Выпуск 11 1970

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ—ЛЕФФЛЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ. II

М. Н. Шеремета

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1].

§ 3. Основная теорема

1°. Исследование асимптотического поведения интегралов $E_\omega^{(n)}(x)$. Определим асимптотику интеграла

$$E_\omega^{(0)}(x) = \int\limits_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon} \frac{x^z\,dz}{\Gamma(1+z\omega(z))} \tag{3.1}$$

при условии, что

$$|\varphi| \leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2} - \delta \tag{3.2}$$

где $\delta > 0$ — произвольно малое число. Так как

$$\left|\int\limits_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_1} \frac{x^z\,dz}{\Gamma(1+z\omega(z))}\right| \leqslant \exp\left\{\omega(\nu)(|\ln\omega(\nu)| + \ln_4\nu)\,O\left(\frac{\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\},$$

$$\left|\int\limits_{\nu_2}^{\nu_2+1-\varepsilon} \frac{x^z\,dz}{\Gamma(1+z\omega(z))}\right| \leqslant B_1,$$

где $B_1 > 0$ — некоторая постоянная величина (это легко показать, как и при доказательстве леммы 2), то мы можем записать

$$E_\omega(x) = \exp\left\{\omega(\nu)(|\ln\omega(\nu)| + \ln_4\nu)\,O\left(\frac{\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\} + \int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{x^z\,dz}{\Gamma(1+z\omega(z))}. \tag{3.3}$$

Положим $z = \rho e^{i\theta}$ и обозначим

$$-\ln\Gamma(1+z\omega(z)) + z\ln x = h(z, x). \tag{3.4}$$

Тогда интеграл, стоящий в правой части (3.3), можно представить следующим образом:

$$\check{E}_\omega^{(0)}(x) = \int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} \exp\{h(z, x)\}\,dz. \tag{3.5}$$

Асимптотику интеграла $\check{E}_\omega^{(0)}(x)$ будем искать методом перевала. Точками перевала (см. [2, стр. 44]) будем называть точки, для которых

$$h_z'(z, x) = 0. \tag{3.6}$$

Мы найдем теперь точку перевала $z = z_*(x)$, лежащую в области $D_{\nu_1, \nu_2, \eta} = \{\nu_1 \leqslant |z| \leqslant \nu_2, \ |\theta| < \pi - \eta\}$, $0 < \eta \leqslant \frac{\pi}{4}$. Прежде всего отметим, что если $z = \rho e^{i\theta} \in D_{\nu_1, \nu_2, \eta}$, то

$$\omega(z) = \omega(\rho) + O\left(\frac{1}{\ln \rho \ln_2 \rho}\right) = \omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right) = \omega(\nu) + o\left(\frac{1}{\ln \nu}\right).$$

Далее, докажем, что уравнение (3.6) в области $D_{\nu_1, \nu_2, \eta}$ имеет решение, причем единственное. Для этого обозначим

$$f(z, x) = h_z'(z, x), \ f_1(z, x) = \ln x - \omega(\nu) \ln(z\omega(\nu)),$$
$$f_2(z, x) = f(z, x) - f_1(z, x).$$

Как и при доказательстве леммы 1, получаем, что в области $D_{\nu_1, \nu_2, \eta}$ и на ее границе $\Gamma_{\nu_1, \nu_2, \eta}$ выполняются следующие соотношения:

$$f(z, x) = \ln x - \left(\omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)\right) \ln \left\{z\left(\omega(\nu) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)\right)\right\} + O\left(\frac{1}{\ln_2 \nu}\right), \tag{3.7}$$

$$f_2(z, x) = \left(\omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)\right) O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right) - O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right) \ln \left\{z\left(\omega(\nu) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)\right)\right\} + O\left(\frac{1}{\ln_2 \nu}\right) = (\omega(\nu) + |\ln \omega(\nu)|) O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln_2 \nu}\right). \tag{3.8}$$

Поэтому ввиду того, что $\omega(\nu) = O(1)$, $\frac{1}{\omega(\nu)} = O(1)$, на $\Gamma_{\nu_1, \nu_2, \eta}$ выполняется $|f_2(z, x)| = o(1)$ при $r \to \infty$.

Далее, если $|\theta| < \pi - \eta$, то

$$f_1(\nu_1 e^{i\theta}, x) = \ln r - \omega(\nu) \ln(\nu_1 \omega(\nu)) + i(\varphi - \omega(\nu)\theta),$$

и ввиду равенства (2) и (1.3) получаем

$$|f_1(\nu_1 e^{i\theta}, x)| = |\omega(\nu) \ln_4 \nu (1 + o(1)) + i(\varphi - \omega(\nu)\theta)| \geqslant \frac{\omega(\nu)}{2} \ln_4 \nu.$$

Аналогично при $|\theta| < \pi - \eta$ выполняется $|f_1(\nu_2 e^{i\theta}, x)| \geqslant \frac{\omega(\nu)}{2} \ln_4 \nu$.

