Выпуск 8 1969

О РЕГУЛЯРНОСТИ РОСТА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. Ф. Гришин

ЧАСТЬ IV

Эта часть посвящена функциям субгармоническим в полуплоскости и нулевого порядка. На такие функции мы распространим теорию, развитую в третьей части. Рассмотрим также некоторые вопросы, связанные с индикатором таких функций. Затем будут изучены субгармонические функции нулевого порядка и вполне регулярного роста.

Отметим, что функции нулевого порядка обладают рядом особенностей, вытекающих из того, что функции

$$u_1(z) = \int\limits_Z \ln\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu(\zeta),$$

$$u_2(z) = \int\limits_{Z_+} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\mu(\zeta),$$

играющие основную роль в представлении функций субгармонических в областях Z и Z_+, имеют в большинстве случаев, которые наиболее интересны, не тот порядок, что мера μ. Так если

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m(r)}{V(r)} = 1,$$

где $m(r) = \mu(C(0, r))$, $V(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho = 0$, то функция $u_1(z)$ имеет порядок $\rho_1(r)$, определяемый по формуле

$$r^{\rho_1(r)} = V_1(r) = \int\limits_1^r \frac{V(t)}{t} dt.$$

Пользуясь правилом Лопиталя, легко проверить, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(r)}{V_1(r)} = 0.$$

А если мера μ сосредоточена на одном луче, причем

$$m(r) = \int\limits_1^r \frac{V(t)}{t} dt + \varepsilon(r) V(r),$$

то функция $u_2(z)$ имеет порядок $\rho(r)$. Таким образом, в случае достаточно регулярного распределения меры μ функция $u_1(z)$ будет иметь, по терминологии А. А. Гольдберга, интегральный порядок, а функция $u_2(z)$ — дифференциальный порядок.

Такое поведение функций $u_1(z)$ и $u_2(z)$ в случае нулевого порядка и является причиной ряда особенностей. Они упрощают исследование для функций, субгармонических во всей плоскости, и затрудняют — в полуплоскости.

Теоремы третьей части верны или верны лишь с незначительными изменениями для случая нулевого порядка. Однако функция $u(z)$ имеет другой порядок, нежели мера μ, а это значительно снижает ценность этих теорем. Поэтому мы будем доказывать аналоги теорем из третьей части без предположения, что мера μ имеет формальный порядок $\rho(r)$. Взамен этого мы потребуем, чтобы этот порядок имела разность $m(er) - m(r)$. Мы будем говорить в этом случае, что мера μ имеет формальный дифференциальный порядок $\rho(r)$. Для ненулевого порядка эти требования эквивалентны. Изменения в доказательствах несущественны, причем они опираются на несколько простых лемм.

Лемма 12. *Если $m(er) - m(r) \leqslant V(r)$, то $m(tr) - m(r) \leqslant V(etr)\ln et$. В частности, при $r = 1$ получим $m(t) < m(1) + V(et)\ln et$.*

Доказательство. Имеем

$$m(tr) - m(r) \leqslant \sum_{k=0}^{[\ln t]} V(e^k r) \leqslant \int_0^{\ln et} V(e^u r)\,du \leqslant V(etr)\ln et.$$

Лемма 13. *Если $m(er) - m(r) \leqslant V(r)$, то*

$$\sup_r \int_1^\infty \frac{m(tr) - m(r)}{t^2 V(r)}\,dt < \infty.$$

Доказательство. Дифференцированием легко проверить, что функция $\dfrac{V(etr)}{t^{\frac{1}{2}} V(r)}$ — убывающая по переменной t. Поэтому, используя лемму 12, получим

$$\int_1^\infty \frac{m(tr) - m(r)}{t^2 V(r)}\,dt \leqslant \int_1^\infty \frac{V(etr)\ln et}{t^2 V(r)}\,dt < \frac{V(er)}{V(r)} \int_1^\infty \frac{\ln et}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt.$$

