_0^s x^*(t)\,dt\,d\varphi_\delta(s),$$

$$\|x\|_\delta = \int_0^1 |x(t)|\,dt\,\varphi_\delta'(1) - \int_0^1\int_0^s x^*(t)\,dt\,d\varphi_\delta'(s). \tag{4}$$

Формула (4) вместе с (2) является основной при доказательстве тео- мы 1.

С помощью формулы (2) доказываются основные неравенства (10) и (11), торые вместе с формулой (4) показывают, что если $x_n \xrightarrow[L_\infty]{} x$, но $x_n \nrightarrow x$ льно, то $\overline{\lim}\|x_n\| > \|x\|$, а это эквивалентно утверждению теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть $e \subset [0, 1]$ — измеримое множество и $x(t)$ — некото- функция из $\Lambda(\varphi)$, тогда*

$$\sup_{h \sim \varphi'\chi_{[\mathrm{mes}\,e,\ 1]}} \int_{ce} |x(t)|\,h(t)\,dt \geqslant \|x\| - \|x^*\chi_{[0,\ \mathrm{mes}\,e]}\|.$$

Доказательство. Имеем

$$-\|x^*\chi_{[0,\ \mathrm{mes}\,e]}\| = \int_0^1 x^*(t)\,\varphi'(t)\,dt - \int_0^{\mathrm{mes}\,e} x^*(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\mathrm{mes}\,e}^1 x^*(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

силу теоремы о перестановках [6]

$$\int_{\mathrm{mes}\,e}^1 x^*(t)\,\varphi'(t)\,dt = \inf_{\substack{u \\ \mathrm{mes}\,u\,=\,\mathrm{mes}\,e}} \sup_{h \sim \varphi'\chi_{[\mathrm{mes}\,e,\ 1]}} \int_{cu} |x(t)|\,h(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{h \sim \varphi'\chi_{[\mathrm{mes}\,e,\ 1]}} \int_{ce} |x(t)|\,h(t)\,dt.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть задана последовательность функций $y_n \in \Lambda(\varphi)$ и та- последовательность чисел $\tau_n > 0$, что $\tau_n \to 0$ и меры множеств $e_n = \{t : |y_n(t)| \geqslant \tau_n\}$ стремятся к нулю. Тогда для любого $x \in \Lambda(\varphi)$,* $\|x + y_n\| = \|x\| + \|y_n\| + 0(1)$.

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\|y_n\| = \|y_n\chi_{e_n}\| + o(1). \tag{5}$$

Действительно, найдется $h_n \sim \varphi'(t)$, что по формуле (3)

$$\| y_n \| = \sup_{h \sim \varphi'} \int_0^1 | y_n(t) | h(t)\, dt = \int_0^1 | y_n(t) | h_n(t)\, dt = \int_{e_n} | y_n(t) | h_n(t)\, dt +$$

$$+ \int_{ce_n} | y_n(t) | h_n(t)\, dt.$$

По теореме о перестановках имеем

$$\int_{e_n} | y_n(t) | h_n(t)\, dt = \sup_{h \sim \varphi' \varkappa_{[0,\ \mathrm{mes}\, e_n]}} \int_{e_n} | y_n(t) | h(t)\, dt, \tag{6}$$

$$\int_{ce_n} | y_n(t) | h_n(t)\, dt = \sup_{h \sim \varphi' \varkappa_{[\mathrm{mes}\, e_n\ 1]}} \int_{ce_n} | y_n(t) | h(t)\, dt. \tag{7}$$

Следовательно, $\int_{e_n} | y_n(t) | h_n(t)\, dt = \| y_n \varkappa_{e_n} \|$, а $\int_{ce_n} | y_n(t) | h_n(t)\, dt \leqslant \int_0^1 \tau_n | h_n(t) | dt =$

$$= \tau_n \varphi(1) = o(1).$$

Определим теперь $p_n(t) \sim \varphi'(t) \varkappa_{[\mathrm{mes}\, e_n,\ 1]}(t)$ равенством

$$\int_{ce_n} | x(t) | p_n(t)\, dt = \sup_{p \sim \varphi' \varkappa_{[\mathrm{mes}\, e_n,\ 1]}} \int_{ce_n} | x(t) | p(t)\, dt.$$

В силу леммы 1 и абсолютной непрерывности интеграла

$$\| x \| - \int_{ce_n} | x(t) | p_n(t)\, dt \leqslant \int_0^{\mathrm{mes}\, e_n} x^*(t) \varphi'(t)\, dt \to 0.$$

Следовательно,

$$\int_{ce_n} | x(t) | p_n(t)\, dt = \| x(t) \| + 0(1). \tag{8}$$

Оценим, наконец, $\| x + y_n \|$.

Пусть $q_n = \begin{cases} h_n(t) & t \in e_n \\ p_n(t) & t \in ce_n \end{cases}, \quad q_n(t) \sim \varphi'(t).$

По формуле (3) имеем неравенство

$$\| x + y_n \| \geqslant \int_0^1 | x(t) + y_n(t) | q_n(t)\, dt = \int_{e_n} | x(t) + y_n(t) | q_n(t)\, dt +$$

$$+ \int_{ce_n} | x(t) + y_n(t) | q_n(t)\, dt. \tag{9}$$

Первый интеграл оценивается следующим образом:

$$\int_{e_n} | x(t) + y_n(t) | h_n(t)\, dt \geqslant \int_{e_n} (| y_n(t) | - | x(t) |)\, h_n(t)\, dt =$$

$$= \int_{e_n} | y_n(t) | h_n(t) |\, dt - \int_{e_n} | x(t) | h_n(t)\, dt.$$

Но $\int_{e_n} | x(t) | h_n(t)\, dt \leqslant \int_0^{\mathrm{mes}\, e} x^*(t) \varphi'(t)\, dt \to 0$ и, учитывая (6), получаем

$$\int_{e_n} | x(t) + y_n(t) | h_n(t)\, dt = \| y_n \varkappa_{e_n} \| + o(1).$$

но, оценивая второй интеграл в формуле (9), получаем

$$\int\limits_{ce_n} |x(t)+y_n(t)|\,q_n(t)\,dt = \int\limits_{ce_n} |x(t)|\,p_n(t)\,dt + o(1).$$

вая (5), (8), (9) и неравенство треугольника, получаем

$$\|x+y_n\| = \|x\| + \|y_n\| + o(1).$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь две суммируемые функции $x(t)$, $y(t)$ на $[0, 1]$. Пусть положительна и τ — некоторое число, большее нуля.