Если же $\nu_1 \leqslant \rho \leqslant \nu_2$, то

$$f_1(\rho e^{i(\pi - \eta)}, x) = \ln r - \omega(\nu) \ln(\rho\omega(\nu)) + i(\varphi - \pi\omega(\nu) + \eta\omega(\nu)),$$

и ввиду неравенства (3.2) выполняется

$$|\varphi - \pi\omega(\nu) + \eta\omega(\nu)| \geqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{4} + \delta.$$

Поэтому $|f_1(\rho e^{i(\pi-\eta)}, x) \geqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{4} + \delta$, если $\nu_1 \leqslant \rho \leqslant \nu_2$. Аналогично при $\nu_1 \leqslant \rho \leqslant \nu_2$ выполняется $|f_1(\rho e^{-i(\pi-\eta)}, x)| \geqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{4} + \delta$. Значит, на контуре $\Gamma_{\nu_1, \nu_2, \eta}$ при достаточно больших r ввиду условия 4) выполняется

$$|f_1(z, x)| > |f_2(z, x)|. \tag{3.9}$$

Поэтому по теореме Руше функция $f(z, x) = h_z'(z, x) = f_1(z, x) + f_2(z, x)$ имеет столько нулей в области $D_{\nu_1, \nu_2, \eta}$, сколько функция $f_1(z, x)$, а так как функция $f_1(z, x)$ имеет один нуль в области $D_{\nu_1, \nu_2, \eta}$, то уравнение (3.6) имеет единственное решение. Приравняв $f(z, x)$ нулю, из равенства (3.7) получаем, что точка перевала $z = z_*(x)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$z_*(x) = \rho_* e^{i\theta_*} = \frac{1}{\omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)} x^{\frac{1}{\omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)}}.$$

Так как из равенства (1.3) следует, что

$$\nu = \frac{1}{\omega(\nu)} r^{\frac{1}{\omega(\nu) + O\left(\frac{1}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)}} = \frac{1}{\omega(\nu)} r^{\frac{1}{\omega(\nu)}} e^{O\left(\frac{1}{\ln_2 \nu}\right)} = \frac{1 + o(1)}{\omega(\nu)} r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}, \tag{3.10}$$

то

$$\rho_* = \frac{1}{\omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)} r^{\frac{1}{\omega(\nu)}} e^{O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln_2 \nu}\right)} = \frac{1 + o(1)}{\omega(\nu)} r^{\frac{1}{\omega(\nu)}} = \nu(1 + o(1)),$$

и поэтому при достаточно больших r выполняется $\nu_1 < \rho_* < \nu_2$;

$$\theta_* = \frac{\varphi}{\omega(\nu)} + (\omega(\nu))^{-2} O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right). \tag{3.11}$$

В дальнейшем вместо $z_*(x)$ будем писать z_*.

Проведем через начало координат и точку z_* прямую, которая пересечет окружности $C_1 = \{|z| = \nu_1\}$ и $C_2 = \{|z| = \nu_2\}$ в точках z_1 и z_2, и обозначим через γ_1 меньшую часть окружности C_1, лежащую между точками ν_1 и z_1, через γ_2 — меньшую часть окружности C_2, лежащую между ν_2 и z_2, и через Γ — отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2. Тогда, если считать направление интегрирования вдоль дуг γ_j, $j = 1, 2$, таким, что область, ограниченная этими дугами и отрезками $[\nu_1, \nu_2]$ и Γ, находится слева, то по теореме Коши

$$\check{E}_\omega^{(0)}(x) = \int_\Gamma \exp\{h(z, x)\}\, dz - \int_{\gamma_1} \exp\{h(z, x)\}\, dz - \int_{\gamma_2} \exp\{h(z, x)\}\, dz. \tag{3.12}$$

Перейдем к оценке интегралов, стоящих в правой части (3.12). Так как

$$I_{\gamma_1} = \int_{\gamma_1} \exp\{h(z, x)\}\, dz = \int_{\gamma_1} \exp\{-\ln\Gamma(1 + z\omega(z)) + z\ln x\}\, dz =$$
$$= \int_{\gamma_1} \exp\{-\ln\Gamma(1 + \nu_1 e^{i\theta}\omega(\nu_1 e^{i\theta})) + \nu_1 e^{i\theta}(\ln r + i\varphi)\}\, d(\nu_1 e^{i\theta}),$$

то, учитывая (1.3) и соотношение $\omega(\nu_1 e^{i\theta}) = \omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)$, получаем

$$|I_{\gamma_1}| \leqslant \nu_1 \int_0^{\nu_2} \exp\left\{-\nu_1 \cos\theta\left(\omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)\right)\left[\ln\left\{\nu_1\left(\omega(\nu) + \right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)\right)\right\} - 1 + O\left(\frac{\ln \nu_1}{\nu_1}\right)\right] + \nu_1 \sin\theta\left(\omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right)\right)\theta +$$
$$\left. + \nu_1 \ln r\cos\theta - \varphi\nu_1 \sin\theta\right\} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{\omega(\nu)O(\nu_1)\}\int_0^{|\theta_*|}\exp\{-\nu_1\cos\theta\,[\omega(\nu)\ln(\nu_1\omega(\nu)) - \ln r]\}\,d\theta =$$

$$= \exp\{\omega(\nu)O(\nu_1)\}\int_0^{|\theta_*|}\exp\Big\{-\nu_1\cos\theta\Big[\omega(\nu)\ln(\nu\omega(\nu)) - \ln_4\nu -$$

$$-\omega(\nu)\ln(\nu\omega(\nu)) + O\left(\frac{1}{\ln_2\nu}\right)\Big]\Big\}\,d\theta =$$

$$= \exp\{\omega(\nu)O(\nu_1)\}\int_0^{|\theta_*|}\exp\left\{O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)\cos\theta\right\}d\theta =$$

$$= \exp\left\{\omega(\nu)O\left(\frac{\nu}{\ln_3\nu}\right) + O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\}. \tag{3.13}$$

