ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 11 1970

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ СТЕПЕННОГО ПОРЯДКА

Н. В. Говоров

§ 1. В настоящей статье рассматривается краевая задача Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \quad 1 < t < \infty, \tag{1}$$

при следующих предположениях:

1. $$\arg G(t) = 2\pi\varphi(t)\,t^\rho, \quad 0 < \rho < \infty, \tag{2}$$
$$\varphi(t) \in H(\mu_0), \quad \varphi(\infty) = \lambda > 0, \tag{3}$$
$$-1 < \varphi(1) \leqslant 0. \tag{4}$$
2. $$\ln|G(t)| \in H(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant 1. \tag{5}$$
3. $$\max\{0,\ (2\rho - 1)/(2\rho + 1)\} < \mu_0 \leqslant 1. \tag{6}$$

Случай $0 < \rho < \frac{1}{2}$ был рассмотрен в работе [6]. Задача (1) имеет плюс-бесконечный индекс с точкой завихрения $t = \infty$ [6].

§ 2. Предварительно введем некоторые понятия. Обозначим через D область, граница которой есть луч $L: \{1 \leqslant t \leqslant \infty\}$. Классом $\tilde{B}$ назовем класс функций, регулярных в D и ограниченных в каждом круге $|z| \leqslant R$ (но, может быть, неограниченных в D). Классом B назовем класс функций $f(z) \in \tilde{B}$, ограниченных в D. Условимся в дальнейшем (ср. [3, стр. 182, 127]) называть слабым пределом такой предел

$$\lim_{x\to\infty}{}^{*}\varphi(x) = a,$$

когда $x \to +\infty$, пробегая все значения, за исключением некоторого множества нулевой относительной меры.

Углы $\alpha < \arg z < \beta$ и $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ *будем обозначать соответственно через* $(\widehat{\alpha, \beta})$ и $[\widehat{\alpha, \beta}]$.

Порядок функции, аналитической внутри угла, будет пониматься нами в том же смысле, что и в [6]. Функцию $f(z)$, регулярную и порядка $\sigma > 0$ в $(\widehat{\alpha, \beta})$, будем, как обычно, называть функцией конечного типа, если асимптотически

$$\sup_{|z| \leqslant r,\ \alpha < \arg z < \beta} \ln|f(z)| < Kr^\sigma, \quad K = \text{const}.$$

Определение 1. *Функция* $f(z)$, *регулярная порядка* $\sigma > 0$ *и конечного типа в* $(\widehat{\alpha, \beta})$ *и непрерывная в* $[\widehat{\alpha, \beta}]$, *называется функцией вполне регулярного роста (в. р. р.) в замкнутом угле* $[\widehat{\alpha, \beta}]$, *если стремление к пределу*

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} r^{-\sigma}\ln|f(re^{i\theta})| = h_f(\theta), \quad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \tag{7}$$

равномерно по θ, *причем исключительное множество* E *общее для всех* θ. *(Здесь* $h_f(\theta)$ *означает индикатор функции* $f(z)$*).*

Класс функций $f(z) \in B$ порядка $\sigma > 0$, имеющих в. р. р. в $[0, \widehat{2\pi}]$, обозначим через $\overline{B}_\sigma$.

Определение 2. *Функция* $f(z)$, *регулярная и порядка* $\sigma > 0$, в $(\alpha, \widehat{\beta})$, *называется функцией в. р. р. в открытом угле* $(\alpha, \widehat{\beta})$, *если она конечного типа в* $(\alpha, \widehat{\beta})$ *и имеет в. р. р. в каждом угле вида* $[\alpha+\varepsilon, \widehat{\beta-\varepsilon}]$, $\varepsilon > 0$.

Если $f(z) \in B$ и имеет в. р. р. в $(0, \widehat{2\pi})$, то будем говорить, что $f(z) \in B_\sigma$.

Поскольку для функции $f(z) \in B$, как показано в [6],

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\nu} \ln|f(re^{i\theta})| \equiv 0\, ^* \tag{8}$$

при любом $\nu > \frac{1}{2}$, то классы B_σ определены только при $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{2}$.

§ 3. Интерес, вызванный функциями в. р. р., объясняется следующей теоремой.

Теорема 1. *Если* $f(z) \in B$, *то существует такое множество* E *конечной логарифмической длины***, *что*

$$\lim_{\substack{r\to+\infty \\ r\overline{\in} E}} r^{-1/2} \ln|f(re^{i\theta})| = a \sin\frac{\theta}{2}, \quad -\infty < a \leqslant 0 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{9}$$

причем E — *общее для всех* θ *и стремление к пределу равномерно по* θ *на отрезке* $[0, 2\pi]$.

С помощью отображения полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на плоскость с разрезом $0 < \arg z < 2\pi$ эта теорема следует из результатов Хеймана [4], который формулируется так же, но только для угла $[0, \widehat{\pi}]$ (с заменой $\sqrt{r}$ на r и $\frac{\theta}{2}$ на θ).

Следствие. *Всякая функция класса* B *является функцией в. р. р. в* $[0, \widehat{2\pi}]$, *если за ее порядок принять* $\frac{1}{2}$.

В дальнейшем любое число $\mu \geqslant \rho_f$, где ρ_f — порядок функции $f(z)$, регулярной в некотором угле $(\alpha, \widehat{\beta})$, будем называть формальным порядком этой функции. Из определения порядка следует, что для любого формального порядка μ, большего ρ_f, справедливо асимптотическое неравенство

$$\sup_{|r| = r,\, \alpha < \arg z < \beta} \ln|f(z)| < r^\mu,$$

а для формального индикатора $h_f^{(\mu)}(\theta)$ при $\mu > \rho_f$ справедливо тождество

$$h_f^{(\mu)}(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\mu} \ln|f(re^{i\theta})| \equiv 0 \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta).$$

В силу (8) мы можем считать число $\frac{1}{2}$ формальным порядком (в угле $[0, \widehat{2\pi}]$) любой функции класса B.

---

* Из (8) следует, что порядок функции $f(z) \in B$ внутри угла $[0, \widehat{2\pi}]$ не превосходит $\frac{1}{2}$.

** Т. е. такое, что $\int_E d\ln r < \infty$. Отметим, что если $\int_E d\ln r < \infty$, то $\operatorname{mes}^* E = 0$, но обратное утверждение неверно [3, стр. 308].

Определение. 3. *Классом* B_σ^* *(соответственно* $\overline{B}_\sigma^*$*) называется класс функций* $f(z) \in B$, *имеющих формальный порядок* σ *и в. р. р. в* $(0, \widehat{2\pi})$ *(соответственно, в* $[0, \widehat{2\pi}]$).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{2}$.

Очевидно, $B_\sigma \subset B_\sigma^*$, $\overline{B}_\sigma \subset \overline{B}_\sigma^*$, но знак включения нельзя заменить знаком равенства. Например, $f_0(z) = \exp(-z^\sigma e^{-i\sigma\pi}) \in B_{1/2}^*$, но $f_0(z) \overline{\in} B_{1/2}$, если $\sigma < \frac{1}{2}$.

Из следствия теоремы 1 вытекает, что $B_{1/2}^* = \overline{B}_{1/2}^* = B$.

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема.

Теорема 2. *Если функция* $f(z)$ *регулярна и ограничена в области* D *и* $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ *— ее внутренние нули*, то ряд*

$$\sum_{|z_n| \geqslant 1} r_n^{-1/2} \sin\frac{\theta_n}{2} \quad (0 < \theta_n < 2\pi) \tag{10}$$

сходится.

Доказательство. С помощью функции $z = -\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2$ отобразим область $D_0 = (0 < \arg z < 2\pi)$ на круг $|\zeta| < 1$. Тогда функция $\varphi(\zeta) = f\left(-\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2\right)$ регулярна и ограничена в $|\zeta| < 1$, и поэтому [5, стр. 462] ряд, составленный по ее нулям ζ_n,

$$\sum_{|\zeta_n| < 1} (1 - |\zeta_n|),$$

сходится. Тогда для нулей z_n и подавно сходится ряд

$$\sum_{|z_n| \geqslant 1} \left(|\sqrt{z_n} + i| - |\sqrt{z_n} - i|\right) \cdot |\sqrt{z_n} + i|^{-1}.$$

Обозначив общий член последнего ряда через a_n, оценим его:

$$a_n = \frac{2i(\sqrt{\overline{z_n}} - \sqrt{z_n})}{(|\sqrt{z_n} + i| + |\sqrt{z_n} - i|) \cdot |\sqrt{z_n} + i|} \geqslant \frac{2\sqrt{r_n}}{(\sqrt{r_n} + 1)^2} \sin\frac{\theta_n}{2} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{r_n}} \sin\frac{\theta_n}{2}.$$

Отсюда следует, что ряд (10) также сходится. Теорема доказана**.

§ 4. Приступим к решению задачи (1). Предположим, что существует решение $X(z)$ в классе $\tilde{B}$, не имеющее нулей в конечной плоскости, кроме, может быть, начала контура L точки $z = 1$. Прологарифмировав краевое условие, разделим почленно полученное равенство на t^{q+1}, где $q = [\rho]$:

$$\ln X^+(t) \cdot t^{-q-1} - \ln X^-(t) \cdot t^{-q-1} = \ln G(t) \cdot t^{-q-1}. \tag{11}$$

Отсюда, используя формулы Сохоцкого, найдем одно из решений в классе $\tilde{B}$:

$$X(z) = \exp\left[\frac{z^{q+1}}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\ln G(x)}{x^{q+1}(x - z)} dx\right]. \tag{12}$$

---

* Всюду впредь будем называть нули $f(z)$ внутренними или граничными (контурными), в зависимости от того, лежат ли они внутри или на границе области D.

** Теорема остается верной, если в (10) считать $|z_n| \geqslant a > 0$, но ряд $\sum_{|z_n| \leqslant a} r_n^{-1/2} \sin\frac{\theta_n}{2}$ может оказаться расходящимся.

Так как согласно (2)—(5) $\ln G(t) = O(t^{\rho})$ при $t \to \infty$, то полученный интеграл сходится.

Функцию (12) назовем канонической функцией краевой задачи Римана (1). Докажем, что $X(z)$ обладает следующими свойствами.

1°. $X(z)$ непрерывна в D вплоть до L, не имеет нулей и полюсов во всей плоскости, включая L, кроме, может быть, точек $z = 1$ и $z = \infty$.

2°. $X(z)$ удовлетворяет краевому условию (1), т. е.

$$X^{+}(t) = G(t)\, X^{-}(t). \tag{13}$$

3°. В точке $z = 0$ выполняется условие

$$\lim_{z \to 0} z^{-q} \ln X(z) = 0. \tag{14}$$

4°. В окрестности $z = 1$ — начала контура L — верна оценка

$$C_1 |z-1|^{\alpha} < |X(z)| < C_2, \quad C_k > 0, \quad C_k = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{15}$$

5°. Порядок роста $X(z)$ при $z \to \infty$ не превосходит ρ:

$$\max_{|z|=r} \ln |X(z)| < C r^{\rho+\varepsilon} \text{ при } r > r_{\varepsilon} \ (C = \mathrm{const},\ \varepsilon > 0). \tag{16}$$

Свойства 1°, 2°, 4° доказываются совершенно так же, как в [6]. Свойство 3° очевидно. Свойство 5° вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Каноническая функция* $X(z)$ *имеет порядок* ρ *и удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\rho} \ln |X(re^{i\theta})| = -\frac{\pi\lambda}{\sin \rho\pi} \cos \rho(\theta - \pi), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{17}$$

если ρ *нецелое, и*

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\rho} (\ln r)^{-1} \ln |X(re^{i\theta})| = -\lambda \cos \rho\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{18}$$

если ρ — *целое. При этом стремление к пределу в обоих случаях равномерно по* θ *на отрезке* $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Доказательство. 1 случай: ρ — нецелое число. Запишем $\ln X(z)$ в такой форме:

$$\ln X(z) = z^{q+1} \int_1^{\infty} \frac{\varphi_*(x)\, dx}{x^{1-\rho+q}(x-z)}, \quad \varphi_*(x) = \varphi(x) + \frac{\ln |G(x)|}{2\pi i x^{\rho}}, \tag{19}$$

где в силу условий (2)—(5) $\varphi_*(x) \in H_{[1,\infty)}$, $\varphi_*(\infty) = \lambda > 0$*. Но тогда согласно свойствам интеграла типа Коши со степенной особенностью [2, стр. 90] имеем**

$$\ln X(z) = -\frac{\pi\lambda}{\sin \pi\rho} e^{-i\rho\pi} z^{\rho} + O(|z|^{\rho-\varepsilon_0}) \quad (z \to \infty)$$

при некотором $\varepsilon_0 > 0$, где ветвь z^{ρ} выбрана при условии

$$0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi. \tag{20}$$

* Напоминаем, что одним из символов — $f(t) \in H$, $f(t) \in H(\mu)$, $f(t) \in H_{\Lambda}$, $f(t) \in H_{\Lambda}(\mu)$ мы обозначаем принадлежность функции $f(t)$ классу Гельдера: $|f(t_1) - f(t_2)| < A |x_1^{-1} - x_2^{-1}|^{\mu}$, где t_1, t_2 принадлежат кривой Λ; $A > 0$, $0 < \mu \leqslant 1$.

