Выпуск 11 1970

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА КРАТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н. И. Нагнибида

Вопросу нахождения всех нетривиальных инвариантных подпространств операторов обобщенного сдвига (операторов типа интегрирования) в различных пространствах посвящен целый ряд исследований [1, 2]. Однако, насколько нам известно, инвариантные подпространства целых степеней таких операторов ранее не описывались. В настоящей статье этот вопрос рассматривается для оператора I^n, $n \geqslant 2$, кратного интегрирования $\left(If(z) = \int\limits_0^z f(\zeta)\,d\zeta\right)$ в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, всех однозначных аналитических в круге $|z| < R$ функций с топологией компактной сходимости. При этом мы пользуемся [3, § 3] описанием полной группы изоморфизмов пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочных с оператором I^n [4]. Напомним [4], что линейный оператор T является изоморфизмом пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочным с I^n, $n \geqslant 1$, тогда и только тогда, когда

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{k!}{q!} t_{k,\,q} I^{k-q} A_q$$

$\left(\text{здесь } A_q f(z) = A_q\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{kn+q} z^{kn+q} \text{ и } I^{-q} = \dfrac{d^q}{dz^q}\right)$, функции $\varphi_q(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} t_{k,\,q} z^k$ принадлежат пространству $\mathfrak{A}_R$ и $\det \| t_{k,\,q} \|_{k,\,q=0}^{n-1} \neq 0$. Отсюда, в частности, следует, что для любой системы n функций $\varphi_q(z)$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$, для которой $\det \| \varphi_q^{(p)}(0) \|_{p,\,q=0}^{n-1} \neq 0$, в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, существует такой изоморфизм T, перестановочный с I^n, что $Tz^q = \varphi_q(z)$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пусть для простоты $n = 2$ и M — линейное нетривиальное подпространство пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, инвариантное относительно оператора I^2. Через k_0, $k_0 \geqslant 0$, обозначим наименьшее натуральное число, для которого существует хотя бы одна такая функция $f(z)$, $f(z) \in M$, что $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k_0-1)}(0) = 0$ и $f^{(k_0)}(0) \neq 0$. Отметим, что в случае $k_0 = 0$ в M не может существовать ни одной функции $g(z)$, для которой было бы отличным от нуля выражение $f(0)g'(0) - f'(0)g(0)$, так как в противном случае M совпадало бы со всем пространством $\mathfrak{A}_R$ [4, теорема 2].

Пусть (для определенности) k_0 — четное, т. е. $k_0 = 2s_0$. Через M_1 обозначим замкнутую линейную оболочку системы $\{I^{2n} f(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Будем рассматривать теперь функции из дополнения M_2 подпространства M_1 к M (если, конечно, оно не пусто). Как и раньше, через k, $k \geqslant k_0$, обозначим наименьшее натуральное число, для которого существует такая функция $\varphi(z)$ в M_2, что $\varphi(0)=\varphi'(0)=\ldots=\varphi^{(k-1)}(0)=0$ и $\varphi^{(k)}(0)\neq 0$. Если $k=2s_1+1$, $s_1\geqslant s_0$, то, очевидно, $\varphi(z)=I^{2s_1+1}\varphi_1(z)$, $\varphi_1(0)\neq 0$, и $f(z)=I^{2s_0}f_1(z)$, $f_1(0)\neq 0$. Рассматривая теперь функции $f_1(z)$ и $I\varphi_1(z)$, построим такой изоморфизм T пространства $\mathfrak{A}_R$, перестановочный с I^2, что $T1=f_1(z)$ и $Tz=I\varphi_1(z)$. Все функции системы $\left\{I^{2(s_1+2m)}(T1,\ Tz)\right\}_{m=0}^{\infty}$ принадлежат, очевидно, подпространству M. Учитывая вид оператора T^{-1} (он также перестановочен с I^2), нетрудно убедиться, что функции $T^{-1}z^{2s_1+q}$, $q=0,\ 1$, можно приблизить (по топологии пространства $\mathfrak{A}_R$) линейными комбинациями функций системы $\left\{I^{2(s_1+m)}1,\ I^{2(s_1+m)}z\right\}_{m=0}^{\infty}$, а, следовательно, сами функции z^{2s_1+q}, $q=0,\ 1$, — линейными агрегатами функций системы $\left\{I^{2(s_1+m)}T1,\ I^{2(s_1+m)}Tz\right\}_{m=0}^{\infty}$. Поэтому $z^{2s_1+q}\in M$, $q=0,\ 1$, и подпространство M в этом случае является замкнутой линейной оболочкой системы $\{z^{2s_1+p}\}_{p=0}^{\infty}$ и полиномов вида

$$\left\{I^{2m}\left(\frac{f^{(2s_0)}(0)}{(2s_0)!}z^{2s_0}+\cdots+\frac{f^{(2s_1-1)}(0)}{(2s_1-1)!}z^{2s_1-1}\right)\right\}_{m=0}^{s_1-s_0-1}.$$

