Выпуск 11 1970

ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С КОНЕЧНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ НУЛЕЙ. II

А. А. Кондратюк

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1]. Нумерация параграфов и теорем продолжена. Здесь находятся точные оценки снизу (сверху) для индикаторов (нижних индикаторов) целых функций нецелого порядка и различные оценки для индикаторов целых функций целого порядка.

§ 3. Оценки снизу для индикаторов целых функций нецелого порядка

Теорема 3. *Если $f(z) \in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta)$, то для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, выполняется неравенство*

$$h(\varphi; f) \geqslant \pi \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho} \right)^+ d\delta(\theta) - \left(\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho} \right)^- dD(\theta) \right\}. \quad (3.1)$$

Для всякого фиксированного φ_0 существует функция $f(z)$ вполне регулярного роста, $f(z) \in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$ такая, что выполняется равенство

$$h(\varphi_0; f) = \pi \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\cos\rho(|\varphi_0-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho} \right)^+ d\delta(\theta) - \left(\frac{\cos\rho(|\varphi_0-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho} \right)^- dD(\theta) \right\}. \quad (3.2)$$

При этом можно указать такие меры $D(\Theta)$ и $\delta(\Theta)$, что ни для одной функции $f(z) \in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$ равенство (3.2) не выполняется сразу для всех φ_0, $0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$.

Следствие 3.1. *Для всякой целой функции $f(z)$ нецелого порядка ρ с максимальной плотностью нулей, не превосходящей числа $D(\Theta_0) = D([0, 2\pi))$, справедливо неравенство*

$$h(\varphi; f) \geqslant -\frac{\pi}{|\sin\pi\rho|} D(\Theta_0). \quad (3.1')$$

Для всякого фиксированного φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, существует такая функция порядка ρ, что

$$h(\varphi; f) = -\frac{\pi}{|\sin\pi\rho|} D(\Theta_0). \quad (3.2')$$

Теорема 3 и следствие 3.1 являются аналогами теоремы 1 и следствия 2 из [2, стр. 412—413]. Наши доказательства будут опираться на эти результаты А. А. Гольдберга.

Неравенство (3.1′) следует из (3.1), если взять $\delta(\Theta)\equiv 0$ и использовать оценку

$$-\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho}\right)^{-}dD(\theta)\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{\pi}{|\sin\pi\rho|}\operatorname{var}_0^{2\pi}D(\theta)=-\frac{\pi}{|\sin\pi\rho|}D(\Theta_0).$$

Оно также непосредственно вытекает из следствия 2 статьи [2], если учесть, что

$$\Delta_2=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r)}{r^\rho}\leqslant D(\Theta_0),$$

Δ_2 — верхняя плотность нулей функции $f(z)$.

Если в (3.2′) вместо $D(\Theta_0)$ стоит Δ_2, то примеры функций, для которых имеет место это равенство, хорошо известны [3, стр. 88]. Чтобы получить нужный нам пример, достаточно выбрать среди них те, для которых справедливо равенство $\Delta_2=D(\Theta_0)$.

Докажем теорему 3. А. А. Гольдберг доказал (первая часть теоремы 1 из [2]), что если нижняя плотность нулей

$$\delta_1(\Theta;f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Theta)}{V(r)}$$

целой функции $f(z)$ нецелого порядка не меньше некоторой неаддитивной S-меры $\Delta_1(\Theta)$, а верхняя плотность

$$\delta_2(\Theta;f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Theta)}{V(r)}$$

не превосходит некоторой неаддитивной S-меры $\Delta_2(\Theta)$, $\Delta_1(\Theta)\leqslant\Delta_2(\Theta)$, то

$$h(\varphi;f)\geqslant-\pi\int\limits_0^{2\pi}-\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho}d\{\Delta_1(\theta),\ \Delta_2(\theta)\},\tag{3.3}$$

где интеграл по неаддитивной мере понимается в смысле А. А. Гольдберга [3]. Справедливы неравенства $\delta_1(\Theta)\geqslant\delta(\Theta)$, $\delta_2(\Theta)\leqslant D(\Theta)$. Если в правой части (3.3) вместо $\Delta_1(\Theta)$ и $\Delta_2(\Theta)$ стоят $\delta(\Theta)$ и $D(\Theta)$ соответственно, то интеграл является интегралом Римана—Стильтьеса и совпадает (см. определение интеграла А. А. Гольдберга [3]) с интегралом в правой части (3.1) с противоположным знаком. Тем самым неравенство (3.1) доказано.