** Для большей ясности с помощью обратного преобразования можно было бы перейти к конечному контуру.

Отсюда следует, что равномерно по θ

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho}\ln|X(re^{i\theta})| = -\frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi}\cos\rho(\theta-\pi) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

2 случай: ρ — целое. Тогда (19) примет вид

$$\ln X(z) = z^{\rho+1}\int_1^\infty \frac{\varphi_*(x)}{x(x-z)}dx.$$

В силу свойств интеграла типа Коши вблизи концов контура [2, стр. 90] имеем

$$\ln X(z) = -\lambda z^\rho \ln z + O(|z|^\rho)$$

с выбором ветвей $\ln z$ и z^ρ в соответствии с (20). Тогда

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho}(\ln r)^{-1}\ln|X(re^{i\theta})| = -\lambda\cos\rho\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

при равномерном стремлении по θ. Теорема 3 доказана.

Следствие. *Каноническая функция* $X(z)$ *при* $\rho > 1/2$ *неограничена и порядок ее роста равен* ρ.

В самом деле, если $1/2 < \rho < 1$, то при $r\to\infty$

$$\ln|X(r)| = -\pi\lambda\operatorname{ctg}\rho\pi\cdot r^\rho + o(r^\rho) \to +\infty. \tag{21}$$

Если $\rho > 1$ — нецелое и $\sin\rho\pi > 0$, то

$$\ln|X(re^{i(\pi+\pi/\rho)})| = \pi\lambda(\sin\rho\pi)^{-1}r^\rho + o(r^\rho) \to +\infty. \tag{22}$$

Если $\rho > 1$ — нецелое и $\sin\rho\pi < 0$, то

$$\ln|X(re^{i\pi})| = -\pi\lambda(\sin\rho\pi)^{-1}r^\rho + o(r^\rho) \to +\infty. \tag{23}$$

Наконец, если ρ — целое, то при $r\to\infty$

$$\ln|X(re^{i\pi/\rho})| = \lambda r^\rho\ln r + o(r^\rho\ln r) \to +\infty.$$

Докажем теперь, что свойства 1°—5° вполне характеризуют каноническую функцию. Допустим, что кроме $X(z)$ имеется другая функция $X_0(z)$, удовлетворяющая условиям 1°—5°. Тогда функция $F(z) = X_0(z)/X(z)$ является аналитической в D и не имеет нулей в $D\cup L$, кроме разве точек $z=1$ и $z=\infty$. Но из 2° следует, что $F^+(t) = F^-(t)$, $1<t<\infty$. Поэтому [1, стр. 110] $F(z)$ регулярна в области $0<|z-1|<\infty$. В точке же $z=1$ в силу 4° имеем устранимую особенность, причем $F(1)\neq 0$. Следовательно, $F(z)$ есть целая функция, не имеющая нулей. Но на основании теоремы 3 асимптотически

$$\min_{|z|=r}\ln|X(z)| > -Kr^{\rho+\varepsilon} \quad (K>0).$$

Отсюда и из свойства 5° заключаем, что порядок $F(z)$ не превышает ρ. Тогда по теореме Адамара ([3], стр. 38)

$$F(z) = \exp[a_0 z^q + a_1 z^{q-1} + \cdots + a_q].$$

Это равенство в силу 3° возможно только при $a_0 = a_1 = \cdots = a_q = 0$. Таким образом, $F(z)\equiv 1$ и $X_0(z)\equiv X(z)$, что и требовалось доказать.

§ 5. Докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Общее решение однородной задачи (1) в классе* $\tilde{B}$ *выражается формулой*

$$\Phi(z) = F(z)\,\mathrm{X}(z) \equiv F(z)\exp\left[\frac{z^{q+1}}{2\pi i}\int_1^{\infty}\frac{\ln G(x)\,dx}{x^{q+1}(x-z)}\right], \tag{24}$$

где $F(z)$ — *произвольная целая функция.*

В самом деле, пусть $\Phi(z)$ — произвольное решение задачи (1) из класса $\tilde{B}$. Тогда, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 3, получаем, что функция $F(z) = \Phi(z)/\mathrm{X}(z)$ является целой. Обратно, любая функция вида $\mathrm{X}(x)F(z)$ есть решение задачи (1). Теорема доказана.

Теперь нужно найти те дополнительные условия для целой функции $F(z)$, при которых из (24) получаются решения класса B. Простейшее необходимое условие дается в следующей теореме.

Теорема 5. *Если* $\Phi(z) \in B$, *то порядок* ρ_F *соответствующей целой функции* $F(z)$ *не превосходит* ρ, *причем, если* $\rho > 1/2$, *то* $\rho_F = \rho$.

Неравенство $\rho_F \leqslant \rho$ доказывается совершенно так же, как в [6]. Рассмотрим случай $\rho > 1/2$. Допустим, что $\rho_F < \rho$. Взяв $\varepsilon > 0$ так, что $\rho_F < \rho - \varepsilon$, $\rho - \varepsilon > 1/2$, имеем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|\Phi(re^{i\theta})|}{r^{\rho-\varepsilon}} = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln|\mathrm{X}(re^{i\theta})|}{r^{\rho-\varepsilon}} + \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln|F(re^{i\theta})|}{r^{\rho-\varepsilon}} \neq 0,$$

поскольку предпоследний предел по теореме 4 при некоторых θ равен $+\infty$ или $-\infty$, а последний по определению порядка функции внутри угла тождественно равен нулю. Отсюда на основании упомянутого определения $\rho_\Phi \geqslant \rho - \varepsilon > 1/2$, что в силу соотношения (8) невозможно. Следовательно, $\rho_F = \rho$, что и требовалось доказать.

§ 6. Изучим некоторые асимптотические свойства множества нулей решения однородной задачи в классах B и B^*_σ.

Так как каноническая функция в конечной плоскости нулей не имеет, не считая возможного нуля порядка меньше единицы при $z = 1$, то множество нулей любого решения в классе B задачи (1) совпадает с множеством нулей соответствующей целой функции $F(z)$. Исследуем свойства этого множества.

Теорема 6. *Если* $\Phi(z)$ — *решение задачи (1) в классе* B, *то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1/2}\sin\frac{\theta_n}{2} \quad (0 < \theta_n < 2\pi), \tag{25}$$

составленный по нулям $z_n = r_n e^{i\theta_n} \neq 0$ *этого решения, сходится.*

Эта теорема сразу же следует из теоремы 2, если учесть, что в кольце $0 < |z| < 1$ функция $F(z)$ может иметь лишь конечное число нулей.

Очевидно, ряд (25) не изменится, если суммирование распространить и на граничные нули. В частности, если все нули $\Phi(z)$ лежат на L, то сумма ряда равна нулю, с какой бы густотой эти нули ни располагались. Но с другой стороны, эта густота не может быть произвольной, так как по теореме 3 $\rho_F \leqslant \rho$ и, следовательно, считающая функция нулей решения $\Phi(z)$ необходимо подчинена асимптотическому неравенству [10, стр. 26]

$$n_\Phi(r) = n_F(r) \leqslant \ln M_F(er) + \mathrm{const} < r^{\rho+\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0). \tag{26}$$

Из сказанного ясно, что теорема 6 еще не дает полной характеристики распределения корней решения $\Phi(z) \in B$.

Выясним свойства функции $n_{\Phi}(r)$. Начнем с того, что всякое решение класса B есть по следствию из теоремы 1 функция в. р. р. с формальным порядком 1/2. Исследуем свойства нулей решения класса B_{σ}^{*}. Для этого нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Если $\Phi(z)$ есть решение задачи 1 в классе $\widetilde{B}$, то в любой области $D_b = D \cap (|z| < b)$ имеет место представление**

$$\Phi(z) = F_b(z)\, e^{I_b(z)}, \text{ где } I_b(z) = \frac{z}{2\pi i}\int_0^b \frac{\ln G(x)}{x(x-z)}\,dx, \tag{27}$$

при этом *функция $F_b(z)$ регулярна в круге $|z| < b$ и имеет в нем те же нули и той же кратности, что и $\Phi(z)$.*

Лемма доказывается совершенно так же, как теорема 4.

Лемма 2. *В предположениях леммы 1 при любых r и b, $1 < r < b$, справедливо равенство*

$$\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} I_b'(re^{i\theta})\,d\theta = -\int_0^r \arg G(x)\frac{dx}{x}. \tag{28}$$

Доказательство. Обозначив левую часть равенства (28) через T, и взяв $0 < \varepsilon < r-1$, представим T в таком виде ($z = re^{i\theta}$):

$$T = \operatorname{Im}\int_{|z|=r}\frac{dz}{2\pi i}\int_0^{r-\varepsilon}\frac{\ln G(x)}{x(x-z)}\,dx + \operatorname{Im}\int_{|z|=r}\frac{dz}{2\pi i}\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon}\frac{\frac{1}{x}\ln G(x) - \frac{1}{r}\ln G(r)}{x-z}\,dx +$$
$$+ \operatorname{Im}\left[\frac{\ln G(r)}{2r\pi i}\int_{|z|=r}\ln\frac{z-r-\varepsilon}{z-r+\varepsilon}\,dz\right] + \operatorname{Im}\int_{|z|=r}\frac{dz}{2\pi i}\int_{r+\varepsilon}^{b}\frac{\ln G(x)}{x(x-z)}\,dx \equiv$$
$$\equiv T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \tag{29}$$

Изменяя порядок интегрирования, найдем

$$T_1 = -\int_0^{r-\varepsilon}\arg G(x)\frac{dx}{x}, \quad T_4 = 0. \tag{30}$$

Далее, так как при $x < b$ будет:

$$\left|\frac{1}{x}\ln G(x) - \frac{1}{r}\ln G(r)\right| < A_r|x-r|^{\nu}, \quad 0 < \nu \leqslant 1, \; A_r = \text{const},$$

то при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$|T_2| \leqslant A_r r\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon}\frac{|x-r|^{\nu}}{x|x-z|}\,dx \leqslant B_r\int_{r-\varepsilon}^{r+\varepsilon}\frac{dx}{|x-r|^{1-\nu}} = O(\varepsilon^{\nu}), \; B_r = \text{const}. \tag{31}$$

Наконец, опираясь на теорему Коши, получим

$$T_3 = -\operatorname{Im}\left\{\frac{\ln G(r)}{2r\pi i}\int_{|z|=r}\ln(z-r+\varepsilon)\,dz\right\} = -\frac{\varepsilon}{r}\arg G(r). \tag{32}$$

* Всюду в дальнейшем мы считаем, что $\ln G(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x < 1$.

Из полученных оценок приходим к соотношению

$$T = -\int_0^{r-\varepsilon} \arg G(x) \frac{dx}{x} + o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0). \tag{33}$$

Но поскольку T не зависит от ε, то из (33) при $\varepsilon \to 0$ получаем лемму.

Теорема 7. *Если $\Phi(z)$ — решение одн одной задачи в классе $\widetilde{B}$, то при любом $r > 0$ справедливо авенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\Phi(re^{i\theta})|\,d\theta = \int_0^r \left[\widetilde{n}_\Phi(x) - \frac{1}{2\pi}\arg G(x)\right]\frac{dx}{x} + C_\Phi(r),$$

$$C_\Phi(r) = \ln\frac{r^k|\Phi^{(k)}(o)|}{k!}, \tag{34}$$

где $\widetilde{n}_\Phi(r)$ — число корней $\Phi(z)$ в кольце $0 < |z| \leqslant r$, k — кратность корня функции $\Phi(z)$ при $z = 0$.

Доказательство. Взяв любое $b > r$, согласно лемме 1 имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\Phi(re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F_b(re^{i\theta})|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} I_b(re^{i\theta})\,d\theta. \tag{35}$$

Но так как $F_b(z)$ регулярна в круге $|z| < b$, то по формуле Иенсена [3, стр. 24] с учетом того, что $\widetilde{n}_\Phi(r) = \widetilde{n}_{F_b}(r)$ и $I_b(0) = 0$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F_b(re^{i\theta})|\,d\theta = \int_0^r \widetilde{n}_\Phi(t)\frac{dt}{t} + C_\Phi(r).$$

Теперь для получения (34) достаточно применить лемму 2. Теорема доказана.