Зведем обозначения $e^+ = \{t : y^+(t) > 2\tau\}$, $e^- = \{t : y^-(t) > 2\tau\}$. Пусть $p \in (0,1)$ торое число и пусть целое m удовлетворяет неравенству $\tau m > x^*(p)$. ем такое $E_m \subset [0,1]$, что $\mathrm{mes}\,E_m = p$ и

$$\int\limits_{E_m} x(t)\,dt = \int\limits_0^p x^*(t)\,dt.$$

начим через E_i множества $\{t \overline{\in} E_m;\ i\tau < x(t) \leqslant (i+1)\tau\}$, $i = 0,1,\ldots m-1$. жества E_k, $k = 0, 1 \ldots m$ покрывают отрезок $[0, 1]$ и, следовательно, $(\sum\limits_0^{m-1} E_i) = \sum\limits_0^{m-1} \mathrm{mes}\,E_i = 1 - \mathrm{mes}\,E_m = 1 - p$. Обозначим $\min\limits_{\substack{i \neq m \\ \mathrm{mes}\,E_i \neq 0}} (\mathrm{mes}\,E_i)$ че- α, а через c_k меру множества

$$M_k = \sum_k^m E_i,\ k = 0, 1, \ldots m.$$

Лемма 3. Если $\mathrm{mes}\,e^+ > 2p$, *то найдется* такое $k \leqslant m$, *что для любого* $< \sigma < p\alpha$, *имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^{c_k+\sigma} (x+y)^*\,dt \geqslant \int\limits_0^{c_k+\sigma} x^*\,dt + \tau\sigma + \int\limits_{M_k} y\,dt, \tag{10}$$

же $\mathrm{mes}\,e^- > 2p$, то найдется такое $k \leqslant m$, что для любого σ, $0 < \sigma < p\alpha$ полняется неравенство

$$\int\limits_0^{c_{k-1}-\sigma} (x+y)^*\,dt \geqslant \int\limits_0^{c_{k-1}-\sigma} x^*\,dt + \tau\sigma + \int\limits_{M_k} y\,dt. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{mes}\,e^+ > 2p$, тогда $\mathrm{mes}\,e^+ \cap (\sum\limits_0^{m-1} E_i) > p$. скольку $\mathrm{mes}(\sum\limits_0^{m-1} E_i) < 1$, то хотя бы одно $E_{k-1} \cap e^+$ имеет меру, большую $\mathrm{mes}\,E_{k-1}$. Отсюда $\mathrm{mes}\,E_{k-1} \neq 0$, $k \leqslant m$, а

$$\mathrm{mes}\,e^+ \cap E_{k-1} > p\,\mathrm{mes}\,E_{k-1} \geqslant p\alpha > \sigma.$$

меем по формуле (2)

$$\int^{-\sigma} (x+y)^*\,dt = \sup_{\mathrm{mes}\,e = c_k+\sigma} \int\limits_e |x+y|\,dt \geqslant \int\limits_{M_k} |x+y|\,dt + \sup_{\substack{\mathrm{mes}\,e=\sigma \\ e \subset E_{k-1}}} \int\limits_e |x+y|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{M_k} x\,dt + \int\limits_{M_k} y\,dt + \int\limits_u (x+y)\,dt, \tag{12}$$

де $u \subset E_{k-1} \cap e^+$ и $\mathrm{mes}\,u = \sigma$.

Поскольку $(k-1)\tau \leqslant x(t) \leqslant k\tau$, а $y(t) > 2\tau$ при $t \in u$, то

$$\int\limits_u (x+y)\,dt \geqslant (k+1)\tau\sigma \geqslant \sup_{\substack{e \subset E_{k-1} \\ \operatorname{mes} e = \sigma}} \int\limits_e x\,dt + \tau\sigma. \tag{13}$$

По определению множеств M_k и E_{k-1}, учитывая равенство (2), имеем

$$\int\limits_{M_k} x\,dt + \sup_{\substack{e \subset E_{k-1} \\ \operatorname{mes} e = \sigma}} \int\limits_e x\,dt = \int\limits_0^{c_k+\sigma} x^*\,dt. \tag{14}$$

Объединяя (12), (13) и (14), получаем неравенство (10).

Рассмотрим теперь случай $\operatorname{mes} e^- > 2p$. Аналогично предыдущему найдется $k \leqslant m$, что $\operatorname{mes} e^- \bigcap E_{k-1} > \sigma$. В силу этого

$$\int\limits_0^{c_{k-1}-\sigma} (x+y)^*\,dt \geqslant \int\limits_{M_k} |x+y|\,dt + \sup_{\substack{e \subset E_{k-1} \\ \operatorname{mes} e = \operatorname{mes} E_{k-1}-\sigma}} \int\limits_e |x+y|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{M_k} x\,dt + \int\limits_{M_k} y\,dt + \int\limits_{E_{k-1}-u} (x+y)\,dt,$$

где $u \subset e^- \bigcap E_{k-1}$, $\operatorname{mes} u = \sigma$. Поскольку

$$\int\limits_{E_{k-1}-u} (x+y)\,dt = \int\limits_{E_{k-1}} (x+y)\,dt - \int\limits_u (x+y)\,dt, \quad (k-1)\tau \leqslant x(t) \leqslant k\tau$$