Аналогично

$$|I_{\gamma_2}| = \left|\int_{\gamma_2}\exp\{h(z,\ x)\}\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \nu_2\int_0^{|\theta_*|}\exp\Big\{-\nu_2\cos\theta\left(\omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3\nu}{\ln\nu\ln_2\nu}\right)\right)\Big[\ln\Big(\nu_2\Big(\omega(\nu) +$$

$$+ O\left(\frac{\ln_3\nu}{\ln\nu\ln_2\nu}\right)\Big)\Big) - 1 + O\left(\frac{\ln\nu_2}{\nu_2}\right) + \nu_2\sin\theta\left(\omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3\nu}{\ln\nu\ln_2\nu}\right)\right)\theta +$$

$$+ \nu_2\cos\theta\ln r - \nu_2\varphi\sin\theta\Big\}\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{\omega(\nu)O(\nu_2)\}\int_0^{|\theta_*|}\exp\left\{-\nu_2\cos\theta\omega(\nu)\ln\frac{\nu_2}{\nu}\right\}d\theta =$$

$$= \int_0^{|\theta_*|}\exp\left\{-\nu_2\omega(\nu)\cos\theta\ln_4\nu\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln_4\nu}\right)\right)\right\}d\theta, \tag{3.14}$$

и интеграл $I_{\gamma_2}\to 0$ при $r\to\infty$, если $|\theta_*| < \frac{\pi}{2} - \delta$, т. е. если ввиду (3.11) и $\omega(\nu) = O(1)$, $\frac{1}{\omega(\nu)} = O(1)$ выполнено условие (3.2).

Далее, так как $h_z'(z_*,\ x) = 0$, то

$$I_\Gamma = \int_\Gamma \exp\{h(z,\ x)\}\,dz =$$

$$= \int_\Gamma \exp\left\{h(z_*,\ x) + \int_{z_*}^{z}(z-\xi)\,h''_{z^2}(\xi,\ x)\,d\xi\right\}dz,$$

где ξ пробегает отрезок, соединяющий точку z с точкой z_*. Так как (см. [3, стр. 36])

$$h''_{\xi^2}(\xi,\ x) = -\frac{\omega(\xi)}{\xi} + O\left(\frac{1}{\ln|\xi|\ln_2|\xi|}\right) = -\frac{\omega(\nu)}{\xi} + O\left(\frac{\ln_3\nu}{\ln\nu\ln_2\nu}\right),$$

то

$$I_\Gamma = \exp\{h(z_*,\ x)\}\int_\Gamma \exp\{h_1(z) + h_2(z)\}\,dz,$$

где

$$h_1(z) = -\omega(\nu)\int_{z_*}^{z}\frac{z-\xi}{\xi}\,d\xi = -\omega(\nu)\left(z\ln\frac{z}{z_*}+z_*-z\right),$$

$$|h_2(z)| \leqslant O\left(\frac{\ln_3\nu}{\nu\ln_2\nu}\right)\int_{z_*}^{z}|z-\xi||\,d\xi| =$$

$$= O\left(\frac{\ln_3\nu}{\nu\ln_2\nu}\right)O(\{\nu\ln_3\nu\}^2) = O\left(\frac{\nu(\ln_3\nu)^3}{\ln_2\nu}\right).$$

Таким образом, $I_\Gamma = \exp\{h(z_*, x)\}\,I_\Gamma^*$, где

$$I_\Gamma^* = \int_\Gamma \exp\left\{-\omega(\nu)\left(z\ln\frac{z}{z_*}+z_*-z\right)+O\left(\frac{\nu(\ln_3\nu)^3}{\ln_2\nu}\right)\right\}dz =$$

$$= e^{i\theta_*}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\exp\left\{-\omega(\nu)\left(\rho\ln\frac{\rho}{\rho_*}+\rho_*-\rho\right)e^{i\theta_*}+O\left(\frac{\nu(\ln_3\nu)^3}{\ln_2\nu}\right)\right\}d\rho,$$

и

$$|I_\Gamma^*| \leqslant \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_3\nu)^3}{\ln_2\nu}\right)\right\}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\exp\left\{-\omega(\nu)\cos\theta_*\left(\rho\ln\frac{\rho}{\rho_*}+\rho_*-\rho\right)\right\}d\rho.$$

Так как $\rho\ln\frac{\rho}{\rho_*}+\rho_*-\rho \geqslant 0$ при всех $\rho > 0$, а ввиду (3.11), если $\omega(\nu) = O(1)$ и $\frac{1}{\omega(\nu)} = O(1)$, и условия (3.2), $\cos\theta_* > 0$, то

$$|I_\Gamma^*| \leqslant \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_3\nu)^3}{\ln_2\nu}\right)\right\}.$$

Поэтому

$$I_\Gamma = \exp\left\{h(z_*, x)+O\left(\frac{\nu(\ln_3\nu)^3}{\ln_2\nu}\right)\right\}.$$

Принимая во внимание равенства (3.3), (3.4), (3.5) и (3.12), а также соответствующие оценки для интегралов I_{γ_1}, I_{γ_2} и I_Γ, получаем, что для всех φ, удовлетворяющих условию (3.2), если выполнено условие 4), выполняется

$$E_\omega^{(0)}(x) = \exp\left\{h(z_*, x)+O\left(\frac{\nu(\ln_3\nu)^3}{\ln_2\nu}\right)\right\}+\exp\left\{O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\}.$$

Но так как

$$h(z_*, x) = z_*\ln x - \ln\Gamma(1+z_*\omega(z_*)) = \left(1+O\left(\frac{\ln_3 r}{\ln_2 r}\right)\right)r^{\frac{1}{\omega(\nu)}},$$

то для всех φ, удовлетворяющих условию (3.2), имеем при $r\to\infty$

$$E_\omega^{(0)}(x) = \exp\left\{(1+o(1))x^{\frac{1}{\omega(\nu)}}+O\left(\frac{\nu(\ln\nu)^3}{\ln_2\nu}\right)\right\}+\exp\left\{O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\}. \quad (3.15)$$

Производя в интегралах $E_\omega^{(n)}(x)$ замену $xe^{2\pi in}=x_1$, легко видеть, что для всех φ, удовлетворяющих условию

$$|2\pi n+\varphi|\leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2}-\delta, \tag{3.16}$$

где $\delta>0$ — произвольно малое число, выполняется следующее соотношение:

$$E_\omega^{(n)}(x)=\exp\left\{(1+o(1))\,x^{\frac{1}{\omega(\nu)}}e^{\frac{2\pi in}{\omega(\nu)}}+O\left(\frac{\nu(\ln_3\nu)^3}{\ln_2\nu}\right)\right\}+\exp\left\{O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\} \tag{3.17}$$

при $r\to\infty$.