Если $\Phi(z)$ принадлежит классу $\overline{B}_\sigma^*$, то из теоремы 20 тотчас же следует существование слабого предела

$$\lim_{r\to\infty}{}^* \frac{1}{r^\sigma}\int_0^r \left[\widetilde{n}_\Phi(x) - \frac{1}{2\pi}\arg G(x)\right]\frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_\Phi(\alpha)\,d\alpha. \tag{36}$$

Ниже мы докажем, что это соотношение имеет место и для функций $\Phi(z) \in B_\sigma^*$. Однако обычный предел в левой части (36) может не существовать*, даже если $\Phi(z) \in \overline{B}_\sigma^*$.

Но для второго «усреднения» функции $n_\Phi(x) - \frac{1}{2\pi}\arg G(x)$ соответствующий обычный предел существует, а именно, верна

Теорема 8. *Если $\Phi(z) \in B_\sigma^*$ есть решение однородной задачи (1), то существует конечный неотрицательный предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^\sigma}\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \left[\frac{1}{2\pi}\arg G(x) - \widetilde{n}_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2\pi\sigma}\int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\,d\theta \geqslant 0, \tag{37}$$

где $h_\Phi(\theta)$ — индикатор функции $\Phi(z)$ (при формальном порядке σ).

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

---

* Мы не приводим здесь соответствующего примера ввиду его большой сложности.

Лемма 3. Если $f(z)$ — любая функция класса B, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln|f(te^{i\theta_0})||\frac{dt}{1+t^2} \tag{38}$$

при произвольном θ_0 $(0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi)$ сходится.

Эта лемма представляет собой известное свойство функций, ограниченных в полуплоскости. Для ее доказательства отобразим область $\theta_0 < \arg z < \theta_0 + \pi$ на круг $|\zeta| < 1$ с помощью функции

$$\zeta = \frac{z - ie^{i\theta_0}}{z + ie^{i\theta_0}} \quad \text{или} \quad z = ie^{i\theta_0}\frac{1+\zeta}{1-\zeta}. \tag{39}$$

Тогда функция $f_0(\zeta) = f\left(ie^{i\theta_0}\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$ ограничена в круге $|\zeta| < 1$, и поэтому [7, стр. 435] интегралы

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\ln|f_0(e^{i\alpha})||d\alpha = -\frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=1} \left|\ln\left|f\left(ie^{i\theta_0}\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)\right|\right|\frac{d\zeta}{\zeta}$$

сходятся, а значит, сходится и равный им интеграл (38), что и требовалось доказать.

Заметим, что значения $f^{\pm}(t)\,(t > 0)$ рассматриваются как угловые предельные значения. По теореме Фату [8, стр. 66] они заведомо существуют почти всюду. Интеграл (38) при $\theta_0 = \pi$, $\theta_0 = 0$ понимается, вообще говоря, в смысле Лебега*.

Лемма 4. Если функция $\varphi(z)$ регулярна и ограничена в $\operatorname{Im} z > 0$, *то при любых $r > 0$ и $0 < \theta < \pi$ имеет место неравенство*

$$\ln|\varphi(re^{i\theta})| \leqslant \frac{r\sin\theta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\varphi(t)|\,dt}{t^2 - 2tr\cos\theta + r^2}. \tag{40}$$

Эта лемма следует из теоремы Сегё [8, стр. 107]. В самом деле, если отобразить $\operatorname{Im} z > 0$ на $|\zeta| < 1$ с помощью функции $z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, то по этой теореме

$$\left|\varphi\left(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)\right| \leqslant \left|\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\varphi\left(i\frac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right)\right|\frac{e^{i\alpha}+\zeta}{e^{i\alpha}-\zeta}d\alpha\right]\right|. \tag{41}$$

Возвращаясь к переменной $z = re^{i\theta}$, получим (40), что и требовалось доказать.

*Лемма 5. Если $\Phi(z)$ — любая функция класса B_σ^*, то при всяком $\varepsilon > 0$ равномерно по θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ имеет место асимптотическая оценка***

$$\int_1^r \ln|\Phi(te^{i\theta})|\frac{dt}{t} > \frac{r^\sigma}{\sigma}[h_\Phi^*(\theta) - \varepsilon], \quad \text{где} \quad h_\Phi^*(\theta) = \begin{cases} h_\Phi(\theta), & 0 < \theta < 2\pi, \\ h_\Phi(+0), & \theta = 0, \\ h_\Phi(2\pi - 0), & \theta = 2\pi. \end{cases} \tag{42}$$

---

* Это замечание нужно иметь в виду и в дальнейшем. Отметим, однако, что в приложениях к рассматриваемым нами краевым задачам все встречающиеся интегралы существуют в смысле Римана.

** Если $h(\theta)$ тригонометрически выпукла и ограничена сверху в $[0, 2\pi]$, то существуют конечные односторонние пределы $h(+0)$ и $h(2\pi - 0)$.

Доказательство. Будем считать $|\Phi(z)| \leqslant 1$, так как иначе мы перешли бы к функции $\frac{1}{K}\Phi(z) = \Phi_0(z)$, где $K = \sup\limits_{z \in D} |\Phi(z)|$. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдутся такое $\varepsilon_0 > 0$ и такие последовательности $\{\theta_n\}$ и $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$, что

$$\int_1^{r_n} \ln|\Phi(te^{i\theta_n})| \frac{dt}{t} < \frac{r_n^\sigma}{\sigma}[h_\Phi^*(\theta) - \varepsilon_0], \quad 0 \leqslant \theta_n \leqslant 2\pi. \tag{43}$$

Не нарушая общности, можно считать, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \theta_n = \theta_0. \tag{44}$$

Рассмотрим случай: $0 \leqslant \theta_0 < \pi$. Будем предполагать все θ_n столь близкими к θ_0, что ни один из углов $[\theta_n, \theta_n + \pi]$ не рассекается контуром L.

Введем в полуплоскости $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ вспомогательные функции

$$\varphi_n(z) = \Phi(ze^{i\theta_n}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{45}$$

Так как $|\varphi_n(z)| \leqslant 1$, то, применяя лемму 4, имеем

$$\ln|\varphi_n(re^{i\theta})| \leqslant \frac{r\sin\theta}{\pi}\int_1^{r_n} \frac{\ln|\varphi_n(t)|\,dt}{r^2 - 2tr\cos\theta + t^2}, \quad 0 < \theta < \pi, \ r > 0. \tag{46}$$

Фиксируя теперь произвольное $\eta > 0$, разделим обе части неравенства (46) на r и проинтегрируем от $r = \frac{1}{2}$ до $r = (1+\eta) r_n$. Изменив затем порядок интегрирования, что при $0 < \theta < \pi$ законно, получим

$$\int_{\frac{1}{2}}^{(1+\eta)r_n} \ln|\varphi_n(re^{i\theta})| \frac{dr}{r} \leqslant \int_1^{r_n} \ln|\varphi_n(t)| \frac{dt}{t} \int_{\frac{1}{2}}^{(1+\eta)r_n} \psi(r, t)\,dr, \tag{47}$$

где положено

$$\psi(r, t) = \frac{t\sin\theta}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2 - 2rt\cos\theta + t^2}.$$

Используя формулу решения задачи Дирихле в полуплоскости, имеем

$$\int_{\frac{1}{2}}^{(1+\eta)r_n} \psi(r; t)\,dr = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \psi(r, t)\,dr - \int_{(1+\eta)r_n}^{\infty} \psi(r, t)\,dr. \tag{48}$$

Непосредственное интегрирование с учетом того, что $1 \leqslant t \leqslant r_n$, дает

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \psi(r, t)\,dr = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{t\cos\theta - \frac{1}{2}}{t\sin\theta} \leqslant \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{\cos\theta - \frac{1}{2}}{\sin\theta}, \tag{49}$$

$$\int_{(1+\eta)r_n}^{\infty} \psi(r, t)\,dr = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{(1+\eta)r_n - t\cos\theta}{t\sin\theta} < \frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{1 - \cos\theta + \eta}{\sin\theta}. \tag{50}$$

Применяя теперь формулу

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{xy-1}{x+y} \quad (xy > 1,\ x > 0), \tag{51}$$

из (47)—(50) и (45) с учетом неравенства $\ln|\varphi_n(z)| \leqslant 0$ имеем

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{(1+\eta)r_n} \ln|\Phi(r_n e^{i(\theta+\theta_n)})| \frac{dr}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \left[1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{(\cos\theta - 1)(3+2\eta) + \eta}{(1+2\eta)\sin\theta}\right] \int\limits_{1}^{r_n} \ln|\Phi(te^{i\theta_n})| \frac{dt}{t}. \tag{52}$$

Легко показать, что применение формулы (51) законно при

$$0 < \theta < \arccos \frac{3+\eta}{3+2\eta}. \tag{53}$$

Неравенство (52) верно при всех n и при любом θ, подчиненном условию (53), даже если θ изменяется вместе с n. Фиксируя малое δ, $0 < \delta < \arccos \frac{3+\eta}{3+2\eta}$, согласно (44) имеем

$$0 < \theta_0 + \delta - \theta_n < \arccos \frac{3+\eta}{3+2\eta} \text{ при } n > n_\delta.$$

Полагая в (52) $\theta = \theta_0 + \delta - \theta_n$ и принимая во внимание допущение (43) при $n > n_\delta$ получим

$$\frac{1}{r_n^\sigma} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{(1+\eta)r_n} \ln|\Phi(te^{i(\theta_0+\delta)})| \frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{[\cos(\theta_0+\delta-\theta_n) - 1](3+2\eta)+\eta}{(1+2\eta)\sin(\theta_0+\delta-\theta_n)} \cdot \frac{1}{\sigma}[h_\Phi^*(\theta_n) - \varepsilon_0]. \tag{54}$$

Но так как $\Phi(z)$ имеет в. р. р., то [3, стр. 188] при любом θ, $0 < \theta < 2\pi$, существует предел $(a > 0)$

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma} \int\limits_a^r \ln|\Phi(te^{i\theta})| \frac{dt}{t} = \frac{1}{\sigma} h_\Phi(\theta) = \frac{1}{\sigma} h_\Phi^*(\theta). \tag{55}$$

Поэтому, если устремить в (54) $n \to \infty$ и учесть непрерывность $h_\Phi^*(\theta)$, то

$$(1+\eta)^\sigma h_\Phi^*(\theta_0+\delta) \leqslant 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg} \frac{(\cos\delta - 1)(3+2\eta)+\eta}{(1+2\eta)\sin\delta} [h_\Phi^*(\theta_0) - \varepsilon_0].$$

Но так как последнее верно для всех малых $\delta > 0$, то отсюда

$$(1+\eta)^\sigma h_\Phi^*(\theta) \leqslant h_\Phi^*(\theta_0) - \varepsilon_0,$$

что при любом $\eta > 0$ невозможно.

Аналогично сводятся к противоречию и случаи $\theta_0 = \pi$, $\pi < \theta_0 \leqslant 2\pi$. Тем самым лемма доказана.

Следствие 1. *В предположениях леммы 12 при $r > 1$ имеет место оценка* $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$

$$\int_1^r |\ln|\Phi(te^{i\theta})|| \frac{dt}{t} < T_\Phi r^\sigma, \tag{56}$$

где постоянная T_Φ не зависит от r и θ.

Действительно, если считать $|\Phi(z)| \leqslant 1$, то из леммы при $\varepsilon = 1$ вытекает асимптотическая оценка

$$\int_1^r |\ln|\Phi(te^{i\theta})|| \frac{dt}{t} = -\int_1^r \ln|\Phi(te^{i\theta})| \frac{dt}{t} < T_\Phi r^\sigma, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

где $T_\Phi = \max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} [1 - h_\Phi^*(\theta)]$. Увеличив в случае необходимости T_Φ, добьемся ее выполнения при любых $r > 1$ и θ. Следствие доказано.

Следствие 2. *В предположении леммы 12 стремление к пределу*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\sigma}{r^\sigma} \int_1^r \ln|\Phi(te^{i\theta})| \frac{dt}{t} = h_\Phi(\theta) \tag{57}$$

равномерно по θ на любом отрезке $0 < \eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta$. Если же $h_\Phi(\theta)$ непрерывна в $[0, 2\pi]$*, то стремление равномерно по θ на всем отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

В самом деле, так как асимптотически равномерно по θ

$$\ln|\Phi(te^{i\theta})| < \left[h_\Phi(\theta) + \frac{\varepsilon}{2}\right] t^\sigma, \ \eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta, \tag{58}$$

[3, стр. 97], то легко получить, что равномерно по θ, $\eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta$,

$$\sigma r^{-\sigma} \int_1^r \ln|\Phi(te^{i\theta})| \frac{dt}{t} < h_\Phi(\theta) + \varepsilon \ (r > r_{\varepsilon, \eta}). \tag{59}$$

Но по доказанной лемме асимптотически равномерно по θ

$$\sigma r^{-\sigma} \int_1^r \ln|\Phi(te^{i\theta})| \frac{dt}{t} > h_\Phi(\theta) - \varepsilon \ (\eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta). \tag{60}$$

Отсюда следует требуемое. Если же $h_\Phi(\theta)$ непрерывна в $[0, 2\pi]$, то оценки (58) и (59) выполняются равномерно по θ на всем отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому то же самое можно утверждать о стремлении к пределу в (57). Следствие 2 доказано.

