Выпуск 11 1970

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕРА И ВОЗМОЖНОСТЬ РЕГУЛЯРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Э. М. Саак

В работе изучается возможность равномерного приближения регулярными решениями уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f(z)=0$$

на ограниченном замкнутом множестве точек комплексной плоскости $z = x+iy$.

Решения этого уравнения при $k=1$, $l=0$ есть аналитические функции, при $k=l=1$ — гармонические функции, при $k=l$ — полигармонические порядка k функции.

Основной результат работы состоит в доказательстве того, что условие А. Г. Витушкина [1] возможности равномерного приближения аналитическими функциями ($k=1$, $l=0$) остается достаточным и в более общем случае $k\geqslant 0$, $l\geqslant 0$. Доказательство проводится для $k\geqslant 1$, $l\geqslant 1$. При $k\geqslant 1$, $l=0$ доказательство мало чем отличается от доказательства Витушкина и поэтому опущено.

Рассмотрим ограниченное открытое множество e и будем обозначать через $d(e)$ — диаметр множества e, через $\gamma(e)$ — аналитическую емкость (аналитическую меру, см. [2, стр. 103], через $C(e)$ — гармоническую емкость множества e. Имеют место неравенства

$$d(e)\geqslant\sqrt{3}\,C(e)\geqslant\sqrt{3}\,\gamma(e).$$

Через $\min\{a;\ b\}$ обозначается наименьшая из величин a, b.

Лемма 1. *Каково бы ни было ограниченное множество e, существует аналитическая функция $\varphi(z)$ комплексного переменного z вне $\bar e$ такая, что для любой точки ζ, отстоящей от множества e менее, чем на $d(e)$, и любого z вне $\bar e$ имеет место неравенство*

$$|1-(z-\zeta)\varphi(z)|\leqslant\left(1+2\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right)\min\left\{1;\ \frac{2d(e)}{|\zeta-z|}\right\}. \tag{1}$$

Доказательство. Искомой функцией $\varphi(z)$ является функция Альфорса [1], [4] множества e, деленная на число $\gamma(e)$. В самом деле, из определения функции Альфорса вытекает, что

$$|\varphi(z)|<\frac{1}{\gamma(e)},\quad z\not\in\bar e.$$

Кроме того,

$$\varphi(\infty)=0.$$

Поэтому

$$|1-(z-\zeta)\varphi(z)| < \sup_{\tau\in\Gamma}|1-(\tau-\zeta)\varphi(\tau)| < 1+\frac{2d(e)}{\gamma(e)}, \tag{2}$$

где Γ — любая кривая вне $\bar{e}$, достаточно близкая к e.

Далее,

$$|(z-\zeta)(1-\varphi(z)(z-\zeta))| < \sup_{\tau\in\Gamma}|\tau-\zeta||1-(\tau-\zeta)\varphi(\tau)| <$$

$$< 2d(e)\left(1+2\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right), \quad z\notin\bar{e}. \tag{3}$$

Неравенства (2) и (3) в совокупности равносильны (1). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Каковы бы ни были ограниченное множество e, натуральные числа m, k, λ и точка ζ, удаленная от e менее, чем на $\lambda d(e)$, существует функция $\varphi_{k,m}(z)$*, аналитическая вне $\bar{e}$ и такая, что для любого z вне $\bar{e}$ справедливо неравенство*

$$|1-(z-\zeta)^k\varphi_{k_1,m}(z)| < A_{k_1m}\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^s \min\left\{1, \frac{d^m(e)}{|\zeta-z|^m}\right\}, \tag{4}$$

где $A_{k,m}$ — постоянная, зависящая только от m, k, λ;

$$s=\frac{1}{2}k(k+m)(k+m-1)+k.$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1=\gamma(e)$, α_2, α_3, ... — коэффициенты разложения функции Альфорса $\alpha_e(z)$ множества e в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\alpha_e(z)=\frac{\gamma(e)}{z-\zeta}+\frac{\alpha_2}{(z-\zeta)^2}+\frac{\alpha_3}{(z-\zeta)^3}+\ldots, \quad |\alpha_e(z)|<1, \quad z\notin\bar{e}.$$