2°. Справедлива следующая

Лемма 9. *Если $x\in D_m^{(1)}$ $(x\in D_m^{(2)})$, то для всех n, $|n|\leqslant m$, из выполнения (2.21) (из выполнения (2.23)) следует выполнение следующего неравенства:*

$$|2\pi n+\varphi|\leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta. \tag{3.18}$$

Если же $x\in D_m^{(3)}$ $(x\in D_m^{(4)})$, то для n, $-(m+1)\leqslant n\leqslant m$, из выполнения (2.25)(из выполнения (2.27)) следует справедливость (3.18).

Доказательство. Пусть $x\in D_m^{(1)}$. Очевидно, что для всех n, $n\leqslant m$, выполняется

$$\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta-2m\pi\leqslant\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta-2n\pi,$$

а для всех n, $n\geqslant m$, выполняется

$$-2n\pi-\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta\right)\leqslant 2m\pi-\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta\right).$$

Поэтому при $|n|\leqslant m$ из выполнения условия (2.21) следует выполнение условия (3.18).

Если $x\in D_m^{(2)}$, то, ввиду того что $2m+1-\frac{\delta}{\pi}\leqslant\frac{\omega(\nu)}{2}$, для всех $n\geqslant -m$ выполняется

$$-2n\pi-\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta\right)\leqslant -2(m+1)\pi+\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta,$$

а ввиду того что $\frac{\omega(\nu)}{2}<2(m+1)-\frac{\delta}{\pi}$, для всех $n\leqslant m$ выполняется

$$2(m+1)\pi-\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta\right)\leqslant -2n\pi+\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta,$$

т. е. для всех n, $|n|\leqslant m$, из (2.23) следует (3.18).

Аналогично доказывается справедливость леммы 9 и в тех случаях, когда $x\in D_m^{(3)}$ и $x\in D_m^{(4)}$.

Обозначая теперь через D_δ^* следующее множество $D_\delta^*=\left\{\left|\varphi\pm\frac{\pi\omega(\nu)}{2}\right|<\delta\right\}$, положим $D_\delta=G\diagdown D_\delta^*$. Тогда,учитывая результаты теорем 1, 2, 3, а также (3.15), (3.17), (3.2) и (3.16), получаем следующую теорему.

Основная теорема. *Для функции $E_\omega(x)$, представленной рядом (1), где $\omega(z)$ — аналитическая в области $D_{a,\eta}$, действительная на действи-*

...чой оси функция, удовлетворяющая условиям 1), 2), 3), 4), справед... следующие соотношения:

$$E_\rho(x) = \begin{cases} \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}, \text{ если } x \in D_0 \cap D_\delta, \\ \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + \sum\limits_{n=-(m+j)}^{m} \exp\left\{(1+o(1))\, x^{\frac{1}{\omega(\nu)}} e^{\frac{2\pi i n}{\omega(\nu)}} + O\left(\frac{\nu (\ln_3 \nu)^3}{\ln_2 \nu}\right)\right\}, \\ \qquad \textit{если } x \in \left(\bigcup\limits_{i=1}^{4} D_m^{(i)}\right) \cap D_\delta, \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 0, \textit{ если } x \in D_\delta \cap (D_m^{(1)} \cup D_m^{(2)}); \\ 1, \textit{ если } x \in D_\delta \cap (D_m^{(3)} \cup D_m^{(4)}). \end{cases}$$

§ 4. Обобщение основной теоремы

Пусть функция $\lambda_1(\rho) > 0$ при $\rho > a$ монотонно стремится к нулю, когда $\rho \to \infty$, причем

$$\lim_{\rho\to\infty} \lambda_1(\rho) \ln_4 \rho = c > 0, \tag{4.1}$$

а функция $\lambda_2(\rho) > 0$ при $\rho > a$ монотонно стремится к ∞ при $\rho \to \infty$, причем

$$\overline{\lim_{\rho\to\infty}} \frac{\lambda_2(\rho)}{\ln_4 \rho} = d < \infty. \tag{4.2}$$

В этом параграфе мы обобщим основную теорему, заменив условие 4), наложенное на функцию $\omega(z)$, более слабым условием

$$\lambda_1(\rho) \leqslant \omega(\rho) \leqslant \lambda_2(\rho). \tag{4.3}$$

Примерами таких функций могут служить

$$\lambda_1(\rho) = (\ln_4 \rho)^{-1}, \quad \lambda_2(\rho) = \ln_4 \rho,$$
$$\omega(z) = \frac{1}{2}\{(\ln_4 z)^{-1} + \ln_4 z - ((\ln_4 z)^{-1} + \ln_4 z) \sin(\ln_3 z)\},$$

где каждый логарифм понимается в смысле главного значения.