Подчеркнем, что мы доказывали только равномерность стремления в (57), так как само равенство доказано в [3].

Докажем теперь теорему 8. Не нарушая общности, будем считать, что $|\Phi(z)| \leqslant 1$. Тогда для любых $\varepsilon, \delta > 0$ найдется такое $r_{\varepsilon, \delta}$, что при $t > r_{\varepsilon, \delta}$

$$\ln|\Phi(te^{i\theta})| < \begin{cases} 0, & |\theta| < \delta, \\ [h_\Phi(\theta) + \varepsilon] t^\sigma, & \delta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \delta, \end{cases} \tag{61}$$

---

* Можно показать, что если $\Phi \in B_\sigma^*$ и $h_\Phi(\theta)$ непрерывна в $[0, 2\pi]$, то $\Phi \in \overline{B}_\sigma^*$.

равномерно по θ. Отсюда легко получить, что для любого $a > 0$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r^\sigma} \int_a^r \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} \ln|\Phi(te^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \frac{1}{\sigma} \int_\delta^{2\pi-\delta} [h_\Phi(\theta) + \varepsilon]\,d\theta,$$

и устремляя δ, $\varepsilon \to 0$,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r^\sigma} \int_a^r \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} \ln|\Phi(te^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \frac{1}{\sigma} \int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\,d\theta. \tag{62}$$

С другой стороны, используя лемму 5, нетрудно найти

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r^\sigma} \int_a^r \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} \ln|\Phi(te^{i\theta})|\,d\theta =$$

$$= \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r^\sigma} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^r \ln|\Phi(te^{i\theta})|\frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{\sigma} \int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\,d\theta. \tag{63}$$

Сопоставляя (62) и (63), заключаем, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^\sigma} \int_a^r \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} \ln|\Phi(te^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{\sigma} \int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\,d\theta, \tag{64}$$

или, применяя теорему 7,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^\sigma} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi} \arg G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)\right] \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2\pi\sigma} \int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\,d\theta. \tag{65}$$

Для завершения доказательства теоремы остается учесть, что $h_\Phi(\theta) \leqslant 0$.

Теорема 9. *Если $\Phi(z)$ — решение однородной задачи* (1) *в классе B, то существует конечный предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi} \arg G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)\right] \frac{dx}{x} = l \geqslant 0. \tag{66}$$

Теорема сразу же получается из теорем 1 и 8, так как согласно (9) при $\sigma = \frac{1}{2}$

$$-\int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\,d\theta = -a \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \geqslant 0.$$

Важным дополнением (но не усилением) теоремы 8 является следующая

Теорема 10. *Если $\Phi(z) \in B_\sigma^*$ — решение однородной задачи* (1), *то выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}{}^* \frac{1}{r^\sigma} \int_0^r \left[\tilde{n}_\Phi(t) - \frac{1}{2\pi} \arg G(t)\right] \frac{dt}{t} =$$

$$= \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r^\sigma} \int_0^r \left[\tilde{n}_\Phi(t) - \frac{1}{2\pi} \arg G(t)\right] \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_\Phi(\theta)\,d\theta. \tag{67}$$

Если же $\Phi(z) \in B_\sigma$, *то при любом* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r\to\infty} r^{\varepsilon-\delta}\int\limits_0^r\left[\widetilde{n}_\Phi(t)-\frac{1}{2\pi}\arg G(t)\right]\frac{dt}{t}=-\infty. \tag{68}$$

Доказательство. Обозначив

$$\psi(r)=\int\limits_0^{2\pi}\ln|\Phi(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

имеем два соотношения ($a > 0$):

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\psi(r)}{r^\sigma}\leqslant\int\limits_0^{2\pi}h_\Phi(\theta)\,d\theta,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^\sigma}\int\limits_a^r\psi(t)\frac{dt}{t}=\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^{2\pi}h_\Phi(\theta)\,d\theta, \tag{69}$$

первое из которых следует из (61), а второе совпадает с (64). Но тогда [3, стр. 194]* существует слабый предел

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-\sigma}\psi(r)=\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-\sigma}\int\limits_0^{2\pi}\ln|\Phi(re^{i\theta})|d\theta=\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^{2\pi}h_\Phi(\theta)\,d\theta. \tag{70}$$

Применив теперь теорему 7, получим равенство (67).

Докажем теперь соотношение (68). Нам дано, что $\Phi \in B_\sigma$. Так как $\Phi(z)$ ограничена в D, то из определения порядка функции в угле следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы одно θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, для которого

$$h_\Phi^{(\sigma-\varepsilon)}(\theta)\equiv\lim_{r\to\infty} r^{\varepsilon-\sigma}\ln|\Phi(re^{i\theta})|=-\infty.$$

Тогда, поскольку $h_\Phi^{(\sigma-\varepsilon)}(\theta) \leqslant 0$, по известному свойству индикатора [3, стр. 74]

$$h_\Phi^{(\sigma-\varepsilon)}(\theta)\equiv-\infty \quad\text{при}\quad 0<\theta<2\pi.$$

Отсюда, в частности, при любом $\varepsilon > 0$ имеем асимптотическую оценку

$$\max_{\pi/2\leqslant\theta\leqslant3\pi/2}\ln|\Phi(re^{i\theta})|<-r^{\sigma-\varepsilon}.$$

Но так как

$$\max_{|\theta|\leqslant\pi/2}\ln|\Phi(re^{i\theta})|\leqslant K=\ln\max_{z\in D}|\Phi(z)|,$$

то для получения (68) остается применить теорему 7.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 10 и* $\sigma < \rho$, *то*

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-\rho}n_\Phi(t)=\lambda>0, \tag{71}$$

где λ — *коэффициент завихрения в задаче* (*1*).

В самом деле, допустив противное, найдем такое $\varepsilon > 0$ и такую последовательность $\{r_n\}$, $r_n \to \infty$, что

$$n_\Phi(r_n)>(\lambda+\varepsilon)r_n^\rho,\quad n=1,2,\ \ldots\ , \tag{72}$$

* В доказанной Б. Я. Левиным лемме в первом из соотношений (69) предполагается строгое равенство, но из доказательства леммы следует, что она верна и в предположении (69).

либо такую последовательность $\{r'_n\}$, что

$$\tilde{n}_\Phi(r'_n) < (\lambda - \varepsilon)(r'_n)^\rho, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{73}$$

Допустим, что выполняется (72). Найдем столь малое $\beta > 0$, что

$$\lambda + \varepsilon > \left(\lambda + \frac{2\varepsilon}{3}\right)(1 + 3\beta)^\rho. \tag{74}$$

После этого на основании теоремы 10 и определения слабого предела на каждом из отрезков $r_n \leqslant t \leqslant r_n(1 + \beta)$, $r_n(1 + 2\beta) \leqslant t \leqslant r_n(1 + 3\beta)$, можно найти соответственно точки $r_{n,1}$ и $r_{n,2}$ так, что, согласно (67) и (2), существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} r_{n,k}^{-\sigma} \int_0^{r_{n,k}} [\tilde{n}_\Phi(t) - \varphi(t)\, t^\rho] \frac{dt}{t} = c \neq \infty \quad (k = 1, 2). \tag{75}$$

В силу (72) и (74) с учетом того, что $n_\Phi(t)$ не убывает при $r_{n,1} \leqslant t \leqslant r_{n,2}$

$$n_\Phi(t) > (\lambda + \varepsilon)\, r_n^\rho > (\lambda + \varepsilon)(1 + 3\beta)^{-\rho} t^\rho > \left(\lambda + \frac{2\varepsilon}{3}\right) t^\rho. \tag{76}$$

Будем считать r_1 столь большим, что $\varphi(t) < \lambda + \frac{\varepsilon}{3}$ при $t \geqslant r_1$. Тогда, опираясь на (75), (76), имеем

$$\int_0^{r_{n,2}} [\tilde{n}_\Phi(t) - \varphi(t)\, t^\rho] \frac{dt}{t} > \int_0^{r_{n,1}} [\tilde{n}_\Phi(t) - \varphi(t)\, t^\rho] \frac{dt}{t} + \frac{\varepsilon}{3} \int_{r_{n,1}}^{r_{n,2}} t^{\rho-1}\, dt >$$

$$> [c + o(1)]\, r_{n,1}^\sigma + \frac{\varepsilon}{3} r_n^\rho [(1 + 2\beta)^\rho - (1 + \beta)^\rho],$$

откуда, поскольку $\sigma < \rho$, получим

$$\lim_{n\to\infty} r_{n,2}^{-\sigma} \int_0^{r_{n,2}} [\tilde{n}_\Phi(t) - \varphi(t)\, t^\rho] \frac{dt}{t} = +\infty,$$

что противоречит соотношению (75) (при $k = 2$).

Аналогично сводится к противоречию неравенство (73). Тем самым следствие доказано.

Следствие 2. *Если* $\rho > \frac{1}{2}$, *то не существует ограниченных решений задачи* (1), *множество нулей которых конечно.*

§ 7. Теперь нам необходимо решить вопрос о сходимости и асимптотическом поведении некоторых бесконечных произведений и интегралов, используемых при решении однородной задачи Римана (1).

В теоремах 6 и 9 дается основная характеристика множества нулей решения $\Phi(z)$ в классе B. Однако для большего упрощения окончательных формул нам потребуются еще некоторые теоремы.

Теорема 11. *Если* $\Phi(z) \in B$ — *решение задачи* (1), *то интеграл*

$$I = \int_0^\infty \left[\tilde{n}_\Phi(x) - \frac{1}{2\pi}\arg G(x)\right] \frac{dx}{x^2} \tag{77}$$

сходится (может быть, неабсолютно).

Докажем предварительно три леммы.

Лемма 6. *Если* $\Phi(z) \in B$, *то в* $\operatorname{Im} z > 0$ *справедливо представление*

$$\ln|\Phi(z)| = \frac{r\sin\theta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\Phi^+(t)|\,dt}{t^2-2tr\cos\theta+r^2} + \sum_{\operatorname{Im} z_n>0}\ln\left|\frac{z-z_n}{z-\bar z_n}\right|, \tag{78}$$

где $z = re^{i\theta}$, а z_n — *нули функции* $\Phi(z)$.

Доказательство. По теореме 4 $\ln|\Phi(z)| = \ln|X(z)| + \ln|F(z)|$. Тогда на основании свойств целой и канонической функций при любом $R > 0$ имеем

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_{-R}^{R}\ln|\Phi(x+iy)|\,dx = \int\limits_{-R}^{R}\ln|\Phi^+(x)|\,dx,$$

где $\Phi^+(x) = \Phi(x)$ при $0 < x < 1$.

Отсюда и из ограниченности $\Phi(z)$ следует [9] представление

$$\ln|\Phi(z)| = \omega_1(z) + \omega_2(z) - ar\sin\theta, \tag{79}$$

где $a > 0$ и положено

$$\omega_1(z) = \frac{r\sin\theta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\Phi(t)|\,dt}{t^2-2tr\cos\theta+r^2}, \quad \omega_2(z) = \sum_{\operatorname{Im} z_n>0}\ln\left|\frac{z-z_n}{z-\bar z_n}\right|.$$

Но так как $\Phi(z) \in B$, то в силу леммы 3 и теоремы 6

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln|\Phi^\pm(x)||}{1+x^2}\,dx < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\theta_n}{r_n} < \infty.$$

Тогда, как известно, выполняются равенства [3, стр. 301, 307]

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1}\omega_1(re^{i\theta}) = 0, \ \lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-1}\omega_2(re^{i\theta}) = 0 \quad (0 < \theta < \pi).$$

С другой стороны, по теореме 1

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-1}\ln|\Phi(re^{i\theta})| \equiv 0 \ \ (0 < \theta < 2\pi).$$

Но это возможно только при $a = 0$ в равенстве (79), что и требовалось доказать.