Положим

$$a_q=-\sum_{s=1}^{q-1}a_s\sum_{k_1+\cdots+k_s=q}\frac{\alpha_{k_1}}{\alpha_1^{k_1}}\frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_1^{k_2}}\cdots\frac{\alpha_{k_s}}{\alpha_1^{k_s}}, \quad a_1=1, \tag{5}$$

$$\varphi_p(z)=\frac{1}{\gamma(e)}\sum_{q=1}^{p}a_q\alpha_e^q(z), \quad p=k+m. \tag{6}$$

Так как (см. [2, стр. 104, 106])

$$\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right| < (4\lambda)^{n-1}nd^{n-1}(e), \quad n=2, 3, \ldots; \quad \alpha_1=\gamma(e),$$

то

$$\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_1^n}\right| \leqslant (4\lambda)^{n-1}n\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^{n-1}, \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Поэтому

$$|a_q| < (q-1)^{2q-2}\left[4\lambda\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^{q-1}\max_{1\leqslant s\leqslant q-1}|a_s|, \quad a_1=1.$$

* Функция $\varphi_{k,m}(z)$ является также непрерывной функцией от ζ.

Следовательно,

$$|a_q| \leqslant [(q-1)!]^{2q-2}(4\lambda)^{\frac{q(q-1)}{2}}\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^{\frac{q(q-1)}{2}}, \quad q=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Таким образом,

$$|a_q| < A_p\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^{\frac{p(p-1)}{2}}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant p,$$

где A_p — постоянная, зависящая только от p и λ.

Так как

$$|\alpha_e(z)| < 1 \quad z \not\in \bar{e},$$

то из (6) и предыдущего следует, что

$$|\varphi_p(z)| < A'_p\frac{1}{\gamma(e)}\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^{\frac{p(p-1)}{2}}, \quad z \not\in \bar{e},$$

где $A'_p = pA_p$ — постоянная, зависящая только от p и λ.

Функция $\varphi_p(z)$ в силу (5) и (6) в окрестности бесконечно удаленной точки имеет разложение:

$$\varphi_p(z) = \frac{1}{z-\zeta} + \frac{b_{p+1}}{(z-\zeta)^{p+1}} + \frac{b_{p+2}}{(z-\zeta)^{p+2}} + \ldots$$

и потому в силу принципа максимума

$$|1-(z-\zeta)^k\overset{k}{\varphi_p}(z)| < \sup_{\tau\in\Gamma}|1-(\tau-\zeta)^k\overset{k}{\varphi_p}(\tau)| <$$

$$< 1 + A''_p\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^s, \quad z \not\in \bar{e}, \quad p = k+m, \quad s = k + \frac{kp(p-1)}{2}.$$

Здесь Γ — любая кривая вне $\bar{e}$, достаточно близкая к e.

Поэтому

$$|1-(z-\zeta)^k\overset{k}{\varphi}_{k+m}(z)| < A'_{k,\,m}\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^s, \quad z \not\in \bar{e}, \tag{7}$$

где $A'_{k,\,m}$ — постоянная, зависящая только от k, m и λ.

Далее,

$$|(z-\zeta)^m(1-(z-\zeta)^k\overset{k}{\varphi}_{k+m}(z)| < \sup_{\tau\in\Gamma}|\tau-\zeta|^m|1-(\tau-\zeta)^k\overset{k}{\varphi}_{k+m}(\tau)| <$$

$$< A''_{k,\,m}\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^s d^m(e), \quad z \not\in \bar{e}, \quad s = k + \frac{k(k+m)(k+m-1)}{2}. \tag{8}$$

Совокупность неравенств (7) и (8) равносильна (4). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Каковы бы ни были открытое ограниченное множество e, натуральные числа m, λ и точка ζ, отстоящая от $\bar{e}$ менее чем на $\lambda d(e)$, существует функция $h_e^{(m)}(z)$, гармоническая вне $\bar{e}$ и такая, что для любого z вне $\bar{e}$ справедливо неравенство*

$$|\ln|z-\zeta| - h_e^{(m)}(z)| < B_m(1+d^{m-1}(e))\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^{s+1}\min\left\{\frac{d(e)}{|z-\zeta|};\ \frac{d^m(e)}{|z-\zeta|^m}\right\}, \tag{9}$$

