ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 8 1969

О ПОРЯДКЕ РОСТА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ОДНОЙ ИЗ ПЕРЕМЕННЫХ

М. Ш. Ставский

В предлагаемой работе обобщается на целые функции произвольного ненулевого порядка и несколько уточняется одна теорема П. Лелона (см. теорему 26. 5 [1])*. Это достигается с помощью синтеза методов Л. И. Ронкина [3] и автора [4]. Результаты аналогичны полученным в [4] для неархимедовски нормированных полей. Мы используем также результаты М. Н. Шеремета [5], что дает возможность упростить изложение.

§ 1. ОБОБЩЕННЫЙ ПОРЯДОК

Определение 1. *Вещественная функция $\varphi(r)$, определенная для $r > 0$ и имеющая непрерывную производную, называется порядковой функцией, если она удовлетворяет условиям*

$$\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = \infty, \tag{1.1}$$

$$r\varphi'(r) > 0 \text{ и не возрастает.} \tag{1.2}$$

Из (1.2) следует, что $\varphi(r)$ возрастает и вогнута.

Обозначим через $\psi(r)$ функцию, обратную к $\psi(r)$. Из (1.2) следует, что

$$\frac{\psi'(r)}{\psi(r)} > 0 \text{ и не убывает.} \tag{1.3}$$

Обратно, из (1.3) следует (1.2).

Определение 2. *Число $\rho\,(0 < \rho < \infty)$ называется порядком целой функции $f(z)$ относительно данной порядковой функции $\varphi(r)$, если*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\varphi(\ln M_f(r))}{\ln r} = \rho^{**}. \tag{1.4}$$

В частности, при $\varphi(r) = \ln r$ получаем обыкновенный порядок.

Лемма 1. *Для любой целой функции $f(z)$, удовлетворяющей условию*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} > 0, \tag{1.5}$$

существует такая порядковая функция $\varphi(r)$, относительно которой $f(z)$ имеет конечный порядок.

Доказательство. Если предел (1.5) конечен, то достаточно взять $\varphi(r) = \ln r$. Эта функция удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3). Предположим теперь, что предел (1.5) бесконечен. Тогда $\ln\ln M(e^r)$ растет быстрее любой линейной функции. Поэтому можно найти такую возрастающую выпуклую кусочно-линейную функцию, график которой вписан в график $\ln\ln M(e^r)$ и не опускается ниже последнего. Сгладив

---

* Обобщение и усиление этой теоремы, но в другом направлении, содержится в работе Л. И. Ронкина [2].

** Как обычно, через $M(r) = M_f(r)$ обозначаем $\sup\limits_{|z|\leq r} |f(z)|$.

углы этой кусочно-линейной функции с помощью дуг окружностей достаточно малых радиусов, можно получить гладкую возрастающую выпуклую функцию $\xi(r)$, такую, что для всех r

$$\ln\ln M(e^r) \leqslant \xi(r), \tag{1.6}$$

а для некоторой последовательности $r_n \to \infty$

$$\ln\ln M\left(e^{r_n}\right) \geqslant \xi(r_n) - \varepsilon_n, \ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{1.7}$$

Положим $\xi(r) = \ln\psi(r)$. Тогда $\psi(r)$ удовлетворяет условию (1.3), следовательно, обратная к $\psi(r)$ функция $\varphi(r)$ удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2), значит, является порядковой функцией. Из (1.6) вытекает

$$\ln M(e^r) \leqslant \psi(r),$$

откуда

$$\varphi(\ln M(e^r)) \leqslant r. \tag{1.8}$$

Из (1.7) аналогично получаем

$$\varphi\left(\ln M\left(e^{r_n}\right) e^{\varepsilon_n}\right) \geqslant r_n.$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi(r)$ растет медленнее любой линейной функции, получим, что асимптотически*

$$\varphi\left(\ln M\left(e^{r_n}\right)\right) \geqslant r_n e^{-\varepsilon_n}. \tag{1.9}$$

Подставляя в (1.8) и (1.9) $\ln r$ вместо r, получим неравенства, из которых вытекает

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\varphi(\ln M(r))}{\ln r} = 1,$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{1.10}$$

целая функция порядка ρ относительно порядковой функции $\varphi(r)$. Тогда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k\varphi(k)}{-\ln|c_k|} = \rho. \tag{1.11}$$

Для доказательства достаточно положить в теореме 1 работы М. Н. Шеремета [5] $\alpha(x) = \varphi(x)$, $\beta(x) = x$. Тогда, очевидно, условия этой теоремы выполнены, а ее утверждение сводится к равенству (1.11).