1°. Замена условия 4) условием (4.3). Проследим теперь за всеми оценками, которые делались при доказательстве основной теоремы. Прежде всего отметим, что ввиду (4.1) и (4.2) при $\lambda_1(\rho) \leqslant \omega(\rho) \leqslant \lambda_2(\rho)$ из (1.5) следует

$$\sum_{k=0}^{\nu_1-1} \frac{r^k}{\Gamma(1+k\omega(k))} + \sum_{k=\nu_2+1}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(1+k\omega(k))} \leqslant \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\}.$$

Далее, из оценок (2.6), (2.8) и оценки интеграла I_3 в лемме 8 легко видеть, что при выполнении (2.7) интегралы I_1 и I_2 стремятся к нулю при $r \to \infty$, а интеграл $|I_3| \leqslant \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\}$ при $r \to \infty$, если выполнены условия (4.1), (4.2), (4.3).

Аналогичное можно утверждать и для интегралов $I_j^{(m)}$, $j = 1, 2, 3$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, при соответствующих условиях, наложенных на φ.

Условие $\omega(\rho) \leqslant \lambda_2 = \mathrm{const}$ использовалось также при доказательстве того факта, что множество G совпадает с множеством $a < |x| < \infty$ (§ 2, 4°). Однако и в этом случае вместо $\lambda_2 = \mathrm{const}$ можно взять $\lambda_2(\rho)$. Действительно, для достаточно большого R можно рассмотреть целое число $K(R) = \left[\frac{\lambda_2(R)}{2} + \frac{\delta}{\pi}\right]$ и, как раньше, построить множество $G(R)$, которое является объединением множеств $D_m^{(i)} \cap \{|x| \leqslant R\}$ и совпадает с $a < |x| \leqslant R$. Ввиду произвольности R мы будем иметь интегральное представление функции $E_\omega(x)$ во всей области $a < |x| < \infty$.

В § 3 условие 4) использовалось несколько раз. Во-первых, мы можем заменить его условием (4.3), когда пользуемся оценкой (3.3). Мы получим

$$E_\omega(x) = \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{x^z\, dz}{\Gamma(1 + z\omega(z))}.$$

Из (3.8) при выполнении (4.3), (4.1) и (4.2) получаем, что на контуре $\Gamma_{\nu_1, \nu_2, \eta}$ выполняется

$$|f_2(z, x)| \leqslant O\left(\frac{\ln_4 \nu \ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln_2 \nu}\right) + O\left(\frac{\ln_3 \nu \ln_5 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right) = O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln_2 \nu}\right),$$

$$|f_1(\nu_j e^{i\theta}, x)| \geqslant \frac{1}{2}\omega(\nu)\ln_4 \nu \geqslant \frac{1}{2}c(1 + o(1)), \quad j = 1, 2,$$

$$|f_1(\rho e^{\pm i(\pi - \eta)}, x)| \geqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{4} + \delta \geqslant \frac{\pi c}{4 \ln_4 \nu}(1 + o(1)),$$

где c — постоянная из (4.1), откуда следует, что (3.9) выполняется, т. е. теорему Руше применять можно.

Если условие 4) заменить условием (4.3), то из (3.13) получим $|I_{\gamma_1}| \leqslant \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}$. И наконец, ввиду (4.1) и (3.11) можно переписать в виде

$$\theta_* = \frac{\varphi}{\omega(\nu)} + O\left(\frac{\ln_3 \nu (\ln_4 \nu)^2}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right), \tag{4.4}$$

и оценки интегралов I_{γ_2} и I_Γ^* проходят без изменения.

Таким образом, основная теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 4. *Для функции $E_\omega(x)$, представленной рядом (1), где $\omega(z)$ — аналитическая в области $D_{a, \eta}$, действительная на действительной оси функция, удовлетворяющая условиям 1), 2), 3) и (4.3), справедливы следующие соотношения:*

$$E_\omega(x) = \begin{cases} \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\}, & \text{если } x \in D_\delta \cap D_0; \\ \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + \sum\limits_{n=-(m+j)}^{m} \exp\left\{(1 + o(1))\, x^{\frac{1}{\omega(\nu)}} e^{\frac{2\pi i n}{\omega(\nu)}} + O\left(\frac{\nu(\ln_3 \nu)^3}{\ln_2 \nu}\right)\right\}, & \\ \qquad \text{если } x \in D_\delta \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{4} D_m^{(i)}\right), & \end{cases}$$

где

$$j = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D_\delta \cap (D_m^{(1)} \cup D_m^{(2)}); \\ 1, & \text{если } x \in D_\delta \cap (D_m^{(3)} \cup D_m^{(4)}). \end{cases}$$

2°. **Уточнение асимптотики** $E_\omega(x)$, **когда** $\lambda_1(\rho) \leqslant \omega(\rho) \leqslant \lambda_2 < 2$. Здесь мы уточним асимптотику $E_\omega(x)$, рассматривая вместо множеств D_0 и $D_0^{(1)}$ более широкие множества $\check{D}_0$ и $\check{D}_0^{(1)}$, которые определяются так. Скажем, что $x \in \check{D}_0$, если

$$\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu}\right), \tag{4.5}$$

и $x \in \check{D}_0^{(1)}$, если

$$-\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu}\right) \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu}, \tag{4.6}$$

где $\delta > 0$ — произвольно малое число.