Отсюда и следует утверждение нашей леммы. Аналогично доказывается конечность величины

$$\sup_r \int_0^1 \frac{m(r) - m(tr)}{V(r)}\,dt.$$

Следовательно, имеет место

Лемма 14. *Если $m(er) - m(r) \leqslant V(r)$, то*

$$\sup_r \int_0^\infty \frac{|m(tr) - m(r)|}{(1 + t^2)V(r)}\,dt < \infty.$$

Лемма 15. *Если $m(er) - m(r) \leqslant V(r)$, то*

$$\bar\lambda = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_1^r t\,\frac{dm(t)}{V(t)} \leqslant \frac{e}{e-1}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{r}\int_1^r t\,\frac{dm(t)}{V(t)} < \frac{1}{e}\,\frac{e}{r}\int_1^{\frac{r}{e}} t\,\frac{dm(t)}{V(t)} + 1.$$

Переходя к верхнему пределу при $r \to \infty$, получим

$$\bar\lambda < \frac{1}{e}\bar\lambda + 1, \quad \bar\lambda < \frac{e}{e-1}.$$

Лемма 16. Пусть круги $C(z_i, \alpha_i r_i)$, $\alpha_i \leqslant \frac{1}{2}$ *покрывают плоскость не более чем два раза. Пусть* $m(er) - m(r) \leqslant V(r)$, а

$$\nu(t) = \sum_{r_i \leqslant t} \mu(C(z_i, \alpha_i r_i)), \quad r_i = |z_i|.$$

Тогда

$$\nu(er) - \nu(r) < KV(r).$$

Доказательство.

$$\nu(er) - \nu(r) = \sum_{r \leqslant r_i \leqslant er} \mu(C(z_i, \alpha_i r_i)) \leqslant 2\left[m\left(\frac{3}{2}er\right) - m\left(\frac{1}{2}r\right)\right] < KV(r).$$

Лемма 17. Если существует предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{m(r + \alpha r) - m(r)}{V(r)} = \varphi(\alpha),$$

то

$$\varphi(\alpha) = A \ln(1 + \alpha).$$

Доказательство. Функция $\varphi(\alpha)$ определена при $\alpha \geqslant 0$ монотонна и удовлетворяет функциональному уравнению $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi \times \times \left(\frac{\beta}{1 + \alpha}\right)$. Поэтому $\varphi(\alpha)$ непрерывна. Функция $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha - 1)$ определена при $\alpha \geqslant 1$ непрерывна и удовлетворяет функциональному уравнению $\psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$. Поэтому $\psi(\alpha) = A \ln \alpha$, а следовательно, $\varphi(\alpha) = A \ln(1 + \alpha)$.

Лемма 18. Пусть

$$\lim_{r \to \infty} \frac{m(r + \alpha r) - m(r)}{V(r)} = \ln(1 + \alpha).$$

Тогда

$$m(r) = \int_1^r \frac{V(t)}{t}(1 + \varepsilon_1(t))\, dt + \varepsilon_2(r) V(r),$$

где функции $\varepsilon_1(t)$ *и* $\varepsilon_2(t)$ *стремятся к нулю при* $t \to \infty$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$\frac{m(r + \alpha r) - m(r)}{V(r)} \underset{r \to \infty}{\rightrightarrows} \ln(1 + \alpha), \quad \alpha \in [0, a].$$

Поэтому для любого $\alpha_0 > 0$ при $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant a$

$$\frac{m(r + \alpha r) - m(r)}{V(r) \ln(1 + \alpha)} \underset{r \to \infty}{\rightrightarrows} 1.$$

Следовательно, существует функция $\alpha(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$, $r\alpha(r) \geqslant 1$ при $r \geqslant r_0$, такая, что

$$\frac{m(r + \alpha(r) r) - m(r)}{V(r) \ln(1 + \alpha(r))} \underset{r \to \infty}{\to} 1.$$

Возьмем r_0 и последовательность r_k, $r_{k+1} = (1 + \alpha(r_k)) r_k$. Имеем

$$m(r_{k+1}) - m(r_k) = V(r_k) \ln(1 + \alpha(r_k))(1 + \varepsilon_k),$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Тогда

$$m(r_{n+1}) - m(r_0) = \sum_{k=0}^{n} V(r_k) \ln(1 + \alpha(r_k))(1 + \varepsilon_k).$$

Выберем число δ_k так, чтобы выполнялось равенство

$$V(r_k)\ln(1+\alpha(r_k))(1+\varepsilon_k)=\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}\frac{V(t)}{t}(1+\delta_k)\,dt.$$