и $y(t) < -2\tau$ при $t \in u$, то

$$\int\limits_u (x+y)\,dt \leqslant (k-2)\tau\sigma \leqslant \inf_{\substack{e \subset E_{k-1} \\ \operatorname{mes} e = \sigma}} \int\limits_e x\,dt - \tau\sigma.$$

Отсюда

$$\int\limits_{E_{k-1}-u} (x+y)\,dt \geqslant \int\limits_{E_{k-1}} y\,dt + \tau\sigma + \int\limits_{E_{k-1}} x\,dt -$$

$$- \inf_{\substack{e \subset E_{k-1} \\ \operatorname{mes} e = \sigma}} \int\limits_e x\,dt = \int\limits_{E_{k-1}} y\,dt + \tau\sigma + \sup_{\substack{e \subset E_{k-1} \\ \operatorname{mes} e = \operatorname{mes} E_{k-1}-\sigma}} \int\limits_e x\,dt.$$

Объединяя полученные неравенства и учитывая, что

$$\int\limits_{M_k} x\,dt + \sup_{\substack{e \subset E_{k-1} \\ \operatorname{mes} e = \operatorname{mes} E_{k-1}-\sigma}} \int\limits_e x\,dt = \int\limits_0^{c_{k-1}-\sigma} x^*\,dt,$$

приходим к неравенству (11).

Лемма доказана.

Определим по $x(t) > 0$ и $s \in [0, 1]$ множество M_s $\operatorname{mes} M_s = s$ равенством

$$\int\limits_{M_s} x(t)\,dt = \sup_{\operatorname{mes} M = s} \int\limits_M x(t)\,dt.$$

Поскольку $(k-1)\tau \leqslant x(t) \leqslant k\tau$, а $y(t) > 2\tau$ при $t \in u$, то

$$\int_u (x+y)\,dt \geqslant (k+1)\tau\sigma \geqslant \sup_{\substack{e\subset E_{k-1}\\ \text{mes}\, e=\sigma}} \int_e x\,dt + \tau\sigma.$$

По определению множеств M_k и E_{k-1}, учитывая равенство (2), имее

$$\int_{M_k} x\,dt + \sup_{\substack{e\subset E_{k-1}\\ \text{mes}\, e=\sigma}} \int_e x\,dt = \int_0^{c_k+\sigma} x^*\,dt.$$

Объединяя (12), (13) и (14), получаем неравенство (10).

Рассмотрим теперь случай mes $e^- > 2p$. Аналогично предыдущему дется $k \leqslant m$, что mes $e^- \cap E_{k-1} > \sigma$. В силу этого

$$\int_0^{c_{k-1}-\sigma} (x+y)^*\,dt \geqslant \int_{M_k} |x+y|\,dt + \sup_{\substack{e\subset E_{k-1}\\ \text{mes}\, e=\text{mes}\, E_{k-1}-\sigma}} \int_e |x+y|\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{M_k} x\,dt + \int_{M_k} y\,dt + \int_{E_{k-1}-u} (x+y)\,dt,$$

где $u \subset e^- \cap E_{k-1}$, mes $u = \sigma$. Поскольку

$$\int_{E_{k-1}-u} (x+y)\,dt = \int_{E_{k-1}} (x+y)\,dt - \int_u (x+y)\,dt,\quad (k-1)\tau \leqslant x(t) \leqslant k$$

и $y(t) < -2\tau$ при $t \in u$, то

$$\int_u (x+y)\,dt \leqslant (k-2)\tau\sigma \leqslant \inf_{\substack{e\subset E_{k-1}\\ \text{mes}\, e=\sigma}} \int_e x\,dt - \tau\sigma.$$

Отсюда

$$\int_{E_{k-1}-u} (x+y)\,dt \geqslant \int_{E_{k-1}} y\,dt + \tau\sigma + \int_{E_{k-1}} x\,dt -$$

$$- \inf_{\substack{e\subset E_{k-1}\\ \text{mes}\, e=\sigma}} \int_e x\,dt = \int_{E_{k-1}} y\,dt + \tau\sigma + \sup_{\substack{e\subset E_{k-1}\\ \text{mes}\, e=\text{mes}\, E_{k-1}-\sigma}} \int_e x\,dt.$$

Объединяя полученные неравенства и учитывая, что

$$\int_{M_k} x\,dt + \sup_{\substack{e\subset E_{k-1}\\ \text{mes}\, e=\text{mes}\, E_{k-1}-\sigma}} \int_e x\,dt = \int_0^{c_{k-1}-\sigma} x^*\,dt,$$

приходим к неравенству (11).

Лемма доказана.

Определим по $x(t) > 0$ и $s \in [0,\ 1]$ множество M_s mes $M_s = s$ равенств

$$\int_{M_s} x(t)\,dt = \sup_{\text{mes}\, M=s} \int_M x(t)\,dt.$$

Лемма 4. *Для любого* $y \in L_1[0,1]$ *функция* $\int\limits_{M_s} y\, dt$ *аргумента* s *непре- а.*

Доказательство. Если $s_1 > s_2$, то $M_{s_1} \supset M_{s_2}$ и mes $= s_1 - s_2$.

Итак,

$$\int\limits_{M_{s_1}} y\, dt - \int\limits_{M_{s_2}} y\, dt = \int\limits_{M_{s_1} - M_{s_2}} y\, dt$$

Утверждение следует в силу абсолютной непрерывности интеграла.

Заметим, что M_k есть M_{c_k} в новых терминах.

Лемма 5. *Если* $\psi(t)$ *строго вогнута на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\varepsilon' = \psi(b) - \psi(a) - (b - a)\psi'(b); \quad \varepsilon'' = \psi(a) - \psi(b) + (b - a)\psi'(a)$$

ого больше нуля.

Это непосредственно следует из определения вогнутости на языке производных и условия строгой вогнутости.