Для доказательства равенства (3.2) нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4. *Для фиксированного φ_0 существует аддитивная S-мера $\nu(\Theta)$ такая, что $\delta(\Theta)\leqslant\nu(\Theta)\leqslant D(\Theta)$ для всех Θ и*

$$\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho}\right)^{+}d\delta(\theta)-\left(\frac{\cos(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho}\right)^{-}dD(\theta)=$$

$$=\pi\int\limits_0^{2\pi}\cos\rho(|\varphi_0-\theta|-\pi)\,d\nu(\theta),\tag{3.4}$$

Доказательство. Обозначим множество тех θ, $0\leqslant\theta<2\pi$, где $\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)>0$ через Ω_+, а множество тех θ, где $\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)<0$, через Ω_-. Точки, где $\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)=0$, присоединим к Ω_+

для Ω_- так, чтобы эти множества состояли из полуоткрытых справа интервалов. Положим

$$\nu(\Theta)=\begin{cases} D(\Theta), & \text{если } \Theta\subset\Omega_+,\\ \delta(\Theta), & \text{если } \Theta\subset\Omega_-,\\ D(\Theta_+)+\delta(\Theta_-), & \text{если } \Theta=\Theta_+\cup\Theta_-,\\ \varnothing\neq\Theta_+\in\Omega_+, & \varnothing\neq\Theta_-\subset\Omega_-.\end{cases}$$

Очевидно, функция $\nu(\Theta)$ является S-мерой и $\delta(\Theta)\leqslant\nu(\Theta)\leqslant D(\Theta)$. Равенства $\nu(\theta)=\nu([0,\theta))$, $\nu(0)=0$, определяют неубывающую функцию $\nu(\theta)$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos\rho(|\varphi_0-\theta|-\pi)\,d\nu(\theta)=\int\limits_{\Omega_+}\cos^+\rho(|\varphi-\theta|-\pi)\,d\nu(\theta)-$$

$$-\int\limits_{\Omega_-}\cos^-\rho(|\varphi_0-\theta|-\pi)\,d\nu(\theta),\qquad (3.4')$$

но при $\Theta\subset\Omega_+$ имеем $\nu(\theta)-\nu(\theta_0)=D([\theta_0,\theta))=D(\theta)-D(\theta_0)$, аналогично, при $\Theta\subset\Omega_-$ имеем $\nu(\theta)-\nu(\theta_0)=\delta(\theta)-\delta(\theta_0)$ и из (3.4′) следует равенство (3.4).

Лемму 4 можно также получить как следствие теоремы Б. Я. Левина, В. И. Мацаева и И. В. Островского об интегралах по неаддитивной мере (теорема 12 [3, § 4]). Функция

$$h(\varphi)=\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\int\limits_0^{2\pi}\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)\,d\nu(\theta)\qquad (3.5)$$

является тригонометрически ρ-выпуклой [4, теорема 24]. Существует целая функция $f(z)$ порядка ρ и вполне регулярного роста, индикатор которой равен $h(\varphi)$ [4, теорема 3]. Построение такой функции проведено в [4, § 4, гл. II]. Равенства (3.4) и (3.5) дают (3.2).

Справедливость последнего утверждения теоремы 3 следует из равенства (3.2) и следующей леммы.