По теореме о среднем имеем

$$\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}\frac{V(t)}{t}dt=\frac{V(\bar t)}{\bar t}(r_{k+1}-r_k)=\alpha(r_k)\,r_k\frac{V(\bar t)}{\bar t}.$$

Поэтому

$$\delta_k=\frac{V(r_k)}{V(\bar t)}\frac{\ln(1+\alpha(r_k))}{\alpha(r_k)}\frac{\bar t}{r_k}(1+\varepsilon_k)-1.$$

Очевидно, что $\delta_k\to 0$ при $k\to\infty$. Положим $\varepsilon_1(t)=\delta_k$ при $t\in[r_k, r_{k+1})$. После этого мы получим

$$m(r_k)=m(r_0)+\int\limits_{r_0}^{r_k}\frac{V(t)}{t}(1+\varepsilon_1(t))\,dt.$$

Завершение доказательства очевидное.

Следующая лемма касается оценки регулярной части субгармонической функции. Ее доказательство несколько усложняется несовпадением порядка у меры и у построенной с ее помощью субгармонической в Z_+ функцией.

Лемма 19. *Пусть* $m(er)-m(r)\leqslant V(r)$ и

$$v_1=\frac{1}{V(r)}\int\limits_{Z_+\setminus C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)}\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right|d\mu(\zeta),$$

$$v_2=\frac{1}{V(r)}\int\limits_{Z_+\setminus C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)}\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z+h\,z-\zeta}{z+h\,z-\bar\zeta}\right|d\mu(\zeta).$$

Тогда

$$v_2-v_1\rightrightarrows 0$$

при

$$h\to 0.$$

Доказательство. Имеем

$$v_2-v_1=\frac{1}{V(r)}\int\limits_{Z_+\setminus C\left(z,\,\frac{1}{4}r\right)}\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|1+\frac{2ihz\,|\zeta|\sin\varphi}{(z+hz-\bar\zeta)(z-\zeta)}\right|d\mu(\zeta)<\frac{1}{V(r)}\times$$

$$\times\int\frac{2\,|h|\,|z|\,|\zeta|}{|z+hz-\bar\zeta|\,|z-\zeta|}d\mu(\zeta)\leqslant\frac{A_2}{V(r)}\,|h|\int\limits_0^\infty\frac{2rt\,dm(t)}{t^2+r^2}=$$

$$=\frac{A_2}{V(r)}|h|\int\limits_0^\infty\frac{2t}{t^2+1}\times d(m(tr)-(m(r))=\frac{A_2}{V(r)}|h|\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{(t^2-1)(m(tr)-m(r))}{(1+t^2)^2}dt<A_3|h|.$$

Последнее неравенство следует из леммы 14. Теперь мы сформулируем аналоги теорем третьей части и укажем на изменения, которые нужно произвести в доказательствах.

Теорема 11′. *Если величина $m(er)-m(r)$ имеет минимальный тип относительно порядка $\rho(r)$, то мера μ принадлежит классу δ'.*

Изменения незначительные. Нужно лишь как и в формулировке теоремы величину $m(r)$ заменить на $m(er)-m(r)$ и при оценке плотности исключительного множества кругов нужно применять леммы *15* и *16*.

Теорема 12′. *Пусть разность $m(er)-m(r)$ имеет формальный порядок $\rho(r)$, причем величины $\overline{S}(0, \theta)$ и $\overline{S}(\pi-\theta, \pi)$ стремятся к нулю при $\theta \to 0$. Тогда мера μ принадлежит классу a'.*

Величины $\overline{S}(0, \theta)$ и $\overline{S}(\pi-\theta, \pi)$ определяются иначе, чем в теореме 12;

$$\overline{S}(0, \theta) = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mu(D(\theta, t))}{V(t)},$$

где $D(\theta, t)$ имеет тот же смысл, что и в лемме 9.

Аналогично определяется $\overline{S}(\pi-\theta, \pi)$.