Теорема 1. *Пусть* $L_\infty[0,1] \subseteq \Gamma \subseteq M(\varphi)$. *Пространство Лоренца* $\Lambda(\varphi)$ *обладает* H*-свойством относительно* Γ *тогда и только тогда, когда фундаментальная функция* $\varphi(t)$ *строго вогнута.*

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку из $x_n \xrightarrow[M(\varphi)]{} x$ следует $x_n \to x$, то достаточно доказать необходимость нашего условия для $\Gamma = M(\varphi)$.

Предположим, что $\varphi(t)$ не строго вогнута, или при некоторых $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ $2\varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$. Рассмотрим функции Радемахера

$$X_n(t) = \begin{cases} 1 & \frac{2k}{2^n} \leqslant t < \frac{2k+1}{2^n} \\ -1 & \frac{2k+1}{2^n} \leqslant t < \frac{2(k+1)}{2^n} \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

По теореме Мерсера [5] для любой суммируемой функции $f(t)$, $X_n(t) f(t)\, dt \to 0$, следовательно, $X_n \xrightarrow[M(\varphi)]{} 0$. Введем функции

$$y_n(t) = \begin{cases} X_n\left(\frac{t - \alpha}{\alpha - \beta}\right) & t \in [\alpha, \beta] \\ 0 & t \overline{\in} [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Очевидно, $y_n \xrightarrow[M(\varphi)]{} 0$ и $\| y_n \| = \varphi(\beta - \alpha) \neq 0$.

Пусть $x(t) = \begin{cases} 2 \; t \in [0, \alpha] \\ 1 \; t \in [\alpha, \beta] \\ 0 \; t \in [\beta, 1]. \end{cases}$

Тогда $(x + y_n)^*(t) = \begin{cases} 2 \;\; t \in \left[0, \frac{\alpha + \beta}{2}\right] \\ 0 \;\; t \in \left[\frac{\alpha + \beta}{2}, 1\right], \end{cases}$

Следовательно, $\| x \| = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = 2\varphi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \| x + y_n \|$.

Итак, 1) $x + y_n \xrightarrow[M(\varphi)]{} x$; 2) $\| x + y_n \| = \| x \|$, но $\| y_n \| = \varphi(\beta - \alpha) \not\to 0$. Поэтому для того чтобы норма пространства $\Lambda(\varphi)$ обладала H-свойством относительно $M(\varphi)$, необходимо, чтобы $\varphi(t)$ была строго вогнута.

Достаточность. Поскольку в наших условиях $x_n \xrightarrow[\Gamma]{} x$ влечет $x_n \xrightarrow[L_\infty]{} x$, то из достаточности нашего условия для существования H-свойства относительно L_∞ будет следовать достаточность его и для H-свойства относительно любого $\Gamma \supseteq L_\infty$. В силу этого проведем доказательство для $\Gamma = L_\infty$.

Пусть $\varphi(t)$ строго вогнута, $y_n \in \Lambda(\varphi)$, $y_n \xrightarrow[L_\infty]{} 0$ и $\|y_n\| \geqslant \omega > 0$. Покажем, что каково бы ни было $x \in \Lambda(\varphi)$, $\|x + y_n\| \not\to \|x\|$. Если $x(t)$ не является неотрицательной функцией, то, применяя линейный оператор умножения на $\operatorname{sign} x(t)$, сохраняющий норму к последовательности $x_n = x + y_n$, мы перейдем к случаю $x(t) \geqslant 0$.

Итак, мы будем предполагать $x(t) \geqslant 0$. Возможны два случая: либо для любого $\tau > 0$ существует подпоследовательность y_{n_k}, что меры множеств $\operatorname{mes} e_{n_k} = \operatorname{mes}\{t : |y_{n_k}| > 2\tau\} \to 0$, либо найдется такое $\tau > 0$ и такое $p > 0$, что почти для всех n $\operatorname{mes} e_n = \operatorname{mes}\{t : |y_n| > 2\tau\} > 4p$.

В первом случае найдется такая последовательность $\tau_k \to 0$ и такая подпоследовательность y_{n_k}, что

$$\operatorname{mes} e_{n_k} = \operatorname{mes}\{t : |y_{n_k}| > \tau_k\} \to 0.$$

В силу леммы 2 $\|x + y_{n_k}\| = \|x\| + \|y_{n_k}\| + 0(1)$, но $\|y_{n_k}| \geqslant \omega > 0$, следовательно, $\|x_n\| \not\to \|x\|$.

Рассмотрим второй случай. Без ограничения общности будем предполагать, что $\operatorname{mes} e_n > 4p$ при всех n.

Поскольку $e_n = e_n^+ + e_n^-$, где $e_n^+ = \{t : y_n^+ > 2\tau\}$, $e_n^- = \{t : y_n^- > 2\tau\}$, то либо $\operatorname{mes} e_n^+$, либо $\operatorname{mes} e_n^-$ больше $2p$.

Пользуясь оценками леммы 3, мы найдем такое $\varepsilon > 0$, что при достаточно больших n выполняется неравенство $\|x_n\| > \|x\| + \varepsilon$, где $x_n = x + y_n$.

Пусть $\operatorname{mes} e_n^+ > 2p$ и $0 < \delta < 1$ некоторое число. Тогда верна оценка (10) из леммы 3 и при каждом n найдется $k \leqslant m$, что

$$\begin{aligned}\|x_n\|_\delta &= \int_0^1 |x + y_n|\, dt\, \varphi_\delta'(1) - \int_0^1 \int_0^s (x + y_n)^*\, dt\, d\varphi_\delta'(s) = \\ &= \int_0^1 |x + y_n|\, dt\, \varphi_\delta'(1) - \int\limits_{\subset [c_k,\, c_k + p\alpha]} \int_0^s (x + y_n)^*\, dt\, d\varphi_\delta'(s) - \\ &\quad - \int_0^{p\alpha} \int_0^{c_k + \sigma} (x + y_n)^*\, dt\, d\varphi_\delta'(c_k + \sigma),\end{aligned}$$

где c_k и α те же, что в лемме 3.