Лемма 5. (лемма из (3, § 5]). *Пусть $f(z)$ — целая функция положительного порядка ρ. Тогда, если индикатор $h(\varphi; f)$ не равен тождественно нулю, то существует точка $\varphi_0\in[0,2\pi)$ такая, что*

$$h(\varphi_0; f)>0.\qquad (3.6)$$

Если $\delta(\Theta)\equiv 0$, то равенство (3.2) перепишется в виде

$$h(\varphi_0; f)=-\pi\int\limits_0^{2\pi}\cos^-\rho(|\varphi_0-\theta|-\pi)\,dD(\theta)\leqslant 0.$$

Из этого соотношения и неравенства (3.6) следует последнее утверждение теоремы 3.

Следующая теорема устанавливает оценку сверху для нижних индикаторов

$$\underline{h}(\varphi; f)=\underline{\lim}^*\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}.$$

Теорема 4. *Если $f(z)\in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$, то для всех $\varphi\in[0,2\pi)$ выполняется*

$$\underline{h}(\varphi; f)\leqslant\pi\int\limits_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\cos\rho(\varphi-\theta)-\pi}{\sin\pi\rho}\right)^+dD(\theta)-\left(\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho}\right)^-d\delta(\theta)\right\}.$$

Для фиксированного φ_0, $0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$, *существует функция* $f(z) \in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$, *такая, что*

$$h(\varphi_0; f) = \pi \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\cos \rho\,(|\varphi - \theta| - \pi)}{\sin \pi\rho} \right)^+ dD(\theta) - \left(\frac{\cos \rho\,(|\varphi - \theta| - \pi)}{\sin \pi\rho} \right)^- d\delta(\theta) \right\}.$$

Теорема 4 непосредственно следует из теоремы 2 статьи [2]. Это устанавливается аналогично доказательству теоремы 3.

§ 4. Целые функции целого порядка

Пусть ρ — натуральное число, $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок, $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$. Случай $\rho = 0$ был рассмотрен в § 3 статьи [5]. Следуя А. А. Гольдбергу [3], мы будем говорить, что $\rho(r)$ принадлежит классу сходимости ($\rho(r) \in C$) или расходимости ($\rho(r) \in D$) в зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int_1^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt$. Уточненные порядки $\rho_j(r)$, $\rho_j(r) \to \rho$, при $r \to \infty$ и функции $V_j(r)$, $j = 1, 2, 3$, определяются равенствами $r^\rho = V_3(r) = r^{\rho_3(r)}$, при $\rho(r) \in \mathbf{D}$

$$r^\rho \int_1^r t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt = r^{\rho_1(r)} = V_1(r),$$

при $\rho(r) \in C$

$$r^\rho \int_r^\infty t^{\rho(t)-\rho-1}\,dt = r^{\rho_2(r)} = V_2(r).$$

Пусть $G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$ — класс целых функций целого порядка ρ, определенный как в § 2. Если $f(z) \in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$ и $\rho(r) \in C$, то функция $f(z)$ представима в виде (см. [3, стр. 433])

$$f(z) = \exp\{\alpha z^\rho + P(z)\} \prod_n E\left(\frac{z}{a_n}, \rho - 1\right),$$

где $\alpha = \alpha(f)$ — постоянная, $P(z)$ — многочлен степени не выше $\rho - 1$, a_n — нули функции $f(z)$, $n = 1, 2, \ldots$

Будем рассматривать следующие индикаторы функции $f(z)$:

$$h_j(\varphi; f) = \overline{\lim_{r \to \infty}} V_j^{-1}(r) \ln |f(re^{i\varphi})|, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Теорема 5. *Если* $f(z) \in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$, *где* $\rho(r) \in \mathbf{D}$, *то*

$$\int_0^{2\pi} \cos^+ \rho(\varphi - \theta)\,d\delta(\theta) - \cos^- \rho(\varphi - \theta)\,dD(\theta) \leqslant h_1(\varphi; f) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \cos^+ \rho(\varphi - \theta)\,dD(\theta) - \cos^- \rho(\varphi - \theta)\,d\delta(\theta). \qquad (4.1)$$

Если $f(z) \in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$, *где* $\rho(r) \in C$, *то при* $\alpha(f) = 0$

$$\int_0^{2\pi} \cos^- \rho(\varphi - \theta)\,d\delta(\theta) - \cos^+ \rho(\varphi - \theta)\,dD(\theta) \leqslant h_2(\varphi; f) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \cos^- \rho(\varphi - \theta)\,dD(\theta) - \cos^+ \rho(\varphi - \theta)\,d\delta(\theta) \qquad (4.2)$$