где B_m — постоянная, зависящая только от m, λ; $s = 2m^3$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\zeta = 0$ и множество $\bar{e}$ расположено в круге $|z| < 3\lambda d(e)$. Пусть $G_e(\infty, z)$ — функция Грина связной компоненты дополнения к $\bar{e}$, содержащей бесконечно удаленную точку. В круге $|z| > 3\lambda d(e)$ имеет место разложение

$$G_e(\infty, z) = \ln|z| - \ln C(e) + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3\lambda)^k g_k d^k(e)}{z^k}, \tag{10}$$

где коэффициенты g_k определяются по формулам

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_e(\infty, z) e^{ikt} dt, \ z = 3\lambda d(e) e^{it}. \tag{11}$$

Из известной оценки для функции Грина (см. [3, стр. 347]) получаем

$$0 < G_e(\infty, z) \leqslant -\ln C(e) + \ln[6\lambda d(e)], \quad |z| = 3\lambda d(e).$$

Используя это неравенство, находим из (11)

$$|g_k| \leqslant \ln\left[6\lambda \frac{d(e)}{C(e)}\right] < 6\lambda \frac{d(e)}{C(e)} \leqslant 6\lambda \frac{d(e)}{\gamma(e)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Положим теперь, что

$$h_e^{(m)}(z) = G_e(\infty, z) + \ln C(e) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m} (3\lambda)^k g_k d^k(e) \varphi_{k, m}(z), \tag{13}$$

где $\varphi_{k, m}(z)$ — функции, существование которых утверждается в предыдущей лемме.

Функция $h_e^{(m)}(z)$, определенная равенством (13), очевидно, гармоническая вне $\bar{e}$, кроме $z = \infty$. Имеем из (10) и (13)

$$\ln|z| - h_e^{(m)}(z) = -\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m} \frac{(3\lambda)^k g_k d^k(e)}{z^k} [1 - z^k \varphi_{k, m}(z)] -$$
$$-\operatorname{Re} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(3\lambda)^k g_k d^k(e)}{z^k}, \qquad |z| > 3\lambda d(e). \tag{14}$$

Согласно (4)

$$|1 - z^k \varphi_{k, m}(z)| < A_{k, m} \left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^s \min\left\{1; \frac{d^m(e)}{|z|^m}\right\}, \qquad z \not\in \bar{e}.$$

Используя это неравенство, а также оценку (12) из (14), получаем

$$|\ln|z| - h_e^{(m)}(z)| < 6\lambda \max_{1 \leqslant k \leqslant m} A_{k, m} \left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^{s+1} \min\left\{1; \frac{d^m(e)}{|z|^m}\right\} +$$
$$+ 14\lambda \frac{d(e)}{\gamma(e)} \frac{d^m(e)}{|z|^m}, \quad |z| \geqslant 4\lambda d(e);$$

т. е.

$$|\ln|z| - h_e^{(m)}(z)| < B'_m \left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^{s+1} \frac{d^m(e)}{|z|^m}, \quad |z| \geqslant 4\lambda d(e), \tag{15}$$

где B'_m — постоянная, зависящая только от m и λ.

…ним эту же разность, когда z вне $\bar{e}$, но $|z| < 4\lambda d(e)$. Имеем из (13)

$$z| - h_e^{(m)}(z) = -\ln\frac{\exp[G_e(\infty,\ z) + \ln C(e)]}{|z|} - \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{m} g_k d^k(e)(3\lambda)^k \varphi_{k,\,m}(z). \tag{16}$$

… второго слагаемого получим оценку

$$\left|\sum_{k=1}^{m} g_k d^k(e)(3\lambda)^k\varphi_{k,\,m}(z)\right| < (6\lambda)^{m+1}\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^s \sum_{k=1}^{m} A'_{k+m} d^{k-1}(e) \leqslant$$

$$\leqslant B''_m\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^s [d^{m-1}(e) + 1] \tag{17}$$

… любого z вне $\bar{e}$.