Заменяя $\int_0^s (x + y_n)^*\, dt$ на $\int_{M_s} (x + y_n)\, dt$, где $\operatorname{mes} M_s = s$, $\int_{M_s} x\, dt = \int_0^s x^*\, dt$, и пользуясь оценкой (10) из леммы 3, получаем неравенство

$$\begin{aligned}\|x_n\|_\delta &\geqslant \int_0^1 (x + y_n)\, dt\, \varphi_\delta'(1) - \int\limits_{\subset [c_k,\, c_k + p\alpha]} \int_0^s x^*\, dt\, d\varphi_\delta'(s) - \\ &- \int_{c_k}^{c_k + p\alpha} \int_0^s x^*\, dt\, d\varphi_\delta'(s) - \tau \int_0^{p\alpha} \sigma\, d\varphi_\delta'(c_k + \sigma) - \int\limits_{\subset [c_k,\, c_k + p\alpha]} \int_{M_s} y_n\, dt\, d\varphi_\delta'(s) -\end{aligned}$$

$$-\int\limits_{c_k}^{c_k+p\alpha}\int\limits_{M_{c_k}} y_n\,dt\,d\varphi_\delta'(s)=\int\limits_0^1 x\,dt\,\varphi_\delta'(1)-\int\limits_0^1\int\limits_0^s x^*\,dt\,d\varphi_\delta'(s)+$$

$$+\tau\,[\varphi_\delta(c_k+p\alpha)-\varphi_\delta(c_k)-p\alpha\varphi_\delta'(c_k+p\alpha)]-\int\limits_0^1\int\limits_{N_s} y_n\,dt\,d\varphi_\delta'(s)=$$

$$=\|x\|_\delta+\varepsilon_k'-\int\limits_0^1\int\limits_{N_s} y_n\,dt\,d\varphi_\delta'(s),$$

где

$$N_s=\begin{cases} M_s & s\,\bar{\in}\,[c_k,\ c_k+p\alpha] \\ M_{c_k} & s\in[c_k,\ c_k+p\alpha] \end{cases}$$

Если $\operatorname{mes} e_n^- > 2p$, то после анологичных преобразований получаем $\|x_n\|_\delta \geqslant$

$$\geqslant \|x\|_\delta+\varepsilon_k''-\int\limits_0^1\int\limits_{N_s} y_n\,dt\,d\varphi_\delta'(s),\ \text{где}$$

$$\varepsilon_k''=\tau\,[\varphi_\delta(c_{k-1}-p\alpha)-\varphi_\delta(c_{k-1})+p\alpha\varphi_\delta'(c_{k-1}-p\alpha)],\ k\leqslant m$$

$$N_s=\begin{cases} M_s & s\,\bar{\in}\,[c_{k-1}-p\alpha,\ c_{k-1}] \\ M_{c_k} & s\in[c_{k-1}-p\alpha,\ c_{k-1}]. \end{cases}$$

Возьмем $\delta < c_m$, тогда при $t > c_m$ $\varphi_\delta(t)$, отличаясь на постоянную от строго вогнутой $\varphi(t)$, будет строго вогнута. Поскольку при $k\leqslant m$ $c_k \geqslant c_m$ и $c_{k-1} - p\alpha \geqslant c_{k-1} - p \operatorname{mes} E_k \geqslant c_{k-1} - \operatorname{mes} E_k = c_k \geqslant c_m$, то в силу леммы 5 $\varepsilon = \min\limits_{0\leqslant k\leqslant m}(\varepsilon_k', \varepsilon_{k-1}'')$ больше нуля.

Итак, при любом n имеем

$$\|x_n\|_\delta \geqslant \|x\|_\delta+\varepsilon-\int\limits_0^1\int\limits_{N_s} y_n\,dt\,d\varphi_\delta'(s),$$

где N_s есть M_s или M_{c_k}, причем $N_s=M_{c_k}$ на некотором отрезке.

В силу леммы 4 $\int\limits_{N_s} y_n\,dt$ — измеримая функция и, поскольку $y_n \to 0$ слабо в $L_1[0, 1]$, $\int\limits_0^1 |y_n|\,dt$, а с ним и $\left|\int\limits_{N_s} y_n\,dt\right|$ равномерно по n ограничены, и при всех s $\int\limits_{N_s} y_n\,dt \to 0$.

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\int\limits_0^1\int\limits_{N_s} y_n\,dt\,d\varphi_\delta'(s)\to 0.$$

Выберем $\delta < c_m$ столь малым, что $\|x\|_\delta > \|x\| - \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда при достаточно большом n $\int\limits_0^1\int\limits_{N_s} y_n\,dt\,d\varphi_\delta'(s) < \frac{\varepsilon}{3}$ и

$$\|x_n\| \geqslant \|x_n\|_\delta \geqslant \|x\|_\delta+\varepsilon-\int\limits_0^1\int\limits_{N_s} y_n\,dt\,d\varphi_\delta'(s) \geqslant \|x\|+\frac{\varepsilon}{3},$$

что и требовалось доказать.

Анализ начала доказательства достаточности показывает, что предположение $\| y_n \| \geqslant \omega > 0$ существенно лишь в первом случае, ибо во втором неравенство

$$\operatorname{mes} e_n = \operatorname{mes} \{t : | y_n | > 2\tau\} > 4p$$

уже влечет неравенство $\| y_n \| \geqslant \omega$ для некоторого $\omega > 0$. В силу сказанного имеем

Следствие 1. *Если* $x_n \xrightarrow[L_\infty]{} x$, *то* $\varliminf_n \| x_n \| \geqslant \| x \|$.

Доказательство. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что $\lim_n \| x_n \| < \| x \|$.

Случай первый для последовательности $y_n = x_n - x$ исключается, ибо по лемме 2 $\lim_k \| x_{n_k} \| = \lim_k (\| x \| + \| y_{n_k} \|) = \lim \| y_{n_k} \| + \| x \| \geqslant \| x \|$ для любой подпоследовательности y_{n_k}.