и при $\alpha(f) \neq 0$

$$h_3(\varphi; f) = |\alpha| \cos(\rho\varphi + \arg \alpha). \tag{4.3}$$

Существует функция $f(z) \in G(\rho(r),\ D(\Theta),\ \delta(\Theta))$, где $\rho \in \mathbf{D}$, такая, что для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, выполняется равенство

$$h_1(\varphi; f) = \int_0^{2\pi} \cos^+ \rho(\varphi - \theta)\, dD(\theta) - \cos^- \rho(\varphi - \theta)\, d\delta(\theta). \tag{4.4}$$

Для фиксированного φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, существует функция $f(z) \in G(\rho(r),$ $D(\Theta),\ \delta(\Theta))$, где $\rho(r) \in \mathbf{D}$, такая, что выполняется равенство

$$h_1(\varphi; f) = \int_0^{2\pi} \cos^+ \rho(\varphi - \theta)\, d\delta(\theta) - \cos^- \rho(\varphi - \theta)\, dD(\theta), \tag{4.5}$$

при этом можно указать такие аддитивные меры $D(\Theta)$ и $\delta(\Theta)$, что ни для одной функции $f(z) \in G(\rho(r),\ D(\Theta),\ \delta(\Theta))$, $\rho(r) \in \mathbf{D}$, равенство (4.5) не выполняется сразу для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Существует функция $f(z) \in G(\rho(r),\ D(\Theta),\ \delta(\Theta))$, где $\rho(r) \in C$, $\alpha(f) = 0$, такая, что для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, выполняется равенство

$$h_2(\varphi; t) = \int_0^{2\pi} \cos^+ \rho(\varphi - \theta)\, d\delta(\theta) - \cos^- \rho(\varphi - \theta)\, dD(\theta). \tag{4.6}$$

Для фиксированного φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, существует функция $f(z) \in G(\rho(r),$ $D(\Theta),\ \delta(\Theta))$, где $\rho(r) \in C$, такая, что выполняется равенство

$$h_2(\varphi; f) = \int_0^{2\pi} \cos^- \rho(\varphi - \theta)\, d\delta(\theta) - \cos^+ \rho(\varphi - \theta)\, dD(\theta), \tag{4.7}$$

при этом можно указать такие аддитивные меры $D(\Theta)$ и $\delta(\Theta)$, что ни для одной функции $f(z) \in G(\rho(r),\ D(\Theta),\ \delta(\Theta))$, $\alpha = 0$, равенство (4.7) не выполняется сразу для всех φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Следствие 5.1. *Если у целой функции $f(z)$ целого порядка максимальная и минимальная плотности нулей равны соответственно D и δ, то $-D \leqslant h_1(\varphi; f) \leqslant D$ при $\rho(r) \in \mathbf{D}$ и $-D \leqslant h_2(\varphi; f) \leqslant D$ при $\rho(r) \in C$ и $\alpha(f) = 0$. При этом существует целая функция $f(z)$ с максимальной плотностью нулей D, а минимальной δ, такая, что $h_1(\varphi; f) \equiv D$ при $\rho(r) \in \mathbf{D}$ и $h_2(\varphi; f) \equiv D$ при $\rho(r) \in C$.*

Для фиксированного φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, можно указать целую функцию $f(z)$ с плотностью нулей $D = \delta$, такую, что $h_1(\varphi; f) = -D$ при $\rho(r) \in \mathbf{D}$ и $h_2(\varphi; f) = -D$ при $\rho(r) \in C$.

Первая часть теоремы 5 является непосредственным следствием теоремы 1 из [3, § 5]. Это устанавливается аналогично доказательству теоремы 3. Чтобы получить примеры функций, для которых выполняются равенства (4.4), (4.5), (4.6) и (4.7), надо взять те из построенных в [3], для которых справедливо $D(\Theta) = \Delta_2(\Theta)$, $\delta(\Theta) = \Delta_1(\Theta)$. Такие функции существуют (частный случай $\delta(\Theta) \equiv 0$ [5]).