Следствие. *Для любой порядковой функции $\varphi(r)$ существует целая функция $f(z)$, порядок которой относительно $\varphi(r)$ равен заданному числу ρ.*

Действительно, достаточно в качестве коэффициентов ряда (1.10) выбрать, например, числа

$$c_k = \exp\left(\frac{k\varphi(k)}{\rho}\right).$$

---

* Здесь и в дальнейшем «асимптотически» означает для достаточно больших значений аргумента.

§ 2. РОСТ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ОДНОЙ ИЗ НИХ

Пусть $f(z, w)$ — целая функция. Мы будем применять следующие обозначения:

$$M(R_1, R_2) = M_f(R_1, R_2) = \max_{\substack{|z| \leqslant R_1 \\ |w| \leqslant R_2}} |f(z, w)|,$$

$$M(z, R_2) = M_f(z, R_2) = \max_{|w| \leqslant R_2} |f(z, w)|,$$

$$\rho_w(z) = \lim_{R_2 \to \infty} \frac{\varphi(\ln M(z, R_2))}{\ln R_2},$$

где φ — порядковая функция.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(z, w) = \sum_{m, n} c_{mn} z^m w^n \tag{2.1}$$

целая функция двух переменных, $\varphi(r)$ — порядковая функция, и пусть для функции (2.1)

$$\overline{\lim_{R_2 \to \infty}} \frac{\varphi(\ln M(\overline{R}_1, R_2))}{\ln R_2} = \rho \tag{2.2}$$

при некотором фиксированном $R_1 = \overline{R}_1$. Тогда

1) *равенство* (2.2) *верно при любом R_1;*

2) *$\rho_w(z) = \rho$ при всех z, за исключением, быть может, борелевского множества типа F_σ с нулевой емкостью.*

Доказательство. Положим

$$\omega_n = [n\varphi(n)],$$

где $[u]$ обозначает целую часть u, и введем в рассмотрение функцию

$$g(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_{mn} z^m \right) w^{\omega_n} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) w^{\omega_n}. \tag{2.4}$$

Здесь

$$g_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{mn} z^m$$

целые функции. Согласно лемме 2

$$\rho_w(z) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n\varphi(n)}{-\ln|g_n(z)|} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\omega_n}{-\ln|g_n(z)|}.$$

Отсюда вытекает

$$\exp\left(-\frac{1}{\rho_w(z)}\right) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[\omega_n]{|g_n(z)|}.$$

Обозначая радиус сходимости ряда (2.4) по w через $r_w(z)$, получим

$$r_w(z) = \exp\left(\frac{1}{\rho_w(z)}\right). \tag{2.5}$$

Из принципа максимума следует, что $\rho_w(z) \leqslant \rho$ при $|z| \leqslant \overline{R_1}$, следовательно,

$$r_w(z) \geqslant e^{\frac{1}{\rho}}, \quad |z| \leqslant R_1.$$

Положим $A_n(R_1) = M_{g_n}(R_1)$ и рассмотрим ряд

$$F(R_1, w) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(R_1) w^n. \tag{2.6}$$

Очевидно,

$$M_F(R_1, R_2) \geqslant M_f(R_1, R_2).$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши

$$A_n(R_1) \leqslant \frac{M_f(R_1, R_2)}{R_2^n},$$

следовательно,

$$M_F(R_1, R_2) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(R_1) R_2^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(R_1)(2R_2)^n \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} M_f(R_1, 2R_2) \frac{1}{2^n} = 2M_f(R_1, 2R_2).$$

Отсюда заключаем, что порядки роста M_f и M_F относительно R_2 совпадают. В частности,

$$\overline{\lim_{R_2 \to \infty}} \frac{\varphi(\ln M_F(\overline{R}_1, R_2))}{\ln R_2} = \rho,$$