Однако второй случай тоже исключается в силу самого доказательства теоремы 1.

Противоречие.

п° 2. Рассматривается случай общих симметричных пространств. Теорема 2 показывает, что несепарабельные симметричные пространства в естественных нормах не обладают H-свойством.

Совсем другая ситуация имеет место для сепарабельных симметричных пространств.

Хотя, как показывает теорема 3, не удается получить простой классификации на основе внешних свойств нормы, как в теореме 1, однако имеет место теорема 4. Она утверждает, что для любого сепарабельного симметричного пространства существует *эквивалентная симметричная норма*, которая обладает H-свойством относительно любого линеала Γ между L_∞ и двойственным пространством.

Теорема 2. *Если норма несепарабельного симметричного пространства E обладает свойством Фату, то она не обладает H-свойством относительно E'.*

Доказательство. Поскольку E несепарабельно, найдется функция $x(t) \in E$ что $\left\| x\varkappa_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} \right\|_E \not\to 0$. Для любого $f \in E'$

$$f\left(x - x\varkappa_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}\right) = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} x(t) f(t)\, dt \to \int\limits_{0}^{1} x(t) f(t)\, dt = f(x),$$

т. е. $x_n = x - x\varkappa_{\left[0, \frac{1}{n}\right]} \xrightarrow[E']{} x$. Поскольку $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ почти всюду монотонно возрастая, то по свойству Фату $\| x \|_E = \lim \| x_n \|_E$. Но $x_n \not\to x$ сильно, что и доказывает отсутствие H-свойства относительно E'.

Теорема доказана.

Далее мы будем постоянно пользоваться формулой (*1*). Нормирующее множество Φ называется полным, если для любого $x \in E$ найдется

$$\varphi_x \in \Phi, \text{ что } \| x \|_E = \int\limits_0^1 x^*(t)\, \varphi'_x(t)\, dt = \| x \|_{\Lambda(\varphi_x)}.$$

Лемма 6. *Для любого сепарабельного симметричного пространства E существует полное нормирующее множество Φ.*

Доказательство. Примем за Φ множество функций φ, $\varphi(0) = 0$, чьи производные принадлежат E' и имеют там норму, равную 1.

Пусть $x_0 \in E$. По теореме Хана—Банаха существует такой функционал $\in E^*$, $\| f \|_{E^*} = 1$, что $f(x_0^*) = \| x_0 \|_E$. Поскольку E сепарабельно, $E^* = E'$ следовательно, существует такая функция $f(t)$, $\| f \|_{E'} = 1$, что

$$f(x_0^*) = \int\limits_0^1 x_0^*(t) f(t)\, dt = \| x_0 \|_E = \sup_{\|y\|_{E'} = 1} \int\limits_0^1 x_0^*(t)\, y(t)\, dt.$$

Отсюда по теореме о перестановках $f(t) \geqslant 0$ и не возрастает, следовательно, $\varphi_{x_0}(t) = \int\limits_0^t f(s)\, ds$ принадлежит Φ и

$$\| x_0 \|_E = \int\limits_0^1 x_0^*(t)\, \varphi'_{x_0}(t)\, dt.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $x_n \xrightarrow[\Gamma]{} x$, $\Gamma \supseteq L_\infty$ и $\| x_n \|_E \to \| x_0 \|_E$. *Если* $\varphi_{x_0}(t)$ *строго вогнута, то* $x_n \to x_0$ *в норме пространства* $\Lambda(\varphi_{x_0})$ *и по мере одновременно.*

Доказательство. В силу следствия 1 при $x_n \xrightarrow[\Gamma]{} x_0$, $\underline{\lim} \| x_n \|_{\Lambda(\varphi_{x_0})} \geqslant \geqslant \| x_0 \|_{\Lambda(\varphi_{x_0})}$. Из формулы (1)

$$\| x_n \|_E = \sup_{\varphi \in \Phi} \| x_n \|_{\Lambda(\varphi)} \geqslant \| x_n \|_{\Lambda(\varphi_{x_0})}$$

Однако $\| x_n \|_E \to \| x_0 \|_E = \| x_0 \|_{\Lambda(\varphi_{x_0})}$, следовательно,

$$\| x_n \|_{\Lambda(\varphi_{x_0})} \to \| x_0 \|_{\Lambda(\varphi_{x_0})}$$

Применяя теорему 1, получаем сильную сходимость $x_n \to x_0$ в пространстве $\Lambda(\varphi_{x_0})$ и, используя вложение $\Lambda(\varphi_{x_0}) \subset L_1[0, 1]$, получаем сходимость по мере.

Лемма доказана.

Лемма 8. *В пространстве* E *можно ввести такую эквивалентную норму* $\| \cdot \|_E^1$, *что из* $x_n \xrightarrow[\Gamma]{} x$, $\Gamma \supseteq L_\infty$ и $\| x_n \|_E^1 \to \| x \|_E^1$ *будет следовать сходимость* $x_n \to x$ *по мере.*

Доказательство. Если мы сумеем сделать все $\varphi \in \Phi$ строго вогнутыми, то утверждение будет непосредственно следовать из леммы 7. Для этого возьмем строго вогнутую $\psi(t)$ так, чтобы $\frac{\psi(t)}{t} < c_1$. Обозначим через Φ^1 множество $\{\varphi + \psi,\ \varphi \in \Phi\}$. Введем

$$\| x \|_E^1 = \sup_{\varphi \in \Phi^1} \| x \|_{\Lambda(\varphi)} = \| x \|_E + \| x \|_{\Lambda(\psi)}.$$

Но по построению $\| x \|_{\Lambda(\psi)} \leqslant c_1 \| x \|_{L_1} \leqslant c_2 \| x \|_E$, где второе неравенство следует из непрерывности вложения $E \subset L_1$. Следовательно, $\| x \|_E \leqslant \| x \|_E^1 \leqslant \leqslant (c_2 + 1) \| x \|_E$ и лемма доказана.