Лемма 7. *Если* $F(z)$ — *целая функция порядка* ρ, *то при любом* $\alpha > 0$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+r^{-\rho-1}}|\ln|F(re^{i\theta})||\,d\theta = 0. \tag{80}$$

Доказательство. Запишем разложение по Вейерштрассу

$$F(z) = az^m e^{P_q(z)}\prod_{n=1}^{\infty}H_q\left(\frac{z}{z_n}\right) \quad (q = [\rho],\ m \geqslant 0),$$

где $P_q(z)$ — многочлен степени $p \leqslant q$, а

$$H_q(u) = (1-u)\exp\left(u + \frac{1}{2}u^2 + \cdots + \frac{1}{q}u^q\right).$$

Очевидно, достаточно доказать оценку (80) для таких функций:

$$F_{r,1}(z)=\prod_{n=1}^{n(2r)} H_q\left(\frac{z}{z_n}\right),\quad F_{r,2}(z)=\prod_{n(2r)+1}^{\infty} H_q\left(\frac{z}{z_n}\right)\qquad (z=re^{i\theta}).$$

Обозначая через $n(r)$ число нулей $z_n=r_ne^{i\theta_n}$ в $0<|z|\leqslant r$, имеем для любого θ

$$|\ln|F_{r,1}(z)||\leqslant q2^q\sum_{r_n\leqslant 2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^q+n(2r)\max_{r_n\leqslant 2r}\left|\ln\left[\left(\frac{r}{r_n}\right)^2-2\frac{r}{r_n}\cos(\theta-\theta_n)+1\right]\right|.$$

Не нарушая общности, будем считать $|z_n|>1$. Тогда легко проверить, что

$$\sin^2(\theta-\theta_n)\leqslant\left(\frac{r}{r_n}\right)^2-2\left(\frac{r}{r_n}\right)\cos(\theta-\theta_n)+1\leqslant(r+1)^2 \text{ при } r_n\leqslant 2r.$$

С помощью исследования на экстремум получим

$$\max_{\alpha,\,\theta_n}\int_{\alpha}^{\alpha+r^{-\rho-1}}|\ln\sin^2(\theta-\theta_n)|\,d\theta=\int_{-\frac{r^{-\rho-1}}{2}}^{\frac{r^{-\rho-1}}{2}}|\ln\sin^2\theta|\,d\theta<A_1r^{-\rho-1}\ln r.$$

(Здесь и далее A_m — положительные постоянные). Фиксируем ε под условием $0<\varepsilon<1$. Поскольку $n(r)<A_2r^{\rho+\varepsilon}$ при $r\geqslant 0$, причем $n(1)=0$, то

$$\sum_{r_n\leqslant 2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^q=\int_1^{2r}x^{-q}\,dn(x)\leqslant r^q\left[\frac{n(2r)}{(2r)^q}+q\int_1^{2r}x^{-q-1}n(x)\,dx\right]<A_3r^{\rho+\varepsilon}.$$

Используя полученные оценки, при любом α будем иметь

$$\int_{\alpha}^{\alpha+r^{-\rho-1}}|\ln|F_{r,1}(re^{i\theta})||\,d\theta<r^{\varepsilon-1}(A_4+A_5\ln r)=o(1).$$

Далее находим

$$\sum_{r_n\geqslant 2r}\left|\ln\left|H_q\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|\right|\leqslant\sum_{r_n\geqslant 2r}\sum_{s=q+1}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\frac{r}{r_n}\right)^s\leqslant\frac{2}{q+1}\sum_{r_n\geqslant 2r}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{q+1}=$$

$$=\frac{2r^{q+1}}{q+1}\int_{2r}^{\infty}\frac{dn(x)}{x^{q+1}}\leqslant r^{q+1}\left[-\frac{n(2r)}{r^{q+1}}+\frac{1}{q+2}\int_{2r}^{\infty}\frac{n(x)}{x^{q+2}}dx\right]<A_6r^{\rho+\varepsilon},$$

и поэтому

$$\int_{\alpha}^{\alpha+r^{-\rho-1}}|\ln|F_{r,2}(re^{i\theta})||\,d\theta<A_6r^{\varepsilon-1}=o(1).$$

Тем самым лемма 7 доказана.

Лемма 8. В условиях теоремы 11 справедлива асимптотическая оценка

$$\int_0^{2\pi}|\ln|\Phi(re^{i\theta})||\,d\theta=O(\sqrt{r}\ln r)\quad(r\to\infty).\tag{81}$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\lim_{r\to\infty}\left[\int_0^{r^{-\rho-1}} |\ln|\Phi(re^{i\theta})||\,d\theta+\int_{\pi-r^{-\rho-1}}^{\pi}|\ln|\Phi(re^{i\theta})||\,d\theta\right]=0. \tag{82}$$

Действительно, по теореме 18

$$\ln|\Phi(z)|=\ln|X(z)|+\ln|F(z)|,$$

причем $\rho_F=\rho$. Но в силу теоремы 3 асимптотически

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|\ln|X(re^{i\theta})||<r^{\rho+\varepsilon}\quad(0<\varepsilon<1). \tag{83}$$

Тогда соотношение (82) вытекает из (83) и леммы 7.

Докажем теперь такую оценку:

$$\int_{r^{-\rho-1}}^{\pi-r^{-\rho-1}}|\ln|\Phi(re^{i\theta})||\,d\theta=O(\sqrt{r}\ln r)\quad(r\to\infty). \tag{84}$$

Для этого воспользуемся леммой 6, по которой

$$\ln|\Phi(z)|=\omega_1(z)+\omega_2(z)\quad(0<\theta<\pi), \tag{85}$$

где положено $(z=re^{i\theta})$

$$\omega_1(z)=\frac{r\sin\theta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\Phi^+(t)|\,dt}{t^2-2tr\cos\theta+r^2},\quad \omega_2(z)=\sum_{\operatorname{Im}z_n>0}\ln\left|\frac{z-z_n}{z-\bar z_n}\right|.$$

Обозначая

$$\beta(r)=\int_1^r\ln|\Phi^+(t)|\frac{dt}{t}$$

и учитывая, что согласно следствию 1 леммы 5 $\beta(r)<T\sqrt{r}$, имеем

$$\left|\frac{r\sin\theta}{\pi}\int_{2r}^{\infty}\frac{\ln|\Phi^+(t)|\,dt}{t^2-2tr\cos\theta+r^2}\right|\leqslant\frac{r}{\pi}\int_{2r}^{\infty}\frac{t\,d\beta(t)}{(t-r)^2}\leqslant\frac{2r}{\pi}\int_{2r}^{\infty}\frac{d\beta(t)}{t}=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\beta(2r)+\frac{2r}{\pi}\int_0^{\infty}\beta(t)t^{-2}\,dt<C_1\sqrt{r}\quad(0<\theta<\pi).$$

(Здесь и далее C_m — положительные постоянные). Совершенно аналогично

$$\left|\frac{r\sin\theta}{\pi}\int_{-\infty}^{-2r}\frac{\ln|\Phi^+(t)|\,dt}{t^2-2tr\cos\theta+r^2}\right|<C_6\sqrt{r}.$$

Используя последние неравенства, найдем

$$\int_{r^{-\rho-1}}^{\pi-r^{-\rho-1}}|\omega_1(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant C_3\sqrt{r}+\int_{r^{-\rho-1}}^{\pi-r^{-\rho-1}}\frac{r\sin\theta}{\pi}\,d\theta\int_{-2r}^{2r}\frac{|\ln|\Phi^+(t)||}{t^2-2tr\cos\theta+r^2}\,dt=$$

$$=C_3\sqrt{r}+\frac{1}{2\pi}\int_{-2r}^{2r}|\ln|\Phi^+(t)||\ln\frac{t^2+2tr\cos r^{-\rho-1}+r^2}{t^2-2tr\cos r^{-\rho-1}+r^2}\frac{dt}{t}. \tag{86}$$

Но легко видеть, что при $|t| \leqslant 2r$

$$r^2 \sin^2 r^{-\rho-1} \leqslant t^2 \pm 2tr \cos r^{-\rho-1} + r^2 \leqslant (t+r)^2 \leqslant 9r^2.$$

Отсюда

$$0 \leqslant \ln \frac{t^2 + 2tr \cos r^{-\rho-1} + r^2}{t^2 - 2tr \cos r^{-\rho-1} + r^2} \leqslant C_4 \ln r.$$

Тогда, снова используя следствие 1 леммы 5, из (86) получим

$$\int\limits_{r^{-\rho-1}}^{\pi - r^{-\rho-1}} |\omega_1(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant C_5 \sqrt{r} \ln r. \tag{87}$$

Переходя к аналогичной оценке для $\omega_2(z)$, запишем $(z_n = r_n e^{i\theta_n})$

$$\int\limits_{r^{-\rho-1}}^{\pi - r^{-\rho-1}} |\omega_2(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2} \int\limits_{r^{-\rho-1}}^{\pi - r^{-\rho-1}} \sum_{\operatorname{Im} z_n > 0} \tau(z, z_n)\, d\theta, \tag{88}$$

где положено

$$\tau(z, z_n) = \ln \frac{r_n^2 - 2rr_n \cos(\theta + \theta_n) + r^2}{r_n^2 - 2rr_n \cos(\theta - \theta_n) + r^2}.$$

Пусть сначала $r_n \geqslant 2r$. Тогда, используя неравенства

$$|z - \bar{z}_n| \geqslant r_n - r \geqslant \frac{r_n}{2} \text{ и } \ln(1+x) < x \text{ при } x > 0,$$

имеем

$$\tau(z, z_n) \leqslant 4rr_n |z - \bar{z}_n|^{-2} \sin\theta_n \leqslant 16 rr_n^{-1} \sin\theta_n \leqslant 32 \sqrt{rr_n^{-1}} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right).$$

Но так как по теореме 6 ряд $\sum r_n^{-1/2} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ сходится, то отсюда

$$\int\limits_{r^{-\rho-1}}^{\pi - r^{-\rho-1}} \sum_{r_n \geqslant 2r} \tau(z, z_n) \leqslant C_6 \sqrt{r}. \tag{89}$$

Пусть теперь $r_n \leqslant 2r$. С помощью исследования на экстремум найдем

$$0 \leqslant \tau(z, z_n) \leqslant \ln \frac{1 - \cos(\theta + \theta_n)}{1 - \cos(\theta - \theta_n)}. \tag{90}$$

Опираясь на (88)—(90), нетрудно получить

$$\int\limits_{r^{-\rho-1}}^{\pi - r^{-\rho-1}} |\omega_2(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant C_6 \sqrt{r} + \sum_{\substack{0 < \theta_n < \pi \\ r_n \leqslant 2r}} \int\limits_{r^{-\rho-1}}^{\pi - r^{-\rho-1}} \ln \frac{\sin 2^{-1}(\theta + \theta_n)}{|\sin 2^{-1}(\theta - \theta_n)|}\, d\theta. \tag{91}$$

Допустим сначала, что $\sin\theta_n \geqslant 0{,}5 \sin r^{-\rho-1}$. Обозначив последний интеграл в соотношении (91) через I_n, имеем

$$I_n < \int\limits_0^{\pi} \ln \left[\sin\frac{\theta + \theta_n}{2} \left| \sin\frac{\theta - \theta_n}{2} \right|^{-1} \right] d(\theta - \theta_n) = \sin\theta_n \int\limits_0^{\pi} \frac{\theta - \theta_n}{\cos\theta - \cos\theta_n}\, d\theta.$$

Но поскольку $\frac{|\theta-\theta_n|}{2}<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\alpha}{\sin\alpha}\leqslant\frac{\pi}{2}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то

$$\left|\frac{\theta-\theta_n}{\cos\theta-\cos\theta_n}\right|=\left|\frac{0{,}5(\theta-\theta_n)}{\sin 0{,}5(\theta-\theta_n)}\right|[\sin 0{,}5(\theta+\theta_n)]^{-1}\leqslant 0{,}5\pi\left(\sin\frac{\theta+\theta_n}{2}\right)^{-1},$$

откуда, учитывая, что $\sin\theta_n\geqslant 0{,}5\sin r^{-\rho-1}$,

$$I_n<\pi\sin\theta_n\cdot[|\ln\operatorname{tg}0{,}25(\pi+\theta_n)|+|\ln\operatorname{tg}0{,}25\theta_n|]<C_7\sin\theta_n\cdot\ln r. \quad (92)$$

Пусть теперь $\sin\theta_n<0{,}5\sin r^{-\rho-1}$. Тогда

$$I_n=\int\limits_{r^{-\rho-1}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin\theta+\sin\theta_n}{\sin\theta-\sin\theta_n}\,d\theta=\int\limits_{\sin r^{-\rho-1}}^{1}\ln\frac{x+\sin\theta_n}{x-\sin\theta_n}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=2\int\limits_{\sin r^{-\rho-1}}^{1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\theta_n}{x}\right)^{2k-1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}<$$

$$<\frac{8}{3}\sin\theta_n\int\limits_{\sin r^{-\rho-1}}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}<C_8\sin\theta_n\ln r. \quad (93)$$

Из (91)—(93), снова учитывая теорему 6, получим

$$\int\limits_{r^{-\rho-1}}^{\pi-r^{-\rho-1}}|\omega_2(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant C_6\sqrt{r}+C_9\ln r\cdot\sum_{r_n\leqslant 2r}\sin\theta_n\leqslant C_6\sqrt{r}+$$

$$+2C_9\sqrt{r}\ln r\cdot\sum_{r_n\leqslant 2r}r_n^{-1/2}\sin 0{,}5\theta_n<C_{10}\sqrt{r}\ln r. \quad (94)$$

Из соотношений (85), (87), (94) вытекает оценка (84). После этого в соединении с (82) получаем

$$\int\limits_0^{\pi}|\ln|\Phi(re^{i\theta})||\,d\theta=O(\sqrt{r}\ln r).$$

Совершенно так же получается эта оценка для промежутка $[\pi, 2\pi]$. Отсюда и следует лемма 8.