Легко видеть, что интеграл, стоящий в правой части (2.6), при выполнении условия (4.5) во всяком случае не превышает $2\nu_2$. Так что интеграл $I_1 \to 0$ при $r \to \infty$ и при выполнении (4.5). Из (2.8) видно, что при выполнении (4.5) интеграл $I_2 \to 0$ при $r \to \infty$. А так как интеграл $I_3^* \leqslant 2\nu_2$ при выполнении (4.5), то, если φ удовлетворяет условию (4.5), интеграл

$$|I_3| \leqslant \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\} \text{ при } r \to \infty.$$

Аналогичное можно сказать об интегралах $I_j^{(0)}$, $j = 1, 2, 3$, если φ удовлетворяет условию (4.6). Поэтому, как и раньше, имеем

$$E_\omega(x) = \begin{cases} \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\}, & \text{если } x \in \check{D}_0; \\ \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + E_\omega^{(0)}(x), & \text{если } x \in \check{D}_0^{(1)}, \end{cases} \tag{4.7}$$

где интеграл $E_\omega^{(0)}(x)$ определяется равенством (2.14).

Находя далее асимптотику интеграла $E_\omega^{(0)}(x)$ при условии, что

$$|\varphi| \leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2} - \frac{\delta}{\ln_4 \nu}, \tag{4.8}$$

получим, что для интеграла $E_\omega^{(0)}(x)$ (3.15) остается в силе. (Отметим, что при исследовании асимптотики $E_\omega^{(0)}(x)$ при условии (4.8) следует при оценке интегралов I_{γ_1}, I_{γ_2} и I_Γ^* воспользоваться равенством (4.4).

Если обозначить $\check{D}_\delta = \{r > a, \ \lambda_1(\nu) \leqslant \omega(\nu) \leqslant \lambda_2\} \setminus \left\{\left|\varphi \pm \frac{\pi\omega(\nu)}{2}\right| < \frac{\delta}{\ln_4 \nu}\right\}$, то, ввиду (4.7), (3.15), (4.5), (4.6) и (4.8), получим следующую теорему.

Теорема 5. *При предположениях теоремы 4 функция* $E_\omega(x)$ *при* $r \to \infty$ *удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$E_\omega(x) = \begin{cases} \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\}, \text{ если } x \in \check{D}_0 \cap \check{D}_\delta; \\ \exp\left\{O\left(\frac{\nu(\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + \exp\left\{(1 + o(1))\, x^{\frac{1}{\omega(\nu)}} + O\left(\frac{\nu(\ln_3 \nu)^3}{\ln_2 \nu}\right)\right\}, \\ \qquad \text{если } x \in \check{D}_0^{(1)} \cap \check{D}_\delta. \end{cases}$$

3°. *Замечание.* В силу соотношения (3.10) и теоремы Лагранжа

$$\omega(\nu)-\omega(r)=\omega\left(\frac{1+o(1)}{\omega(\nu)}r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)-\omega\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)+\omega\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)-\omega(r)=$$

$$=\omega'_\xi\left(\xi r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)\left(\frac{1+o(1)}{\omega(\nu)}-1\right)+\omega'_\eta(r^\eta)\left(\frac{1}{\omega(\nu)}-1\right),$$

где точка ξ лежит между $\frac{1+o(1)}{\omega(\nu)}$ и 1, а точка η — между $\frac{1}{\omega(\nu)}$ и 1. Но из (4.1), (4.2) и (4.3) следует

$$\frac{c(1+o(1))}{\ln_4\nu}\leqslant\omega(\nu)\leqslant d\ln_4\nu(1+o(1)).$$

Поэтому, учитывая условие 2), получаем

$$\omega(\nu)=\omega(r)+O\left(\frac{(\ln_4 r)^2}{\ln_2 r}\right)=\omega(r)+o(1). \tag{4.9}$$

§ 5. Приложения

1°. Максимум модуля функции $E_\omega(x)$ и ее характеристическая функция Неванлинны. Прежде всего отметим, что ввиду (3.10), (4.1), (4.2) и (4.3) при $r\to\infty$ выполняется

$$\left.\begin{aligned}
O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)&=O\left(\frac{(\ln_4 r)^2}{\ln_3 r}r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)\\
O\left(\frac{\nu(\ln_4\nu)^2}{\ln_3\nu}\right)&=O\left(\frac{(\ln_4 r)^3}{\ln_3 r}r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)\\
O\left(\frac{\nu(\ln_3\nu)^3}{\ln_2\nu}\right)&=O\left(\frac{(\ln_3 r)^3\ln_4 r}{\ln_2 r}r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)
\end{aligned}\right\}=o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right). \tag{5.1}$$

Пусть δ — достаточно малая постоянная величина, $0<\delta<\frac{1}{2}\min\{\pi c,\ 1\}$, где c — постоянная из (4.1).

В дальнейшем будем рассматривать три случая:

1) $\lambda_1(\nu)\leqslant\omega(\nu)<2\sqrt{\delta}$;

2) $2\sqrt{\delta}\leqslant\omega(\nu)<2-\frac{2\delta}{\pi}$;

3) $2-\frac{2\delta}{\pi}\leqslant\omega(\nu)\leqslant\lambda_2(\nu)$, где $\lambda_1(\rho)$ и $\lambda_2(\rho)$ удовлетворяют условиям (4.1) и (4.2).