откуда по лемме 2 следует, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\omega_n}{-\ln A_n(\overline{R_1})} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{n\varphi(n)}{-\ln A_n(\overline{R_1})} = \rho. \tag{2.7}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется асимптотическое неравенство

$$\frac{\omega_n}{-\ln A_n(\overline{R_1})} \leqslant \rho(1 + \varepsilon).$$

Отсюда

$$\ln|g_n(z)| \leqslant -\frac{\omega_n}{\rho(1+\varepsilon)}, \quad |z| \leqslant \overline{R}_1, \quad n \geqslant n(\varepsilon).$$

Пусть $|w| < \exp\left(\frac{1}{\rho(1+2\varepsilon)}\right)$. Тогда при $|z| \leqslant \overline{R_1}$

$$\ln|g_n(z)| + \omega_n \ln|w| \leqslant \omega_n \left(\frac{1}{\rho(1+2\varepsilon)} - \frac{1}{\rho(1+\varepsilon)}\right).$$

Отсюда, учитывая, что ω_n растет быстрее, чем n, получаем, что ряд (2.4) сходится равномерно по z и представляет собой поэтому голоморфную по z функцию при $|w| < \exp\left(\frac{1}{\rho(1+\varepsilon)}\right)$. Но эта функция голоморфна также по w, следовательно, по теореме Гартогса, она голоморфна в области

$$|z| < \overline{R}_1, \; |w| < e^{\frac{1}{\rho}}, \tag{2.8}$$

т. е. разлагается там в двойной степенной ряд

$$g(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) w^{\omega_n} = \sum_{m,n} c_{mn} z^m w^{\omega_n}. \tag{2.9}$$

Заметим, что ряд

$$f(z,\ 1)=\sum_{m,\ n} c_{mn}z^m$$

сходится абсолютно при всех z. Следовательно, ряд (2.9) сходится в би цилиндре $|z|<\infty$, $|w|<1$. Сравнивая эту область с (2.8), на основании логарифмической выпуклости области сходимости степенного ряда заключаем, что ряд (2.9) сходится в бицилиндре

$$|z|<\infty,\ |w|<e^{\frac{1}{\rho}}=\overline{R}_2. \tag{2.10}$$

Так как при $|z|=R_1$

$$|g_n(z)|\leqslant M_{g_n}(R_1)\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}|c_{mn}|R_1^m,$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n(R_1)w^{\omega_n},\ R_1=|z|, \tag{2.11}$$

и ряд (2.9) имеют одинаковые пары сопряженных радиусов сходимости. Одна пара сопряженных радиусов сходимости ряда (2.11) известна — это $(\overline{R}_1,\ \overline{R}_2)$, что следует из (2.7) и леммы 2. Поэтому область (2.10) является максимальной областью такого вида, в которой сходится ряд (2.11), а, значит, и ряд (2.9). Как показано в работе Л. И. Ронкина [3], в этом случае точки z, для которых $r_w(z)>\overline{R}_2$, составляют множество E вида

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,\ E_k\subset E_{k+1}\ (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

где E_k — ограниченные замкнутые множества нулевой емкости. Следовательно, множество E имеет тип F_σ и нулевую емкость ([6], гл. 2). Теорема доказана.

Относительно точности этой теоремы можно доказать такое же утверждение, как в [3] для типа целой функции конечного порядка, а именно:

Теорема 2. *Пусть E — множество типа F_σ нулевой емкости, $\varphi(r)$ — порядковая функция. Тогда существует целая функция $f(z,\ w)$, которая удовлетворяет условию*

$$\varlimsup_{R_2\to\infty}\frac{\varphi(\ln M(R_1,R_2)}{\ln R_2}=1, \tag{2.12}$$

в то время как множество S точек z, в которых $\rho_w(z)<1$, удовлетворяет соотношению

$$E\subset S\subset\overline{E}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Очевидно, можно считать, что

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,\ E_k\subset E_{k+1}\ (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

где E_k — замкнутые множества нулевой емкости, причем

$$E_k\subset\{z\,|\,|z|\leqslant k\}. \tag{2.14}$$

Так как постоянная Чебышева множества E_k равна нулю (см. [7], гл. 7), то можно найти такие многочлены $t_k(z)$ возрастающих степеней n_k с корнями в E_k и старшими коэффициентами, равными 1, что

$$\sup_{z\in E_k}\sqrt[n_k]{|t_k(z)|}<k^{-k}\ (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.15}$$