Первое слагаемое в правой части (16) представляем в виде

$$\ln\frac{\exp[G_e(\infty,\ z) + \ln C(e)]}{|z|} = \frac{\exp[G_e(\infty, z) + \ln(C(e)]}{|z|} \times$$

$$\times\left\{\frac{|z|}{\exp[G_e(\infty,\ z) + \ln C(e)]}\cdot\ln\frac{\exp[G_e(\infty,\ z) + \ln C(e)]}{|z|}\right\}. \tag{18}$$

…ее,

$$G_e(\infty, z) + \ln C(e) \leqslant \ln 7\lambda d(e),\quad z \notin \bar{e}, \tag{19}$$

… $|z| < 4\lambda d(e)$. Это прямо следует из известных оценок для функции …на [3, стр. 347].

Следовательно,

$$\exp[G_e(\infty, z) + \ln C(e)] \leqslant 7\lambda d(e),\ |z| < 4\lambda d(e). \tag{20}$$

…ним выражение в фигурных скобках в равенстве (18):

$$G_e(\infty, z) > 0,\quad z \text{ вне } \bar{e},$$

поэтому

$$\exp[G_e(\infty, z) + \ln C(e)] > C(e),\quad z \notin \bar{e},$$

а значит,

$$\frac{|z|}{\exp[G_e(\infty,\ z) + \ln C(e)]} < \frac{4\lambda d(e)}{C(e)},\ z \notin \bar{e},\ |z| < 4\lambda d(e). \tag{21}$$

Так как

$$|t\ln t| \leqslant \max\left\{\frac{1}{e};\quad |t_0 \ln t_0|\right\},\quad 0 < t \leqslant t_0,$$

то ввиду (20) и (21)

$$\left|\frac{|z|}{\exp[G_e(\infty, z) + \ln(C(e)]}\ln\frac{\exp[G_e(\infty,\ z) + \ln C(e)]}{|z|}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\lambda d(e)}{C(e)}\ln\frac{4\lambda d(e)}{C(e)} < 16\lambda^2\left[\frac{d(e)}{C(e)}\right]^2,\ |z| < 4\lambda d(e),\ z \notin \bar{e}.$$

Поскольку $C(e) \geqslant \gamma(e)$, то из (18), (20) и полученного выше неравенства следует, что

$$\left|\ln\frac{\exp[G_e(\infty,\ z) + \ln C(e)]}{|z|}\right| < 112\lambda^3\left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^2\frac{d(e)}{|z|},\ |z| < 4\lambda d(e). \tag{22}$$

Сопоставляя (16), (17) и (22), получаем окончательно

$$|\ln|z| - h_e^{(m)}(z)| < \tilde{B}_m (1 + d^{m-1}(e) \left[\frac{d(e)}{\gamma(e)}\right]^s \frac{d(e)}{|z|}, \quad |z| < 4\lambda d(e), \qquad (23)$$

где $\tilde{B}_m$ — постоянная, зависящая только от m и λ.

Неравенства (15) и (23) в совокупности равносильны (9) ($\zeta = 0$). Лемма 3 доказана.

Обозначим через $\gamma_\zeta(\delta; E)$ аналитическую емкость множества, являющегося пересечением круга $|z - \zeta| < \delta$ с дополнением к компакту E. Определим теперь функцию $\gamma(\delta; E)$:

$$\gamma(\delta; E) = \inf_{\zeta \in \partial E} \gamma_\zeta(\delta; E),$$

где ∂E — граница E.