Теперь доказательство теоремы 11 проводится просто. Обозначим

$$\int\limits_0^{r}[\tilde{n}_\Phi(x)-\varphi(x)x^\rho]\frac{dx}{x}=s(r).$$

Из теоремы 7 и леммы 8 следует, что асимптотически

$$|s(r)|<M\sqrt{r}\ln r,\ M=\mathrm{const}. \quad (95)$$

Но тогда, принимая во внимание, что $s(0)=0$, имеем

$$\int\limits_0^{r}[\tilde{n}_\Phi(x)-\varphi(x)x^\rho]\,x^{-2}\,dx=\frac{s(r)}{r}+\int\limits_0^{r}s(x)\,x^{-1}\,dx. \quad (96)$$

Отсюда, учитывая, что $0<\sigma\leqslant\frac{1}{2}<1$, получаем теорему.

Заметим, что интеграл справа в (96) сходится абсолютно (при $r \to \infty$)*, но утверждать то же самое относительно интеграла слева, вообще говоря, нельзя **.

Следствие. *Если* $\Phi(z) \in B$ — *решение задачи Римана* (1), *то имеет место сходимость* (может быть, неабсолютная) *следующих интегралов*:

$$A_n = \int_0^\infty [(2\pi)^{-1} \ln G(x) - \widetilde{n}_\Phi(x)]\, x^{-n-1}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{97}$$

В самом деле, представим A_n следующим образом:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \ln|G(x)|\frac{dx}{x^{n+1}} + \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi}\arg G(x) - \widetilde{n}_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x^{n+1}} \equiv B_n + C_n.$$

Так как на основании (5)

$$|\ln|G(x)|| < \mathrm{const}, \tag{98}$$

то интегралы B_n при $n \geqslant 1$ сходятся (и притом абсолютно). Сходимость C_n при $n = 1$ доказана в теореме 11, а при $n > 1$ следует из того, что функция x^{1-n} является монотонной и ограниченной на L [10, стр. 578]. Следствие доказано.

Теорема 12. *Если* $\Phi(z)$ — *решение однородной краевой задачи Римана* (1) *в классе* B, *то интеграл*

$$\omega(z) = \int_0^\infty [(2\pi i)^{-1} \ln G(x) - \widetilde{n}_\Phi(x)]\frac{dx}{x(x-z)} \tag{99}$$

равномерно (но, может быть, неабсолютно) сходится в любой области D_0, лежащей строго внутри D.

Доказательство. Представим $\omega(z)$ следующим образом:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln|G(x)|}{x(x-z)}\,dx + \int_0^\infty [(2\pi i)^{-1}\arg G(x) - \widetilde{n}_\Phi(x)]\frac{dx}{x(x-z)}. \tag{100}$$

В силу условия (98) первый интеграл сходится (и притом абсолютно). Далее заметим, что функции

$$\operatorname{Re}\frac{x}{x-z} = \frac{x(x-r\cos\theta)}{x^2-2xr\cos\theta+r^2}, \qquad (z = re^{i\theta}) \tag{101}$$

$$\operatorname{Im}\frac{x}{x-z} = \frac{xr\sin\theta}{x^2-2xr\cos\theta+r^2}, \tag{102}$$

при фиксированном z и достаточно большом x монотонны по x и ограничены равномерно по $z \in D_0$. Но в таком случае по теореме 11 интеграл (77) сходится. Тогда по известному признаку [10, стр. 702] интегралы, являющиеся действительной и мнимой частями второго из интегралов (100), сходятся и притом равномерно по z, $z \in D_0$. Тем самым теорема доказана.

---

* На левом конце $x = 0$ интеграл (77) заведомо сходится, поскольку $\widetilde{n}_\Phi(x) - (2\pi)^{-1}\arg G(x) \equiv 0$ при малых x.

** Соответствующего примера ввиду его сложности мы не приводим.

Теорема 13. *Если* $\Phi(z) \in B$ — *решение задачи* (1), *то взятое по всем отличным от нуля корням* $\Phi(z)$ *бесконечное произведение*

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\left(1 - \frac{z}{|z_n|}\right)^{-1} \tag{103}$$

абсолютно и равномерно сходится в любой области D^*, *лежащей строго внутри* D *и не содержащей точек* z_n.

Доказательство. Полагая $|z_n| = r_n$, обозначим через D_N область, полученную из области D проведением разрезов вида

$(\arg z = \theta_n) \cap (r_n \leqslant |z| \leqslant \infty)$, $n = N, N+1, N+2, \ldots$, $\theta_n = \arg z_n$.

Легко видеть, что $D^* \subset D_N$, если N достаточно велико. Выберем в D_N однозначные ветви $\ln\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ и $\ln\left(1 - \frac{z}{r_n}\right)$ под условием

$$\ln\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{z}{r_n}\right) = 0 \text{ при } z = 0 \; (n = N, N+1, \ldots).$$

Возьмем произвольное $C > 1$. При $z \in D^*$ и достаточно больших N имеем

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left|\ln\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) - \ln\left(1 - \frac{z}{r_n}\right)\right| < C \sum_{n=N}^{\infty} r_n^{-1} |z(1 - e^{i\theta_n})| <$$

$$< 2C|z| \sum_{n=N}^{\infty} r_n^{-1} \sin(\theta_n/2) < C \max_{z \in D^*} |z| \sum_{n=N}^{\infty} r_n^{-1/2} \sin(\theta_n/2). \tag{104}$$

Но по теореме 3 последний ряд сходится Отсюда и получаем требуемое.

В дальнейшем функцию (103) будем называть произведением (или функцией) типа Бляшке по аналогии с произведением Бляшке для полуплоскости, которое, как известно [3, стр. 307], имеет вид

$$b_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\left(1 - \frac{z}{\bar{z}_n}\right)^{-1}.$$

Лемма 9. *Если комплекснозначная функция* $\psi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$, *тождественно равная нулю при достаточно малых* x, *такова, что интеграл*

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Re} \psi(x) \cdot x^{-2}\, dx \tag{105}$$

сходится, а

$$\sup_{0 \leqslant x < \infty} |\operatorname{Im} \psi(x)| < M = \text{const}, \tag{106}$$

и при некотором σ, $0 < \sigma < 1$, *существует предел*

$$\lim_{r \to \infty} \sigma^2 r^{-\sigma} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \operatorname{Re} \psi(x) \frac{dx}{x} = \gamma \neq \infty, \tag{107}$$

то функция

$$\Omega(z) = \exp\left[z \int_0^{\infty} \frac{\psi(x)\, dx}{x(x - z)}\right] \tag{108}$$

при любом θ, $0<\theta<2\pi$, *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\ln|\Omega(re^{i\theta})| = -\frac{\pi\gamma}{\sin\sigma\pi}\cos\sigma(\theta-\pi), \tag{109}$$

причем стремление к пределу в каждом из углов $[\varepsilon, \widehat{2\pi}-\varepsilon]$, *где* $0<\varepsilon<\pi$ *равномерно по* θ.

Доказательство. Обозначим

$$s(t) = \int_0^t x^{-1}\operatorname{Re}\psi(x)\,dx, \quad p(t) = \int_0^t x^{-1}s(x)\,dx. \tag{110}$$

Очевидно, $s(t)\equiv p(t)\equiv 0$ при малых t. По условию (107) можно записать

$$p(t) = \gamma\sigma^{-2}t^{\sigma} + p_0(t), \quad \lim_{t\to\infty} p_0(t) = 0. \tag{111}$$

Тогда после двукратного интегрирования по частям придем к представлению

$$\ln\Omega(z) = z\gamma\sigma^{-2}\int_0^\infty \frac{x^{\sigma}(x+z)}{(x-z)^3}\,dx + z\int_0^\infty \frac{x^{\sigma}p_0(x)}{(x-z)^3}(x+z)dx +$$

$$+ zi\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\psi(x)}{x(x-z)}\,dx \equiv \omega_1(z)+\omega_2(z)+\omega_3(z). \tag{112}$$

Пусть $z=re^{i\theta}$. Интеграл $\omega_1(z)$ вычисляется в конечном виде

$$\omega_1(z) = -\frac{\pi\gamma}{\sin\pi\sigma}z^{\sigma}e^{-i\sigma\pi} = -\frac{\pi\gamma}{\sin\pi\sigma}e^{i\sigma(\theta-\pi)}, \quad 0<\theta<2\pi. \tag{113}$$

Далее покажем, что при любом фиксированном $\eta>0$ равномерно по θ

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}|\omega_2(re^{i\theta})| = 0, \quad \eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta. \tag{114}$$

В самом деле, если $\eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta$, то

$$|x-re^{i\theta}| = \sqrt{(x-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta} \geqslant r\sin\eta. \tag{115}$$

Аналогично, исходя из того, что $\cos\theta\leqslant\cos\eta$, найдем

$$|x-e^{i\theta}| \geqslant |x-e^{i\eta}| \quad (x>0). \tag{116}$$

На основании (111) можно заключить, что

$$\sup_{0\leqslant t<\infty}|p_0(t)| = N < \infty. \tag{117}$$

Взяв теперь любое $0<\varepsilon<1$, с учетом (115)—(117) при $\eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta$ имеем

$$|\omega_2(re^{i\theta})| < Nr\int_0^{\varepsilon r}\frac{x^{\sigma}(x+r)}{|x-re^{i\theta}|^3}\,dx + r\int_{\varepsilon r}^\infty \frac{x^{\sigma}(x+r)}{|x-re^{i\theta}|^3}|p_0(x)|\,dx <$$

$$< 2Nr^{-1}\sin^{-3}\eta\int_0^{2r}x^{\sigma}\,dx + r^{\sigma}\sup_{\varepsilon r\leqslant x<\infty}|p_0(x)|\int_\varepsilon^\infty u^{\rho}(u+1)|u-e^{i\eta}|^{-3}\,du.$$

Найдем такое $K(\varepsilon)$, что $|p_0(x)| < \varepsilon$ при $t > K(\varepsilon)$. Тогда при $r > R(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}K(\varepsilon)$ получим

$$\max_{\eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta} |\omega_2(re^{i\theta})| < \frac{2Nr^{\sigma}\varepsilon^{\sigma+1}}{(\sigma+1)\sin^3\eta} + \varepsilon r^{\sigma}\int_0^\infty \frac{u^{\sigma}(u+1)}{|u-e^{i\eta}|^3}\,du < M_\eta \varepsilon r^{\sigma},$$

где M_η не зависит от r и ε. Отсюда и следует (114).

Докажем теперь, что равномерно по θ на отрезке $0 < \eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta$

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}|\omega_3(re^{i\theta})| = 0. \tag{118}$$

По условию известна оценка (106). Тогда, учитывая, что $\operatorname{Im}\psi(x) \equiv 0$ при $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $x_0 > 0$, находим

$$\max_{\eta\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\eta} |\omega_3(re^{i\theta})| \leqslant \int_{x_0}^\infty \frac{Mr\,dx}{x|x-re^{i\eta}|} = M\int_{x_0/r}^\infty \frac{du}{u|u-e^{i\eta}|} < N_\eta \ln r.$$

Отсюда непосредственно вытекает (118). Из (113), (114) и (118) следует

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\ln|\Omega(re^{i\theta})| = -\frac{\pi\gamma}{\sin\pi\sigma}\cos\sigma(\theta-\pi)$$

равномерно по θ на любом отрезке $[\eta, 2\pi-\eta]$. Лемма доказана. Заметим, что сходимость интеграла в (108) доказывается дословно так же, как в теореме 12.