Пусть $R_1 > 1$ фиксированное. Из (2. 14) следует

$$\ln M_{t_k}(R_1) \leqslant n_k \ln (k + R_1). \tag{2.16}$$

Обозначим через α_k решение уравнения

$$\varphi\left(\frac{n_k}{\alpha_k}\right) = \alpha k.$$

Из свойств функции $\varphi(r)$ вытекает, что такое решение существует и единственно при любом k. Таким образом, имеем

$$\varphi\left(\frac{n_k}{\alpha_k}\right) = k\alpha_k \text{ при всех } k.$$

Выберем степени n_k такими, чтобы, кроме (2. 15), выполнялось условие

$$\left[\frac{n_k}{\alpha_k}\right] < \left[\frac{n_{k+1}}{\alpha_{k+1}}\right],$$

что, очевидно, можно сделать, так как $\varphi(r) = o(r)$. Тогда функция

$$f(z, w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k(z)}{e^{kn_k}} w^{\left[\frac{n_k}{\alpha_k}\right]} \tag{2.18}$$

будет целой. Покажем, что для нее выполнено утверждение теоремы.

В самом деле, из (2. 16) и (2. 17) вытекает

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\left[\frac{n_k}{\alpha_k}\right] \varphi\left(\left[\frac{n_k}{\alpha_k}\right]\right)}{-\ln \frac{M_{t_k}(R_1)}{e^{kn_k}}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\frac{n_k}{\alpha_k}\varphi\left(\frac{n_k}{\alpha_k}\right)}{kn_k - O(n_k \ln (k + R_1))} = 1.$$

На основании леммы 2 отсюда следует, что функция

$$F(R_1, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_{t_k}(R_1)}{e^{kn_k}} w^{\left[\frac{n_k}{\alpha_k}\right]}$$

имеет порядок 1 по w относительно порядковой функции $\varphi(r)$. Следовательно, как было показано при доказательстве теоремы 1, тот же порядок имеет функция $M_f(R_1, R_2)$ при данном R_1. Значит, по теореме 1, для любого R_1 выполняется (2. 12).

Пусть теперь $z \in E$. Тогда $z \in E_k$, начиная с некоторого номера k. Рассмотрим ряд (2. 18) при этом k. Применяя (2. 15) и (2. 17), получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\left[\frac{n_k}{\alpha_k}\right] \varphi\left(\left[\frac{n_k}{\alpha_k}\right]\right)}{-\ln \frac{|t_k(z)|}{e^{kn_k}}} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{kn_k}{kn_k + kn_k \ln k} = 0.$$

Отсюда согласно лемме 2 следует $\rho_w(z) = 0$. Таким образом,

$$E \subset S.$$

Остается доказать правое из соотношений (2. 13). Пусть $z \in \overline{E}$. Обозначим расстояние от z до $\overline{E}$ через δ. Тогда $|t_k(z)| \geqslant \delta^{n_k}$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\left[\frac{n_k}{\alpha_k}\right] \varphi\left(\left[\frac{n_k}{\alpha_k}\right]\right)}{-\ln \frac{|t_k(z)|}{e^{kn_k}}} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{kn_k}{kn_k - n_k \ln \delta} = 1.$$

Это показывает, что точка z не является точкой понижения порядка. Таким образом, $S \subset \overline{E}$. Теорема доказана.

Автор пользуется случаем, чтобы сердечно поблагодарить Л. И. Ронкина за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. Физматгиз, 1962.
2. Л. И. Ронкин. О росте целых функций многих комплексных переменных. Матем. сб., т. 71 (113), № 3, 1966, 337—356.
3. Л. И. Ронкин. О типах целой функции двух комплексных переменных. Матем. сб., т. 39 (81), № 2, 1956, 253—266.
4. М. Ш. Ставский. Целые функции в неархимедовски нормированных полях. Матем. сб., т. 71 (113), № 2, 1966, 191—213.
5. М. Н. Шеремета. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. Изв. вузов, матем., № 2, 1967, 100—108.
6. Н. С. Ландкоф. Основы современной теории потенциала. М., «Наука», 1966.
7. Г. Н. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1952.

Поступила 22 марта 1968 г.