Лемма 4. *Пусть плоский компакт E таков, что*

$$\gamma(\delta; E) > A\delta, \qquad (24)$$

где $A > 0$ не зависит от δ, $0 < \delta < 1$. Пусть R_δ есть множество точек ζ из E, отстоящих от его границы не более, чем на δ. Тогда существует функция $h_\zeta(z)$, гармоническая по z на E и являющаяся кусочно-непрерывной функцией от $\zeta \in R_\delta$ такая, что*

$$\iint\limits_{R_\delta} |z - \zeta|^{m-2} |\ln|z - \zeta| - h_\zeta(z)| \, d\xi \, d\eta < C_m \delta^m, \quad z \in E,$$

где постоянная C_m не зависит от δ; $\xi + i\eta = \zeta$; $m = 2, 3, \ldots$

Доказательство. Покроем R_δ конечным числом (n) кружков $|\zeta_i - z| < 2\delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если точка ζ входит в несколько кружков, то будем считать, что ей соответствует тот из них, центр которого имеет наименьший номер. Если точке $\zeta \in R_\delta$ соответствует кружок $|\zeta_i - z| < 2\delta$, то поставим ζ в соответствие также множество $e_i = \{z : z \bar{\in} D, |z - \zeta_i| < 2\delta\}$,

где $D \supset E$ — открытое множество, содержащее E, и граница D настолько мало отклоняется от E, что выполняются неравенства

$$\gamma(e_i) \geqslant \vartheta \gamma(\tilde{e}_i),$$

где $\tilde{e}_i = \{z : z \bar{\in} E, \ |z - \zeta_i| < 2\delta\}$; ϑ — некоторая абсолютная постоянная, $0 < \vartheta < 1$. Тогда в силу условия (24) будут выполняться неравенства

$$\gamma(e_i) > A_1 \delta,$$

где $A_1 > 0$ не зависит ни от δ, ни от i.

Теперь для каждого $\zeta \in R_\delta$ и соответствующего ей множества e_i отыскиваем функцию $h_\zeta(z)$, построенную при доказательстве леммы 3**. Функция $h_\zeta(z)$ будет кусочно-непрерывной функцией от $\zeta \in R_\delta$, гармонической по z на E*** и будет удовлетворять неравенству

$$|\zeta - z|^{m-2} |\ln|\zeta - z| - h_\zeta(z)| < C'_m \delta^{m-2} \min\left\{\frac{\delta}{|\zeta - z|}; \frac{\delta^3}{|\zeta - z|^3}\right\}, \quad z \in E,$$

где C'_m — постоянная, зависящая только от m и A_1.

---

* А именно: имеющей разрывы на конечном числе дуг окружностей.

** А именно $h_\zeta(z) = h_{e_i}^{(m+1)}(z)$.

*** Так как $\tilde{e}_i \bar{\in} E$.

Отсюда

$$\iint\limits_{R_\delta} |\zeta - z|^{m-2} \left| \ln|\zeta - z| - h_\zeta(z) \right| d\xi d\eta <$$

$$< C'_m \delta^{m-2} \iint\limits_{|\zeta - z| < \delta} \frac{\delta}{|\zeta - z|} d\xi\, d\eta + C'_m \delta^{m-2} \iint\limits_{|\zeta - z| > \delta} \frac{\delta^3}{|\zeta - z|^3} d\xi\, d\eta <$$

$$< C_m \delta^m, \quad z \in E.$$

Лемма 4 доказана.

Теорема. *Если компакт E удовлетворяет условию (24), то всякую функцию $f(z)$, непрерывную на E и во всех внутренних точках E являющуюся регулярным решением уравнения*

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} f(z) \equiv \frac{1}{2^{k+l}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^l f(z) = 0, \tag{25}$$

где k, l — некоторые натуральные числа, можно разложить в равномерно сходящийся к ней на E ряд регулярных на E решений того же самого уравнения.

Доказательство. С помощью операции усреднения [5] может быть построена функция $\varphi_\delta(z)$, имеющая непрерывные частные производные до $(k+l)$ — того порядка и такая, что

1) $|f(z) - \varphi_\delta(z)| \leqslant \omega_f(\delta)$ при всех z,

где $\omega_f(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(z)$, продолженной непрерывно на всю плоскость;

2) $\left| \dfrac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \varphi_\delta(z) \right| \leqslant \mathrm{const}\, \dfrac{\omega_f(\delta)}{\delta^{k+l}}$ при всех z;

3) $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \varphi_\delta(z) = 0, \quad z \in (E \setminus R_\delta).$