Теорема 14. *Если $\Phi(z)$ — решение задачи (1) в классе B_σ^*, то функция*

$$\Omega(z) = \exp\left[z\int_0^\infty \frac{(2\pi i)^{-1}\ln G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)}{x(x-z)}\,dx\right] \tag{119}$$

удовлетворяет соотношению

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\sigma}\ln|\Omega(re^{i\theta})| = -\frac{\pi\gamma}{\sin\sigma\pi}\cos\sigma(\theta-\pi) \quad (0 < \theta < 2\pi), \tag{120}$$

где

$$\gamma = \lim \frac{\sigma^2}{r^{\sigma}}\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \left[\frac{1}{2\pi}\arg G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x} \geqslant 0, \tag{121}$$

причем стремление к пределу в (120) в любом из углов $0 < \varepsilon \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \varepsilon$ равномерно по θ.

Теорема получается сразу, если положить $\psi(x) = (2\pi i)^{-1}\ln G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)$ и воспользоваться теоремами 8, 11 и леммой 9.

Следствие. *Если $\Phi(z)$ — решение задачи (1) в классе B, то функция (119) в любом угле $[\widehat{\varepsilon, 2\pi}-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$, удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1/2}\ln|\Omega(re^{i\theta})| = -\pi\gamma\sin(\theta/2) \quad (0 < \theta < 2\pi), \tag{122}$$

где

$$\gamma = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\sqrt{r}}\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \left[\frac{1}{2\pi}\arg G(x) - n_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x} \geqslant 0, \tag{123}$$

причем стремление к пределу в (122) равномерно по θ в любом из углов $[\widehat{\varepsilon, 2\pi}-\varepsilon]$.

Следствие вытекает из того, что, как было отмечено выше, классы $B^*_{1/2}$ и B совпадают.

Теорема 15. *Если последовательность* $\{z_n\}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, *такова, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \quad (z_n \to \infty) \tag{124}$$

сходится, то функция типа Бляшке

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\left(1 - \frac{z}{|z_n|}\right)^{-1} \tag{125}$$

имеет в любом угле $[\widehat{\varepsilon, 2\pi} - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$, *в. р. р. формального порядка* $\frac{1}{2}$, *при этом для всех* θ, $0 < \theta < 2\pi$,

$$h_b(\theta) \equiv \lim_{r\to\infty} r^{-\frac{1}{2}} \ln|b(re^{i\theta})| = \lim_{r\to\infty}{}^* r^{-\frac{1}{2}} \ln|b(re^{i\theta})| = 0. \tag{126}$$

Проведем доказательство по методу, изложенному в [3, стр. 308]. Пусть $0 < \eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta$, $z = re^{i\theta}$. Представим $b(z)$ в виде

$$b(z) = b_1(z)\, b_2(z), \tag{127}$$

где положено $(z_n = r_n e^{i\theta_n})$

$$b_1(z) = \prod_{|\theta_n| \leqslant \frac{\eta}{2}} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\left(1 - \frac{z}{r_n}\right)^{-1}, \quad b_2(z) = \prod_{\frac{\eta}{2} < \theta_n < 2\pi - \frac{\eta}{2}} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\left(1 - \frac{z}{r_n}\right)^{-1}. \tag{128}$$

Произведем следующие оценки:

$$\ln|b_1(z)| = \ln\Big|\prod_{|\theta_n| \leqslant \frac{\eta}{2}} \left(1 + z\frac{1 - e^{-i\theta_n}}{r_n - z}\right) \leqslant 2r \sum_{|\theta_n| \leqslant \frac{\eta}{2}} |r_n - z|^{-1} \sin 0{,}5\,|\theta_n|. \tag{129}$$

Но легко убедиться, что при $\eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta$ равномерно по θ

$$\frac{2\sqrt{rr_n}}{|r_n - z|^2} \leqslant \sqrt{\frac{(r+r_n)^2}{(r+r_n)^2 - 4rr_n\cos^2 0{,}5\,\theta}} \leqslant \left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sin\frac{\eta}{2}\right)^{-1}. \tag{130}$$

Задавшись теперь произвольным $\varepsilon > 0$, выберем такое $N_{\varepsilon,\eta}$, что

$$\sum_{r_n > N_{\varepsilon,\eta},\ |\theta_n| < \frac{\eta}{2}} \frac{1}{\sqrt{r_n}} \sin\frac{|\theta_n|}{2} < \varepsilon \sin\frac{\eta}{2}. \tag{131}$$

Тогда, опираясь на (129) — (131), нетрудно показать, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \max_{\eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta} r^{-1/2} \ln|b_1(re^{i\theta})| \leqslant \varepsilon. \tag{132}$$

Исследуем теперь асимптотическое поведение функции $[b_1(z)]^{-1}$. Аналогично соотношениям (129) и (130) можно получить неравенства

$$\ln(|b_1(z)|^{-1}) \leqslant 2r \sum_{|\theta_n| \leqslant \frac{\eta}{2}} |z - z_n|^{-1} \sin 0{,}5\,|\theta_n| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\theta_n| \leqslant \frac{\eta}{2},\ r_n < N_\varepsilon} \frac{2r}{|z_n - z|} \sin\frac{|\theta_n|}{2} + \frac{\sqrt{r}}{\sin\left(\frac{\eta}{4}\right)} \sum_{|\theta_n| \leqslant \frac{\eta}{2},\ r_n \geqslant N_\varepsilon} r_n^{-1/2} \sin\frac{|\theta_n|}{2}.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{r\to\infty} \max_{\eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta} r^{-1/2} \ln(|b_1(re^{i\theta})|^{-1}) \leqslant \varepsilon. \tag{133}$$

Но так как ε произвольно мало, то из (132) и (133) заключаем, что равномерно по θ на отрезке $\eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta$

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1/2} \ln|b_1(re^{i\theta})| = 0. \tag{134}$$

Переходим теперь к функции $b_2(z)$. Прежде всего отметим сходимость следующего ряда:

$$\sum_{\frac{\eta}{2} < \theta_n < 2\pi - \frac{\eta}{2}} r^{-1/2} \leqslant \left(\sin\frac{\eta}{4}\right)^{-1} \sum_{\frac{\eta}{2} < \theta_n < 2\pi - \frac{\eta}{2}} r_n^{-1/2} \sin 0{,}5\,\theta_n. \tag{135}$$

Пусть $n_0(r)$ означает число нулей функции $b_2(z)$ в круге $|z| \leqslant r$. Тогда из (135) и следующего ниже равенства

$$\sum_{\frac{\eta}{2} < \theta_n < 2\pi - \frac{\eta}{2},\ r_n \leqslant R} r_n^{-1/2} = \int_0^R x^{-1/2}\, dn_0(x) = \frac{n_0(R)}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2}\int_0^R n_0(x)\, x^{-3/2}\, dx$$

вытекает сходимость интеграла

$$\int_0^\infty n_0(x)\, x^{-3/2}\, dx < \infty, \tag{136}$$

откуда, в свою очередь, из-за монотонности функции $n_0(x)$ следует асимптотическое равенство

$$n_0(x) = o(\sqrt{x}). \tag{137}$$

Но из результатов Б. Я. Левина и А. Пфлюгера [3, стр. 120] следует, что соотношение (137) влечет за собой полную регулярность роста целых функций

$$b_3(z) = \prod_{\frac{\eta}{2} < \theta_n < 2\pi - \frac{\eta}{2}} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right), \quad b_4(z) = \prod_{\frac{\eta}{2} < \theta_n < 2\pi - \frac{\eta}{2}} \left(1 - \frac{z}{r_n}\right), \tag{138}$$

если за их формальный порядок взять $\sigma = \frac{1}{2}$, причем их индикаторы тождественно равны нулю. Следовательно, равномерно по θ на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\varlimsup_{r\to\infty} r^{-1/2} \ln|b_3(re^{i\theta})| = \lim_{r\to\infty}{}^{*} r^{-1/2} \ln|b_3(re^{i\theta})| = 0, \tag{139}$$

а поскольку $b_4(z)$ не имеет нулей в угле $\left[\frac{\eta}{2},\ 2\pi-\frac{\eta}{2}\right]$, то (ср. [3, стр. 311]) равномерно по θ, $\theta\in\left[\frac{\eta}{2},\ 2\pi-\frac{\eta}{2}\right]$,

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1/2}\ln|b_4(re^{i\theta})|=0. \tag{140}$$

Из (134), (139) и (140) вытекает, что равномерно по θ на отрезке $[\eta, 2\pi-\eta]$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1/2}\ln|b(re^{i\theta})| = \lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-1/2}\ln|b(re^{i\theta})|=0. \tag{141}$$

Теорема 15 доказана.

Следствие. *Если $\Phi(z)$ — решение задачи* (1) *в классе B и $z_n\neq 0$ — его корни, то для функции $b(z)$, определенной равенством (125), справедливо заключение теоремы 15.*

Следствие вытекает из того, что по теореме 6 ряд (124) сходится.

§ 8. Перейдем к завершению решения задачи (1) в классе B. По теореме 5 это решение можно представить в виде

$$\Phi(z)=X(z)\,F(z), \tag{142}$$

где $X(z)$ — каноническая функция, а $F(z)$ — некоторая целая функция, порядок ρ_F которой не превосходит ρ, причем если $\rho>\frac{1}{2}$, то $\rho_F=\rho$. Нам нужно выяснить более точно структуру функции $F(z)$. По теореме Адамара [3, стр. 38] $F(z)$ представима в виде

$$F(z)=z^m e^{P_q(z)}\prod_{n=1}^{n_0}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{z_n}+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{z_n}\right)^q\right\}, \tag{143}$$

$$n_0\leqslant\infty,\quad m\text{ — целое},\ m\geqslant 0,\ q=[\rho],$$

где z_n — отличные от нуля корни $F(z)$ (совпадающие с корнями $\Phi(z)$), $P_q(z)$ — многочлен степени $q_0\leqslant q$;

$$P_q(z)=a_qz^q+a_{q-1}z^{q-1}+\cdots+a_1z+a_0. \tag{144}$$

Так как $B=B^*_{1/2}$, то при $\rho>\frac{1}{2}$ по следствию 2 теоремы 10 $n_0=\infty$. При $\rho\leqslant\frac{1}{2}$ возможны оба случая: $n_0=\infty$, $n_0<\infty$.

Определим коэффициенты многочлена $P_q(z)$. Для этого введем сначала вспомогательную целую функцию

$$F_0(z)=\prod_{n=1}^{n_0}\left(1-\frac{z}{r_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{r_n}+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{r_n}\right)^q\right\}, \tag{145}$$

где $r_n=|z_n|$. Используя аппарат интеграла Стилтьеса, представим $F_0(z)$ следующим образом [3, стр. 89]:

$$F_0(z)=\exp\int_0^\infty\left[\frac{z}{x}+\left(\frac{z}{x}\right)^2+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{x}\right)^q+\ln\left(1-\frac{z}{x}\right)\right]d\tilde{n}_\Phi(x)=$$

$$=\exp\left\{\left[\left\{\frac{z}{x}+\cdots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{x}\right)^q+\ln\left(1-\frac{z}{x}\right)\right\}\tilde{n}_\Phi(x)\right]_{x=0}^{x=\infty}-\right.$$

$$\left.-z^{q+1}\int_0^\infty\frac{\tilde{n}_\Phi(x)\,dx}{x^{q+1}(x-z)}\right\}.$$

Но проинтегрированная часть обращается в нуль, так как $\tilde{n}_\Phi(x) \equiv 0$ для малых x (по определению $\tilde{n}_\Phi(x)$), а при $x \to \infty$ выполняется оценка (26):

$$\tilde{n}_\Phi(x) < x^{\rho+\varepsilon} = o(x^{q+1}) \ (\rho + \varepsilon < [\rho] + 1).$$

$\left(\text{При } \rho > \frac{1}{2}\right.$ выполняется более точное соотношение $\left.(71)\right)$. Тогда

$$F_0(z) = \exp\left\{-z^{q+1}\int_0^\infty \frac{\tilde{n}_\Phi(x)\,dx}{x^{q+1}(x-z)}\right\}. \tag{146}$$

Принимая теперь во внимание представление

$$\mathrm{X}(z) = \exp\left\{\frac{z^{q+1}}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x)}{x^{q+1}(x-z)}\,dx\right\} \tag{147}$$

и учитывая (143), (145) и (146), запишем (142) в такой форме:

$$\Phi(z) = \mathrm{X}(z) F_0(z)\{F(z)[F_0(z)]^{-1}\} = e^{a_0+S(z)}\,\Omega(z)\,b(z), \tag{148}$$

где

$$\Omega(z) = \exp\left[z\int_0^\infty \frac{(2\pi i)^{-1}\ln G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)}{x(x-z)}\,dx\right], \quad b(z) = \prod_{n=1}^{n_0} \frac{1-\dfrac{z}{z_n}}{1-\dfrac{z}{r_n}},$$

$$S(z) = \sum_{k=1}^{q} z^q\left\{a_k - \int_0^\infty\left[\frac{1}{2\pi i}\ln G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)\right]x^{-k-1}\,dx + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n^{-k} - r_n^{-k}\right)\right\}.$$

Такое представление возможно. В самом деле, так как при $r_n \geqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$

$$|z_n^{-k} - r_n^{-k}| \leqslant r_n^{-k}|\sin 0{,}5\,k\theta_n| \leqslant k r_n^{-1/2}\sin 0{,}5\,\theta_n \quad (\theta_n = \arg z_n),$$

то по теореме 6 ряд в выражении для $S(z)$ сходится. Сходимость произведения $b(z)$ и интегралов в выражениях для $\Omega(z)$ и $S(z)$ вытекает соответственно из теорем 12, 13 и следствия теоремы 11. Тем самым (148) установлено.