Предположим теперь, что k — четное, т. е. $k=2s$, $s\geqslant s_0$. Рассмотрим снова функции $I^{2s}f_1(z)$ и $I^{2s}\varphi_1(z)$. Если

$$\Delta_0=f_1(0)\varphi_1'(0)-f_1'(0)\varphi_1(0)\neq 0,$$

то, как и раньше, мы легко убеждаемся, что функции $\{z^{2s+p}\}_{p=0}^{\infty}$ принадлежат M. Таким образом, пространство M и в этом случае описывается аналогично тому, как это сделано выше. Пусть $\Delta_0=0$. Если $\tilde f(z)=I^{2s}f_1(z)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}a_{2s+p}z^{2s+p}$ и $\varphi(z)=I^{2s}\varphi_1(z)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}b_{2s+p}z^{2s+p}$, то, очевидно, существует такая постоянная λ_0, что $b_{2s+q}=\lambda_0a_{2s+q}$, $q=0,\ 1$. Переходим теперь к функциям $I^2\tilde f(z)$ и $\varphi(z)-\lambda_0\tilde f(z)$ и рассматриваем соответствующий определитель

$$\Delta_1=\frac{a_{2s}}{(2s+1)(2s+2)}(b_{2s+3}-\lambda_0a_{2s+3})-\frac{a_{2s+1}}{(2s+2)(2s+3)}(b_{2s+2}-\lambda_0a_{2s+2}).$$

Если снова $\Delta_1=0$, то существует постоянная λ_1 такая, что

$$b_{2(s+1)+q}=\lambda_0a_{2(s+1)+q}+\lambda_1\frac{a_{2s+q}}{(2s+1+q)(2s+2+q)},\qquad q=0,1.$$

Продолжим этот процесс. Если после конечного числа таких шагов мы получим отличный от нуля определитель, то подпространство M описать в этом случае легко. В противном случае мы получим такую последовательность $\{\lambda_m\}_{m=0}^{\infty}$, что

$$b_{2(s+m)+q}=\sum_{j=0}^{m}\lambda_{m-j}\frac{[2(s+j)+q]!}{[2(s+m)+q]!}a_{2(s+j)+q},\quad q=0,\ 1. \tag{1}$$

Покажем теперь, что функция

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_m}{(2s+2m)!}t^{2m}$$

принадлежит пространству $\mathfrak{A}_R$, т. е. что для произвольного $\rho < R$ существует такая постоянная $C \geqslant 0$, что

$$\frac{|\lambda_m|}{(2s+2m)!} \leqslant \frac{C}{\rho^{2m}}, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Действительно, выберем $m_0 > 1$ настолько большим, чтобы при $m \geqslant m_0$

$$\frac{|b_{2(s+m)}| + |\lambda_0|\,|a_{2(s+m)}|}{|a_{2s}|\,(2s)!}\rho^{2m} + \frac{2s+1}{2s+2m}\cdot\frac{1}{|a_{2s}|}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{2(s+j)}|\,\rho^{2j} \leqslant 1. \tag{3}$$

Пусть постоянная $C \geqslant 1$ такова, что неравенства (2) выполняются для $m < m_0$. Тогда из (1) при $q = 0$ и (3) легко получить, что

$$\frac{|\lambda_{m_0}|}{(2s+2m_0)} \leqslant \frac{|b_{2(s+m_0)}|}{|a_{2s}|\,(2s)!} + \frac{|\lambda_0|\,|a_{2(s+m_0)}|}{|a_{2s}|\,(2s)!} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m_0-1}\frac{|\lambda_{m_0-j}|}{[2(s+m_0-j)]!}\cdot\frac{[2(s+j)]!\,[2(s+m_0-j)]!}{(2s)!\,[2(s+m_0)]!}\cdot\frac{|a_{2(s+j)}|}{|a_{2s}|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\rho^{2m_0}}\cdot\left\{\frac{|b_{2(s+m_0)}|\,\rho^{2m_0}}{|a_{2s}|\,(2s)!} + \frac{|\lambda_0|\,|a_{2(s+m_0)}|\,\rho^{2m_0}}{|a_{2s}|\,(2s)!} +\right.$$
$$\left.+ \sum_{j=1}^{m_0-1}\frac{|a_{2(s+j)}|}{|a_{2s}|}\cdot\frac{[2(s+j)]!\,[2(s+m_0-j)]!}{[2(s+m_0)]!\,(2s)!}\rho^{2j}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\rho^{2m_0}}\cdot\left\{\frac{|b_{2(s+m_0)}| + |\lambda_0|\,|a_{2(s+m_0)}|}{|a_{2s}|\,(2s)!}\rho^{2m_0} +\right.$$
$$\left.+ \frac{2s+1}{2s+2m_0}\cdot\sum_{j=1}^{m_0-1}\frac{|a_{2(s+j)}|}{|a_{2s}|}\rho^{2j}\right\} \leqslant \frac{C}{\rho^{2m_0}}.$$