В первом случае по теореме 5 ввиду (5.1) имеем

$$E_\omega(x)=\begin{cases}\exp\left\{o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)\right\}, & \text{если выполняется (4.5);}\\ \exp\left\{x^{\frac{1}{\omega(\nu)}}+o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)\right\}, & \text{если выполняется (4.8).}\end{cases} \tag{5.2}$$

Во втором случае по основной теореме ввиду (5.1) получаем

$$E_\omega(x)=\begin{cases}\exp\left\{o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)\right\}, & \text{если выполняется (2.19);}\\ \exp\left\{x^{\frac{1}{\omega(\nu)}}+o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)\right\}, & \text{если выполняется (3.2).}\end{cases} \tag{5.3}$$

И наконец, в третьем случае ввиду теоремы 4, соотношений (5.1) и (4.2) для всех φ, $|\varphi| < \pi - \delta$, выполняется

$$E_\omega(x) = \exp\left\{x^{\frac{1}{\omega(\nu)}} + o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right)\right\}. \tag{5.4}$$

Поэтому при $r \to \infty$ справедливо следующее равенство:

$$\ln M(r, E_\omega) = \ln E_\omega(r) = (1 + o(1))\, r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}. \tag{5.5}$$

Обозначим через $V(r)$ величину

$$V(r) = \frac{\omega(\nu)}{\pi} \sin\left\{\min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\omega(\nu)}\right)\right\} r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}. \tag{5.6}$$

Справедлива следующая

Теорема 6. *Для характеристической функции Неванлинны $T(r, E_\omega)$ выполняется следующее соотношение:*

$$T(r, E_\omega) = V(r)(1 + o(1)). \tag{5.7}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$T(r, E_\omega) = m(r, E_\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |E_\omega(re^{i\varphi})|\, d\varphi. \tag{5.8}$$

Пусть G_1 — множество тех значений r, для которых $\lambda_1(\nu) \leqslant \omega(\nu) < 2\sqrt{\delta}$; Φ_1, Φ_2, Φ_3 — множества значений φ, удовлетворяющих соответственно (4.8), (4.5) и соотношению $\left|\varphi \pm \frac{\pi\omega(\nu)}{2}\right| < \frac{\delta}{\ln_4 \nu}$. Легко видеть, что множество $\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3$ совпадает с промежутком $[0, 2\pi)$. Тогда, если $r \in G_1$,

$$L_1(r) + L_2(r) \leqslant m(r, E_\omega) = L_1(r) + L_2(r) + L_3(r), \tag{5.9}$$

где

$$L_i = \frac{1}{2\pi}\int_{\Phi i} \ln^+ |E_\omega(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя (5.2), получаем при $r \to \infty$ и $r \in G_1$

$$L_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu}}^{\frac{\pi\omega(\nu)}{2} - \frac{\delta}{\ln_4 \nu}} (1 + o(1))\, r^{\frac{1}{\omega(\nu)}} \cos\frac{\varphi}{\omega(\nu)}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\omega(\nu)(1 + o(1))}{\pi} r^{\frac{1}{\omega(\nu)}} \cos\frac{\delta}{\omega(\nu)\ln_4 \nu}, \tag{5.10}$$

$$L_2(r) = o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right), \tag{5.11}$$

а ввиду (5.5)

$$L_3(r) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\Phi_3} \ln^+ M(r, E_\omega)\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\delta}{\pi \ln_4 \nu} \ln M(r, E_\omega) = \frac{2\delta(1 + o(1))}{\pi \ln_4 \nu} r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}. \tag{5.12}$$

Учитывая (5.8), (5.9), (5.10), (5.11) и (5.12), получаем

$$\cos\frac{\delta}{c}=\varliminf_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_1}}\left\{(1+o(1))\cos\frac{\delta}{\omega(\nu)\ln_4\nu}\right\}\leqslant\varliminf_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_1}}\frac{T(r,E_\omega)}{V(r)}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_1}}\frac{T(r,E_\omega)}{V(r)}\leqslant\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_1}}\left\{(1+o(1))\cos\frac{\delta}{\omega(\nu)\ln_4\nu}+\frac{2\delta(1+o(1))}{\omega(\nu)\ln_4\nu}\right\}\leqslant 1+\frac{2\delta}{c}. \quad (5.13)$$

Пусть G_2 — множество тех значений r, для которых $2\sqrt{\delta}\leqslant\omega(\nu)<2-\frac{2\delta}{\pi}$. Тогда из (5.3) аналогично тому, как получили соотношение (5.13), получаем

$$\cos\frac{\sqrt{\delta}}{2}\leqslant\varliminf_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_2}}\left\{(1+o(1))\cos\frac{\delta}{\omega(\nu)}\right\}\leqslant\varliminf_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_2}}\frac{T(r,E_\omega)}{V(r)}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_2}}\frac{T(r,E_\omega)}{V(r)}\leqslant\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_2}}\left\{(1+o(1))\cos\frac{\delta}{\omega(\nu)}+\frac{2\delta(1+o(1))}{\omega(\nu)}\right\}\leqslant 1+\sqrt{\delta}. \quad (5.14)$$

И наконец, пусть G_3 — множество тех значений r, для которых $2-\frac{2\delta}{\pi}\leqslant\omega(\nu)\leqslant\lambda_2(\nu)$. Тогда из (5.4) следует

$$L_1^{(1)}(r)\leqslant m(r,E_\omega)=L_1^{(1)}(r)+L_2^{(1)}(r),$$

где

$$L_1^{(1)}(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta}\ln^+|E_\omega(re^{i\varphi})|\,d\varphi=\frac{\omega(\nu)}{\pi}(1+o(1))\sin\left(\frac{\pi}{\omega(\nu)}-\frac{\delta}{\omega(\nu)}\right)r^{\frac{1}{\omega(\nu)}},$$

$$L_2^{(1)}(r)\leqslant\frac{\delta}{\pi}\ln M(r,E_\omega)=\frac{\delta}{\pi}(1+o(1))\,r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}.$$

Поэтому

$$\varliminf_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_3}}\frac{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}-\frac{\delta}{\omega(\nu)}\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}}\leqslant\varliminf_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_3}}\frac{T(r,E_\omega)}{V(r)}\leqslant\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_3}}\frac{T(r,E_\omega)}{V(r)}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_3}}\frac{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}-\frac{\delta}{\omega(\nu)}\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}}+\varlimsup_{\substack{r\to\infty\\ r\in G_3}}\frac{\delta}{\omega(\nu)\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}}. \quad (5.15)$$