Докажем теперь, что $S(z) \equiv 0$. В самом деле, из теоремы 15 и следствия 2 теоремы 14 вытекает, что при всех θ, $0 < \theta < 2\pi$,

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-1}\ln|b(re^{i\theta})| = \lim_{r\to\infty} r^{-1}\ln|\Omega(re^{i\theta})| = 0. \tag{149}$$

С другой стороны, из теоремы 1 можно сделать вывод, что

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-1}\ln|\Phi(re^{i\theta})| = 0, \ 0 < \theta < 2\pi. \tag{150}$$

Но из (149), (150) и представления (148) следует

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-1}\,\mathrm{Re}\,S(re^{i\theta}) = 0, \ 0 < \theta < 2\pi, \tag{151}$$

что возможно только при обращении коэффициентов многочлена $S(z)$ в нуль. Отсюда $(k = 1, \ldots, q)$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\ln G(x) - 2\pi i\tilde{n}_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x^{k+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}(1 - e^{-ik\theta_n})\,k^{-1}r_n^{-k}. \tag{152}$$

Итак, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 16. *Всякое решение в классе B задачи (1) представимо в форме*

$$\Phi(z) = Cz^m \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x) - 2\pi i\widetilde{n}_\Phi(x)}{x(x-z)}dx\right]\prod_{n=1}^{n_0}\frac{1-\frac{z}{z_n}}{1-\frac{z}{r_n}}, \tag{153}$$

где $n_0 \leqslant \infty$, $z_n \neq 0$ — корни решения $\Phi(z)$, а $\widetilde{n}_\Phi(r)$ — их число в кольце $0 < |z| \leqslant r$.

Замечание 1. Хотя $b(z)$ имеет в точках $z = r_n$ полюсы, на $\Phi(z)$ в этих точках ограничена, так как $\Omega(z)$ при $z = r_n$ имеет нули соответствующего порядка.

Замечание 2. Из (148) легко видеть, что $\Phi(z)$ может быть представлена в форме

$$\Phi(z) = Cz^m e^{T(z)} \exp\left[\frac{z^{q+1}}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x)\,dx}{x^{q+1}(x-z)}\right] \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{n_0}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left[\frac{z}{r_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{r_n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{r_n}\right)^q\right], \tag{154}$$

где

$$T(z) = \sum_{k=1}^{q}\frac{z^q}{2\pi i}\int_0^\infty [\ln G(x) - 2\pi i\widetilde{n}_\Phi(x)]\frac{dx}{x^{k+1}}. \tag{155}$$

Формула (154) более сложна, чем формула (153), зато все входящие в нее функции ограничены во всяком круге $|z| \leqslant R$, т. е. принадлежат классу $\widetilde{B}$.

Замечание 3. При $0 < \rho < 1$ формула (153) может быть упрощена:

$$\Phi(z) = Cz^m \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x)}{x(x-z)}dx\right]\prod_{n=1}^{n_0}\left(1-\frac{z}{z_n}\right) \tag{156}$$

и принять такую же форму, как в [6] для случая $0 < \rho < \frac{1}{2}$. Однако при $\rho > \frac{1}{2}$ число n_0 заведомо бесконечно, тогда как при $\rho < \frac{1}{2}$ случай конечного n_0 не исключается.

В форме (153) могут быть записаны не только ограниченные решения задачи (1)*. Нам нужно выяснить, каким дополнительным условиям должна удовлетворять последовательность $\{z_n\}$, чтобы решение, определенное формулой (153), принадлежало классу B. Два таких условия были получены в теоремах 6 и 9: сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1/2}\sin 0{,}5\,\theta_n \tag{157}$$

и существование конечного неотрицательного предела

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\sqrt{r}}\int_0^r\frac{dt}{t}\int_0^t\left[\frac{1}{2\pi}\arg G(x) - \widetilde{n}_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x} = \gamma \geqslant 0. \tag{158}$$

---

* Можно было, например, показать, что в этой форме представимо любое решение порядка $\sigma < 1$ и конечного типа в области D.

Если потребовать еще ограниченности функции $\Phi(z)$ на контуре L, то, как мы сейчас покажем, она станет ограниченной и во всей области D.

Теорема 17. *Общее решение в классе B однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$$

в предположениях (2) — (6) выражается формулой

$$\Phi(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{n_0} \frac{1-\dfrac{z}{z_n}}{1-\dfrac{z}{r_n}} \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x) - 2\pi i\tilde{n}_\Phi(x)}{x(x-z)}\,dx\right] \tag{159}$$

$$(n_0 \leqslant \infty,\ C = \text{const},\ z_n = r_n e^{i\theta_n} \neq 0),$$

где $m \geqslant 0$ — целое число, а последовательность $\{z_n\}$, совпадающая с множеством отличных от нуля корней $\Phi(z)$, удовлетворяет следующим требованиям:

1) $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots$

2) *Сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n^{-1/2}\sin 0{,}5\,\theta_n$.

3) *Функция $\tilde{n}_\Phi(r)$, равная числу точек z_n в кольце $0 < |z| \leqslant r$, такова, что существует конечный неотрицательный предел*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\sqrt{r}}\int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t\left[\frac{1}{2\pi}\arg G(x) - \tilde{n}_\Phi(x)\right]\frac{dx}{x} = \gamma \geqslant 0.$$

4) *Сходится интеграл*

$$\int_0^\infty [\ln G(x) - 2\pi i\tilde{n}_\Phi(x)]\,x^{-2}\,dx.$$

5) *На контуре L предельная функция $\Phi^+(t)$ ограничена при достаточно больших t или, что то же самое, имеет место асимптотическая оценка $(t \neq r_n)$:*

$$m\ln t + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{t-z_n}{t-r_n}\right| + \frac{t}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\arg G(x) - 2\pi\tilde{n}_\Phi(x)}{x(x-t)}\,dx < \text{const}. \tag{160}$$

Индикатор решения $\Phi(z)$ при формальном порядке $\frac{1}{2}$ выражается формулой

$$h_\Phi(\theta) \equiv \varlimsup_{r\to\infty} r^{-1/2}\ln|\Phi(re^{i\theta})| = -\pi\gamma\sin\frac{\theta}{2} \quad (0 < \theta < 2\pi). \tag{161}$$

Доказательство. Пусть $\Phi(z) \in B$. Тогда по теореме 16 $\Phi(z)$ может быть представлена в виде (159), причем выполняются условия 1) —4). Далее, так как $\Phi(z) \in B$, то $\ln|\Phi^+(t)| < \text{const}$ при $t \in L$, или после использования формул Сохоцкого

$$\ln|\Phi^+(t)| = \ln|C| + m\ln t + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{t-z_n}{t-r_n}\right| + \frac{1}{2}\ln|G(t)| +$$

$$+\frac{t}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\arg G(x) - 2\pi\tilde{n}_\Phi(x)}{x(x-t)}\,dx < \text{const}. \tag{162}$$

... по условию (5) $\ln|G(t)| \in H_{[1,\infty)}$ и значит $|\ln|G(t)|| < \mathrm{const}$. Учитывая ..., приходим к оценке (160).

Пусть теперь, обратно, дана функция

$$\Phi_*(z)\, Cz^m \prod_{n=1}^{n_0} \frac{1-\dfrac{z}{z_n}}{1-\dfrac{z}{r_n}} \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x) - 2\pi i\tilde{n}_{\Phi^*}(x)}{x(x-z)}\,dx\right], \tag{163}$$

... последовательность $\{z_n\}$ подчинена условиям 1) — 4). Покажем тогда, ... $\Phi_*(z)$ ограничена в любой конечной части плоскости, т. е. принадле... классу $\tilde{B}$, и удовлетворяет краевому условию (1). Это проще всего ...ать, совершив в обратном порядке преобразования в равенстве (148), ...ся коэффициенты a_k по формулам (152). Тогда

$$\Phi_*(z) = \exp\left[\frac{z^{q+1}}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x)}{x^{q+1}(x-z)}\,dx\right] F_*(z) = \mathrm{X}(z)\, F_*(z), \tag{164}$$

... $F_*(z)$ — целая функция порядка не выше ρ, а $\mathrm{X}(z)$ — каноническая ...кция. Из свойств последней (§ 4) следует, что $\Phi_* \in \tilde{B}$ и

$$\Phi_*^+(t) = G(t)\,\Phi_*^-(t) \quad (1 < t < \infty), \tag{165}$$

т. е. $\Phi_*(z)$ есть решение в классе $\tilde{B}$. Теперь, используя обозначения (148) запишем (163) в такой форме:

$$\Phi_*(z) = Cz^m b(z)\,\Omega(z). \tag{166}$$

...ласно лемме 9, примененной при

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\ln G(x) - \tilde{n}_{\Phi_*}(x), \quad \sigma = \frac{1}{2},$$

... теореме 15 имеем (при фиксированном $\varepsilon > 0$ равномерно по θ)

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1/2}\ln|\Phi_*(re^{i\theta})| = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1/2}\ln|b(re^{i\theta})| +$$
$$+ \lim_{r\to\infty} r^{-1/2}\ln|\Omega(re^{i\theta})| = -\pi\gamma\sin\frac{\theta}{2} \quad (\varepsilon < \theta < 2\pi - \varepsilon). \tag{167}$$

Отсюда порядок функции $\Phi_*(z)$ в любом угле $\widehat{[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]}$ не превышает $\frac{1}{2}$. (Если $\gamma > 0$, то имеет место убывание порядка $\frac{1}{2}$). Далее в силу (160)

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant \infty} |\Phi^\pm(t)| < M = \mathrm{const}. \tag{168}$$

Но из представления (164) и теоремы 3 следует, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\max_{|z|=r} |\Phi_*(z)| < r^{\rho+\varepsilon}, \quad r > r_\varepsilon. \tag{169}$$

Тогда, используя принцип Фрагмена—Линделефа [3, стр. 69], легко показать, что $\Phi_*(z)$ имеет порядок не выше $\frac{1}{2}$ и минимальный, т. е. равный нулю тип. Учитывая же (168) и применяя теперь другую форму принципа Фрагмена — Линделефа [3, стр. 70], получаем, что $\Phi_* \in B$.

Для завершения доказательства теоремы 17 остается установить, что индикатор решения $\Phi_*(z)$ выражается формулой

$$h_{\Phi_*}(\theta) = -\pi\gamma \sin\frac{\theta}{2} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

Но это сразу же следует из представления (166), теоремы 15 и следствия 2 теоремы 14. Теорема 17 полностью доказана.

Замечание 1. Задача (1) имеет бесчисленное множество линейно независимых ограниченных решений. Приведем простейший пример такого решения:

$$\Phi_0(z) = \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\ln G(x) - 2\pi i\tilde{n}(x)}{x(x-z)}\,dx\right],$$

$$\tilde{n}(x) = \max\{0, [\max_{0\leqslant x\leqslant t}\{\varphi(x)x^\rho - \nu\}]\},$$

где ν — произвольное положительное число.

Замечание 2. Условие (6) является существенным для разрешимости задачи (1): можно было бы привести примеры, когда из-за нарушения этого условия задача делается неразрешимой.

В заключение автор выражает благодарность Б. Я. Левину, Ф. Д. Гахову, А. А. Гольдбергу, И. В. Островскому за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, Физматгиз, 1963.
2. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.
4. W. K. Haymann. Questions of regularity connected with the Phragmen — Lindelöf principle. J. math. pures et appl., 35, 115 — 126, 1956.
5. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
6. Н. В. Говоров. Краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка меньше 1/2. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.
7. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1952.
8. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
9. В. И. Крылов. О функциях, регулярных в полуплоскости «Матем. сб.», 6 (48), 1939.
10. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. Гостехиздат, 1948.
11. Н. В. Говоров. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом. ДАН СССР, т. 154, № 6, 1964.
12. Н. В. Говоров. Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом. Изв. АН БССР, № 1, 1964.
13. Н. В. Говоров Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом. ДАН СССР, т. 159, № 5, 1964.
14. Н. В. Говоров. Об ограниченных решениях краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка. ДАН СССР, т. 182, № 4, 1968.

Поступила 24 мая 1969 г.