Функцию $\varphi_\delta(z)$ можно представить в виде (см. [6, 7])

$$\varphi_\delta(z) = f_\delta^1(z) + C^{k,l} \iint\limits_{R_\delta} \frac{\partial^{k+l} \varphi_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^k \partial \zeta^l} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{k-1} (\zeta - z)^{l-1} \ln|\zeta - z|\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$C^{k,l} = \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^{k+l}}{2^{k+l-2} (k-1)!\,(l-1)!}, \quad \bar{z} \in E,$$

$f_\delta^1(z)$ — регулярное на E решение уравнения (25), $\tilde{R}_\delta = (\tilde{E} \setminus E) \cup R_\delta$, множество $\tilde{E}$ — открытое и содержит $E : \tilde{E} \supset E$.

Если все точки границы $\partial\tilde{E}$ множества $\tilde{E}$ достаточно близки к E, то функция $\tilde{\varphi}_\delta(z)$,

$$\tilde{\varphi}_\delta(z) = f_\delta^1(z) + C^{k,l} \iint\limits_{\tilde{R}_\delta} \frac{\partial^{k+l} \varphi_\delta(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}^k \partial \zeta^l} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{k-1} (\zeta - z)^{l-1} \ln|\zeta - z|\, d\xi\, d\eta,$$

сколь угодно близка к $\varphi_\delta(z)$ на E.

Если же и δ достаточно мало, то функция $f_\delta(z)$,

$$f_\delta(z) = f_\delta^1(z) + C^{k,l} \iint\limits_{R_\delta} \frac{\partial^{k+l} \varphi_\delta(\zeta_1)}{\partial \bar{\zeta}^k \partial \zeta^l} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{k-1} (\zeta - z)^{l-1} h_\zeta(z)\, d\xi\, d\eta,$$

сколь угодно близка к $f(z)$, ибо

$$|\tilde{\varphi}_\delta(z) - f_\delta(z)| \leqslant \iint\limits_{R_\delta} \mathrm{const}\,\frac{\omega_f(\delta)}{\delta^{k+l}}\,|\zeta - z|^{k+l-2}\,|\ln(\zeta - z| - h_\zeta(z)|\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \mathrm{const}\,\frac{\omega_f(\delta)}{\delta^{k+l}} \iint\limits_{R_\delta} |\zeta - z|^{m-2}\,|\ln|\zeta - z| - h_\zeta(z)|\,d\xi\,d\eta,\ m = k + l,$$

последнее ввиду леммы $4 \leqslant \mathrm{const}\,\omega_f(\delta)$, $z \in E$. Через const везде обозн чается постоянная, не зависящая от δ и $f(z)$. Функция $f_\delta(z)$ является рег лярным на E решением уравнения (25) (см. [6]).

Теорема доказана.

Для полного решения вопроса о возможности регулярной аппроксима ции решений уравнения (25), по-видимому, потребуется ввести понятн (k, l)-емкости, разумно обобщающее понятие аналитической емкости. Док занная теорема дает основания для следующей гипотезы.

Гипотеза. Аналитическая емкость является минимальной емкостью т. е. все (k, l)-емкости должны оцениваться снизу через аналитическук емкость.

Это утверждение можно рассматривать как обобщение хорошо извест ного неравенства, связывающего аналитическую и гармоническую емкости

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Витушкин. ДАН СССР, 123 (1958), 959—962.
2. В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев. Конструктивная теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, М. — Л., 1964.
3. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. ГТТИ, М. — Л., 1952.
4. С. Н. Мергелян. Приложение к книге Дж. Уолша «Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области». Изд-во иностр. лит., М., 1961.
5. К. К. Головкин. О приближении функций в произвольных нормах. Труды МИАН, LXX, 1964, 26—37.
6. Э. М. Саак. ДАН СССР, 165 (1965), 1249—1252.
7. Э. М. Саак. О регулярной аппроксимации решений комплексных эллиптических уравнений любого порядка. «Укр. матем. журн.», 18, № 6, 1966.

Поступила 6 июля 1966 г.