Следовательно, неравенства (2) выполняются для $m = m_0$. Воспользовавшись методом математической индукции, убеждаемся в справедливости оценок (2) для всех $m = 0, 1, \ldots$.

Поэтому [3] оператор B, $B = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k I^{2k}$, является линейным непрерывным оператором в $\mathfrak{A}_R$, перестановочным с I^2. Кроме того, $B\tilde{f}(z) = \varphi(z)$, т. е. функция $\varphi(z) = I^{2s}\varphi_1(z)$ принадлежит подпространству M_1 (M_2 — пусто!). Следовательно, подпространство M совпадает с замкнутой линейной оболочкой системы $\{I^{2m}f(z)\}_{m=0}^{\infty}$.

Предположим теперь, что k_0 — нечетное. В этом случае нужно повторить те же рассуждения, что и выше. Правда, здесь есть одно различие. Когда мы найдем (если M_2 не пусто) две такие функции

$$\alpha(z) = \alpha_{2m+1}z^{2m+1} + \cdots, \quad \alpha_{2m+1} \neq 0, \quad \text{и} \quad \beta(z) = \beta_{2m+1}z^{2m+1} + \cdots,$$

что $\alpha_{2m+1}\beta_{2m+2} - \alpha_{2m+2}\beta_{2m+1} \neq 0$, то нужно будет предварительно перейти к рассмотрению пары функций $\alpha(z)$ и $\beta(z) - \frac{\beta_{2m+1}}{\alpha_{2m+1}}\alpha(z)$

Учитывая сказанное выше, убеждаемся в том, что верна

Теорема. *Замкнутое линейное множество M пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, является нетривиальным инвариантным подпространством оператора I^2 тогда и только тогда, когда оно совпадает с замкнутой линейной оболочкой системы $\{I^{2k}f(z)\}_{k=0}^{\infty}$, где $f(z) \neq 0$ — некоторая функ-*

ция из $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, *или системы* $\left\{I^{2k} p(z)\right\}_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \cup \{z^m\}_{m=s}^{\infty}$, где $p(z)$ — *многочлен степени не выше* $s-1$, $s \geqslant 1$ *(в случае* $s=1$ *должно быть* $p(z) \equiv 0$).

Таким образом, оператор I^2 в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, не является одноклеточным (сравни с [3]).

Аналогичным способом можно показать, что каждое нетривиальное подпространство M пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, инвариантное относительно оператора I^n, $n \geqslant 3$, совпадает с замкнутой линейной оболочкой системы $\left\{I^{nk} \varphi_q(z)\right\}_{k=0}^{\infty}$, $q = 1, 2, \ldots, n-1$, где $\varphi_q(z)$ — некоторые функции из $\mathfrak{A}_R$, или системы

$$\left\{I^{nk} p_q(z)\right\}_{k=0}^{\left[\frac{s}{n}\right]} \cup \{z^m\}_{m=s}^{\infty},$$

где $p_q(z)$, $q = 1, 2, \ldots, n$ — многочлены степени не выше $s-1$, $s \geqslant 1$ (в случае $s=1$ все $p_q(z) \equiv 0$, а при $2 \leqslant s \leqslant n-1$ любые s этих многочленов линейно-зависимы).

Доказательство этого утверждения мы не приводим ввиду его громоздкости. Кроме того, оно почти такое же, как и в случае $n=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Хавин. Пространства аналитических функций. Сб. «Математический анализ, 1964», М., 1966, 76—164.
2. Н. К. Никольский. Об инвариантных подпространствах взвешенных операторов сдвига. «Матем. сб., т. 74 (116), № 2, 1967, 171—190.
3. Н. И. Нагнибида. О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве. «Сибирск. матем. журн.», т. 7, № 6, 1966, 1306—1318.
4. Н. И. Нагнибида. Изоморфизмы пространства аналитических функций в круге, перестановочные со степенью оператора интегрирования. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.

Поступила 1 декабря 1968 г.