Очевидно, что

$$\frac{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}-\frac{\delta}{\omega(\nu)}\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}}=1+\frac{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}-\frac{\delta}{\omega(\nu)}\right\}-\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}}=$$

$$=1-2\cos\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}-\frac{\delta}{2\omega(\nu)}\right\}\frac{\sin\left\{\frac{\delta}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}}. \quad (5.16)$$

Так как $0 < \delta < \frac{1}{2}$ и $\omega(\nu) \geqslant 2 - \frac{2\delta}{\pi} > \frac{3}{2}$, то $0 < \frac{\pi}{\omega(\nu)} < \frac{2}{3}\pi$, и

$$0 \leqslant \frac{\sin\left\{\frac{\delta}{2\pi}\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}} \leqslant \frac{2\delta}{3\sqrt{3}},$$

так как $\sin t \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}t$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}\pi$. Ввиду (5.16) выполняется

$$1 - \frac{4\delta}{3\sqrt{3}} \leqslant \varliminf_{\substack{r\to\infty \\ r\in G_3}} \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)} - \frac{\delta}{\omega(\nu)}\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}} \leqslant \varlimsup_{\substack{r\to\infty \\ r\in G_3}} \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)} - \frac{\delta}{\omega(\nu)}\right\}}{\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}} \leqslant 1 + \frac{4\delta}{3\sqrt{3}}, \quad (5.17)$$

$$\varlimsup_{\substack{r\to\infty \\ r\in G_3}} \frac{\delta}{\omega(\nu)\sin\left\{\frac{\pi}{\omega(\nu)}\right\}} \leqslant \frac{4\delta}{3\sqrt{3}}. \quad (5.18)$$

Учитывая (5.17), (5.18), из (5.15) получаем

$$1 - \frac{4\delta}{3\sqrt{3}} \leqslant \varliminf_{\substack{r\to\infty \\ r\in G_3}} \frac{T(r, E_\omega)}{V(r)} \leqslant \varlimsup_{\substack{r\to\infty \\ r\in G_3}} \frac{T(r, E_\omega)}{V(r)} \leqslant 1 + \frac{8\delta}{3\sqrt{3}}. \quad (5.19)$$

Из (5.13), (5.14) и (5.19) следует

$$\min\left(\cos\frac{\delta}{c},\ \cos\frac{\sqrt{\delta}}{2},\ 1 - \frac{4\delta}{3\sqrt{3}}\right) \leqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{T(r, E_\omega)}{V(r)} \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{T(r, E_\omega)}{V(r)} \leqslant \max\left(1 + \frac{2\delta}{c},\ 1 + \sqrt{\delta},\ 1 + \frac{8\delta}{3\sqrt{3}}\right),$$

откуда, устремив $\delta \to 0$, получаем соотношение (5.7).

2°. **Точность оценки роста целой функции по лучу.** Пусть $f(re^{i\varphi})$ — целая функция порядка ρ и нижнего порядка λ, $\lambda \leqslant \rho$. Класс таких целых функций обозначим через $\Lambda_{\lambda,\rho}$. Если $f(z) \in \Lambda_{\lambda,\rho}$, то [4, 5]

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln^+|f(re^{i\varphi})|}{T(r, f)} = \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}, & 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}, \\ \pi\lambda, & \lambda > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (5.20)$$

для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Так как $T(r, f) \leqslant \ln M(r, f)$, то в случае, когда $\lambda = 0$, очевидно, что оценка (5.20) точна, если $\frac{1}{2} < \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$, пример целой функции из класса $\Lambda_{\lambda,\rho}$, показывающей на точность оценки (5.20), построил В. П. Петренко [6]. Функция $E_\omega(x)$ указывает на точность оценки (5.20) и в случае, когда $0 < \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$ без ограничения $\lambda > \frac{1}{2}$. Действительно, если положить $\lambda_1 = \frac{1}{\rho}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$, $0 < \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$, и выбрать $\omega(r)$ так, чтобы $\varlimsup_{r\to\infty}\omega(r) = \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$, $\varliminf_{r\to\infty}\omega(r) = \lambda_1 = \frac{1}{\rho}$ (а это возможно ввиду

(4.9)), то легко видеть, что порядок $E_\omega(x)$ равен ρ, а нижний порядок — λ. При $\varphi = 0$ выполняется

$$\ln^+ |E_\omega(re^{i\varphi})| = \ln^+ M(r, E_\omega)$$

и

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M(r, E_\omega)}{T(r, E_\omega)} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M(r, E_\omega)}{V(r)} =$$

$$= \varliminf_{r\to\infty} \frac{\pi}{\omega(\nu)\sin\left\{\min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\omega(\nu)}\right)\right\}} = \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}, \\ \pi\lambda, & \lambda > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Шеремета. Асимптотическое поведение функций типа Миттаг — Леффлера и их приложение. I. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложение», вып. 10. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.

2. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. 1-е изд. ГТТИ, М., 1957.

3. Э. Т. Уиттекер и Дж. Ватсон. Курс современного анализа, т. 2. Гостехиздат, М., 1963.

4. И. В. Островский. О дефектах мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы. ДАН СССР, т. 150, № 1, 1963, 32—35.

5. В. П. Петренко. Рост мероморфной функции по лучу. ДАН СССР, т. 155, № 2, 1964, 281—284.

6. В. П. Петренко. Исследование роста мероморфных функций и величин их дефектов. Автореф. канд. дисс., 1964.

Поступила 7 октября 1968 г.