Следствие 5.1 вытекает из следствия 2 статьи [4]. Из замечания в конце [3] следует, что соотношения (4.1), (4.2) и (4.3) останутся справедливыми, если вместо $h_j(\varphi; f)$ поставить нижние индикаторы

$$\underline{h}_j(\varphi; f) = \varliminf_{r \to \infty}{}^{*} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{V_j(r)}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Существуют также примеры, показывающие точность этих оценок.

В заключение рассмотрим один частный случай. Если $D_0(\theta)$ и $\delta_0(\theta)$ — ступенчатые функции на $[0, 2\pi]$ с единственным разрывом в точке θ_0, то результаты статьи сформулируются так. Обозначим $D_0 = D(\Theta_0) = D(\theta_0+0) - D(\theta_0-0)$, $\delta_0 = \delta(\theta_0+0) - \delta(\theta_0-0)$.

Следствие 2.1. *Для всякой целой функции* $f(z) \in G(\rho(r), D_0(\Theta), \delta_0(\Theta))$, *где* ρ *нецелое, выполняются неравенства*

$$h(\varphi; f) \leqslant D_0 H_+(\varphi - \theta) - \delta_0 H_-(\varphi - \theta_0), \tag{2.1'}$$

$$\underline{h}(\varphi; f) \geqslant \delta_0 H_+(\varphi - \theta) - D_0 H_-(\varphi - \theta_0) > -\infty \tag{2.2'}$$

для всех $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Следствие 3.2. *Если* $f(z) \in G(\rho(r), D_0(\Theta), \delta_0(\Theta))$, *где* ρ — *нецелое, то для всех* φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ *выполняется неравенство*

$$h(\varphi; f) \geqslant \pi \left\{\delta_0 \left(\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho}\right)^+ - D_0 \left(\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho}\right)^-\right\}. \tag{3.1'}$$

Следствие 4.1. *Если* $f(z) \in G(\rho(r), D(\Theta), \delta(\Theta))$ *и* ρ — *нецелое, то*

$$\underline{h}(\varphi; f) \leqslant \pi \left\{D_0 \left(\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho}\right)^+ - \delta_0 \left(\frac{\cos\rho(|\varphi-\theta|-\pi)}{\sin\pi\rho}\right)^-\right\}$$

для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Следствие 5.2. *Если* $f(z) \in G(\rho(r), D_0(\Theta), \delta_0(\Theta))$, *где* ρ — *целое*, $\rho(r) \in \mathbf{D}$, *то*

$$\begin{aligned}\cos^+\rho(\varphi-\theta_0)\delta_0 - \cos^-\rho(\varphi-\theta_0)D_0 \leqslant h_1(\varphi; f) \leqslant \\ \leqslant D_0\cos^+\rho(\varphi-\theta_0) - \delta_0\cos^-\rho(\varphi-\theta_0),\end{aligned} \tag{4.1'}$$

если $\rho(r) \in C$, *то при* $\alpha(f) = 0$

$$\begin{aligned}\delta_0\cos^-\rho(\varphi-\theta_0) - D_0\cos^+\rho(\varphi-\theta_0) \leqslant h_2(\varphi; f) \leqslant \\ \leqslant D_0\cos^-\rho(\varphi-\theta_0) - \delta_0\cos^+\rho(\varphi-\theta).\end{aligned} \tag{4.2'}$$

Эти следствия являются усилением результатов работы [6], где предполагалось, что нули лежат на одном луче.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Кондратюк. Целые функции с конечной максимальной плотностью нулей. I. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». (В печати).
2. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV. «Матем. сб.», **66** (108), 1965, 412—457.
3. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III. «Матем. сб.», **65** (107), 1964, 414—453.
4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат М., 1956.
5. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. II. «Матем. сб.», **61** (103), 1963, 334—349.
6. А. А. Кондратюк. Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 7. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.

Поступила 5 июня 1968 г.