Следует заметить, что леммы 7, 8 верны без предположения полноты нормирующего множества Φ.

Теорема 3. *Условие строгой вогнутости фундаментальной функции* $\varphi_E(t)$, *а также условие строгой вогнутости всех функций* $\varphi(t) \in \Phi$, *где* Φ — *полное нормирующее множество, не являются, вообще говоря, достаточными для существования* H*-свойства в симметричном пространстве.*

Условие строгой вогнутости фундаментальной функции не является необходимым для выполнения H*-свойства.*

Доказательство. Пусть Φ_1 — нормирующее множество и

1) $\varphi \in \Phi_1$ строго вогнуты;

2) $\varphi_0(t)$ строго вогнута и $\frac{\varphi_0(t)}{t} < c$;

3) $\varphi_0(1) - \sup\limits_{\varphi \in \Phi_1} \varphi(1) = \alpha > 0$;

4) $\varphi_E(t) = \sup\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(t)$ строго вогнута, где $\Phi = \Phi_1 \cup \{\varphi_0\}$;

5) существует $t_n \to 0$, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\varphi_E(t_n)}{t_n} = \infty$.

Пространство E с нормой $\| x \|_E = \sup\limits_{\varphi \in \Phi} \| x \|_{\Lambda(\varphi)}$ не обладает H-свойством относительно L_∞.

Доказательство. Пусть $x_0(t) \equiv 1$ и $y_n(t) = c_n \chi_{[0, t_n]}(t)$, где $c_n = \frac{\alpha}{\varphi_E(t_n)}$. Тогда $\| x_0 + y_n \|_E = \sup\limits_{\varphi \in \Phi} (c_n \varphi(t_n) + \varphi(1))$. Но для $\varphi \in \Phi_1$

$$c_n \varphi(t_n) + \varphi(1) \leqslant c_n \varphi_E(t_n) + \sup_{\varphi \in \Phi_1} \varphi(1) = \alpha + \sup_{\varphi \in \Phi_1} \varphi(1) = \\ = \varphi_0(1) < c_n \varphi_0(t_n) + \varphi_0(1).$$

Таким образом, $\| y_n + x_0 \|_E = c_n \varphi_0(t_n) + \varphi_0(1)$. Но в силу 2) $\lim c_n \varphi_0(t_n) \leqslant \lim \frac{\alpha c t_n}{\varphi_E(t_n)} = 0$, следовательно, $\| x_0 + y_n \|_E \to \psi_0(1) = \| x_0 \|_E$.

Для любого $z \in L_\infty$ имеем

$$\left| \int_0^1 y_n(t) z(t)\, dt \right| = \frac{\alpha}{\varphi_E(t_n)} \left| \int_0^{t_n} z(t)\, dt \right| \leqslant \frac{\alpha}{\varphi_E(t_n)} t_n \| z \|_{L_\infty} \to 0.$$

Итак $x_0 + y_n \underset{L_\infty}{\to} x_0$, $\| x_0 + y_n \|_E \to \| x_0 \|_E$, но $\| y_n \|_E = \alpha > 0$.

Доказанное утверждение показывает, что ни строгая вогнутость $\varphi \in \Phi$, ни строгая вогнутость фундаментальной функции φ_E, вообще говоря, не являются достаточными для существования H-свойства относительно L_∞.

Условие строгой вогнутости фундаментальной функции не является и необходимым.

Действительно, определим симметричное пространство E как множество измеримых на $[0, 1]$ функций, для которых конечна норма $\| x \|_E = \max(\| x \|_{\Lambda(\varphi_1)}, \| x \|_{\Lambda(\varphi_2)})$, где

$$\varphi_1(t) = t^\alpha, \quad \varphi_2(t) = c_1 t^\alpha + c_2 t; \quad \alpha, \ c_1 \in (0, 1), \ c_1 + c_2 > 1.$$

Фундаментальная функция $\varphi_E(t) = \max(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ не будет даже вогнутой, но норма $\| \cdot \|_E$ обладает H-свойством. Действительно, если $x_n \underset{L_\infty}{\to} x$, $\| x_n \|_E \to \| x \|_E$ и $\| x \|_E = \| x \|_{\Lambda(\varphi_1)}$, то в силу строгой вогнутости φ_1 и леммы 7 $\| x_n - x \|_{\Lambda(\varphi_1)} \to 0$. Но φ_1 и φ_2 эквивалентны по построению, ибо $c_1 < \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} < c_1 + c_2$, откуда $\| x_n - x \|_{\Lambda(\varphi_2)} \to 0$, а с ней и $\| x_n - x \|_E \to 0$.

Теорема доказана.

Тем интересней следующая

Теорема 4. *Во всяком сепарабельном симметричном пространстве E можно ввести эквивалентную симметричную норму так, чтобы выполнялось H-свойство относительно любого Γ, $L_\infty \subseteq \Gamma \subseteq E'$.*

Доказательство. Введем $\| x \|_E^+ = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\| x^* \varkappa_n \|_E}{2^n}$, где $\varkappa_n = \varkappa_{\left[0,\, \frac{1}{2^n}\right]}$. Очевидно, что $\| x \|_E \leqslant \| x \|_E^+ \leqslant 2 \| x \|_E$.

Введем $\| x \|_E^* = \| x \|_E^+ + \| x \|_{\Lambda(\psi)}$, где $\psi(t)$ строго вогнута и $\frac{\psi(t)}{t} < c$. силу леммы 8 нормы $\| x \|_E$ и $\| x \|_E^*$ эквивалентны.

В силу леммы 8, если $x_n \xrightarrow[\Gamma]{} x$ и $\| x_n \|_E^* \to \| x \|_E^*$, то $y_n = (x_n - x) \to 0$ по мере. Следовательно, найдутся $\tau_n \to 0$, что

$$\operatorname{mes} e_n = \operatorname{mes} \{t : | y_n | > \tau_n\} \to 0.$$

Поскольку $\| y_n \varkappa_{e_n} \|_E - \| y_n \varkappa_{ce_n} \|_E \leqslant \| y_n \|_E \leqslant \| y_n \varkappa_{e_n} \|_E + \| y_n \varkappa_{ce_n} \|_E$ и $\| y_n \varkappa_{ce_n} \|_E \leqslant \leqslant \tau_n \varphi_E(1) \to 0$, имеем

$$\overline{\lim} \| y_n \|_E = \overline{\lim} \| y_n \varkappa_{e_n} \|_E. \tag{15}$$

Предположим, что $\| y_n \|_E^* \not\to 0$. В силу эквивалентности норм и равенства (15) можно считать, что $\overline{\lim} \| y_n \varkappa_{e_n} \|_E > 3\varepsilon > 0$. Докажем, что $\overline{\lim} \| x_n \|_E^* \geqslant \| x \|_E^* + \frac{\varepsilon}{2^{n_0}}$, где n_0 — некоторое число. Это противоречие условию $\| x_n \|_E^* \to \| x \|_E^*$ и будет доказывать теорему.

Из условия сепарабельности E вытекает существование такого номера $n_0 = n_0(x, \varepsilon)$, что $\| x^* \varkappa_k \|_E \leqslant \varepsilon$ при $k > n_0$. Пусть $N(n)$ — такое наибольшее целое число, что при $k \leqslant N(n)$ $\operatorname{mes} e_n < \frac{1}{2^k} = \operatorname{mes} \{\varkappa_k \neq 0\}$. Очевидно $N(n) \to \to \infty$. Для k, $n_0 \leqslant k \leqslant N(n)$, имеет место неравенство

$$\overline{\lim_n} \| (x + y_n)^* \varkappa_k \|_E \geqslant \| x^* \varkappa_k \|_E + \varepsilon. \tag{16}$$

Действительно,

$$\overline{\lim_n} \| (x + y_n)^* \varkappa_k \|_E \geqslant \overline{\lim_n} (\| y_n^* \varkappa_k \|_E - \| x^* \varkappa_k \|_E) \geqslant$$
$$\geqslant \overline{\lim_n} \| y_n \varkappa_{e_n} \|_E - \| x^* \varkappa_k \|_E \geqslant 3\varepsilon - \| x^* \varkappa_k \|_E \geqslant \| x^* \varkappa_k \|_E + \varepsilon.$$

Пусть Φ — такое полное нормирующее множество, что

$$\| x \|_E = \sup_{\varphi \in \Phi} \| x \|_{\Lambda(\varphi)}.$$

В силу леммы 6 для каждого k найдется $\varphi_k \in \Phi$, и в силу симметричности $\Lambda(\varphi_k)$ такое $\omega_k \subset [0, 1]$, что

$$\| x^* \varkappa_k \|_E = \| x^* \varkappa_k \|_{\Lambda(\varphi_k)} = \| x \varkappa_{\omega_k} \|_{\Lambda(\varphi_k)} \text{ и } \operatorname{mes} \{\omega_k\} = \frac{1}{2^k}.$$

Тогда

$$\underline{\lim_n} \| (x + y_n)^* \varkappa_k \|_E \geqslant \underline{\lim_n} \| (x + y_n) \varkappa_{\omega_k} \|_{\Lambda(\varphi_k)}.$$

Поскольку по условию $y_n \varkappa_{\omega_k} \xrightarrow[L_\infty]{} 0$, то по следствию 1

$$\underline{\lim_n} \| (x + y_n) \varkappa_{\omega_k} \|_{\Lambda(\varphi_k)} \geqslant \| x \varkappa_{\omega_k} \|_{\Lambda(\varphi_k)} = \| x^* \varkappa_k \|_E.$$

Итак, мы получили верное для всех k неравенство

$$\underline{\lim_n} \| x_n^* \varkappa_k \|_E \geqslant \| x^* \varkappa_k \|_E. \tag{17}$$

Оценим теперь $\overline{\lim\limits_{n}}\, \| x_n \|_E^*$.

Имеем

$$\overline{\lim_{n}}\, \| x_n \|_E^* = \overline{\lim_{n}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| x_n^* \chi_k \|_E}{2^k} + \| x_n \|_{\Lambda(\psi)} \right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n_0}}^{\infty} \underline{\lim_{n}} \frac{\| x_n^* \chi_{\text{к}} \|_E}{2^k} + \overline{\lim_{n}} \frac{\| x_n^* \chi_{n_0} \|_E}{2^{n_0}} + \underline{\lim_{n}}\, \| x_n \|_{\Lambda(\psi)}.$$

Применяя к первому слагаемому оценку (17), ко второму — (16) и оценивая $\underline{\lim\limits_{n}}\, \| x_n \|_{\Lambda(\psi)}$, аналогично (17) имеем

$$\overline{\lim_{n}}\, \| x_n \|_E^* \geqslant \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n_0}}^{\infty} \frac{\| x^* \chi_k \|_E}{2^k} + \frac{\| x^* \chi_{n_0} \|_E}{2^{n_0}} + \frac{\varepsilon}{2^{n_0}} + \| x \|_{\Lambda(\psi)} = \| x \|_E^* + \frac{\varepsilon}{2^{n_0}}.$$

Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность Е. М. Семенову за помощь и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кадец. О слабой и сильной сходимости. ДАН СССР, 122 (1958), 13—16.
2. Е. М. Семенов. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций. ДАН СССР, 156, № 6 (1964), 1292—1295.
3. Е. М. Семенов. Одна новая интерполяционная теорема. «Функциональный анализ 2», вып. 2, 1968, 68—80.
4. G. G. Lorentz. Some new functional spaces. Ann. of Math. (2) 51 (1950), 27—55.
5. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961, 76.
6. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. Изд-во иностр. лит. М., 1948.

Поступила 3 января 1969 г.