Формулировка теоремы 13 остается без изменений. При доказательстве ссылку на лемму 9, которая не верна для нулевого порядка, нужно заменить на утверждение, доказываемое в той же лемме и верное для нулевого порядка, где говорится, что функция $\varphi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Формулировка теоремы 14 также остается без изменения. Формулировка теоремы 15 не меняется, только при проверке достаточности условий (1. 6) и (1. 8) нужно воспользоваться леммой 12.

Теорема 16 будет верна и для нулевого уточненного порядка, если дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство $u(t) < A_4 V(t)$, которое в случае ненулевого порядка следует из условия теоремы. Для теоремы 17 как следствия предыдущих теорем изменения очевидны.

Заключительную теорему мы сформулируем полностью.

Теорема 20. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в Z_+. Если мера $|\nu_u|$ имеет нулевой формальный дифференциальный порядок $\rho(r)$, а заряд ν_u принадлежит какому-либо классу относительно этого порядка, то функция $u(z)$ принадлежит тому же классу относительно $\rho(r)$. Наоборот, если функция $u(z)$ принадлежит некоторому классу относительно порядка $\rho(r)$, который является формальным дифференциальным порядком для меры $|\nu_u|$, то заряд ν_u принадлежит этому же классу относительно $\rho(r)$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно сослаться на лемму 18. В этой теореме, конечно, наиболее существенна первая часть. Достаточные условия принадлежности ν_u тому или иному классу даны выше.

В связи с этой теоремой некоторый интерес представляет функция $u(z) = \operatorname{Re}\ln^2 z = \ln^2 r - \theta^2$, принадлежашая классу c относительно порядка $\rho(r) = \frac{\ln\ln r}{\ln r}$, в то время как заряд ν_u принадлежит классу c' относительно порядка $\rho_1(r) = 2\frac{\ln\ln r}{\ln r}$ и не принадлежит ни одному из классов относительно $\rho(r)$.

Теперь мы будем заниматься функциями субгармоническими в полуплоскости, функциями нулевого порядка и вполне регулярного роста. Б. Я. Левин [1, стр. 241] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы голоморфная внутри угла функция была функцией вполне регулярного роста. Однако эти условия сформулированы не в терминах распределения корней и годились в случае полуплоскости лишь для функций порядка $\rho > 1$. Н. В. Говоров [9—10] развил теорию функций вполне регулярного роста для случая полуплоскости до пределов соответствующей теории целых функций. В работах Б. Я Левина и Н. В. Говорова предполагалось, что $\rho > 0$. В [20] автор изучил некоторые вопросы, относящиеся к функциям голоморфным внутри угла и имеющим там нулевой порядок. Однако ему не удалось установить необходимые и достаточные условия принадлежности функций нулевого порядка к классу функций вполне регулярного роста. Теперь мы восполняем этот пробел.

Определение. *Пусть μ — мера, распределенная в замкнутой верхней полуплоскости. Будем говорить, что мера μ имеет дифференциальную плотность, если существует не более чем счетное множество лучей N, не содержащее лучей вещественной оси, что при ϑ, $\theta \in [0, \pi]\setminus N$ существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu(D(t, t+\alpha t, \vartheta, \theta))}{V(t)} = \mu(\alpha, \vartheta, \theta), \tag{4.1}$$

где

$$D(t, t+\alpha t, \vartheta, \theta) = \begin{cases} \{z : t \leqslant |z| \leqslant t+\alpha t, \ \vartheta \leqslant \arg z < \theta\}, & \theta \neq \pi \\ \{z : t \leqslant |z| \leqslant t+\alpha t, \ \vartheta \leqslant \arg z \leqslant \theta\}, & \theta = \pi \end{cases}$$

Лучи, принадлежащие множеству N, мы будем называть особыми.

Отметим еще, что согласно лемме 16 $\mu(\alpha, \vartheta, \theta) = \mu(\vartheta, \theta)\ln(1+\alpha)$.

Если предел (4.1) существует при $\vartheta > 0$ и $\theta < \pi$, то будем говорить, что мера μ имеет дифференциальную плотность в любом внутреннем угле.

Аналогичные определения вводятся для зарядов.

Теорема 21. *Если заряд ν_u имеет дифференциальную плотность, то субгармоническая в верхней полуплоскости функция $u(z)$,*

$$u(z) = \int\limits_{Z_+} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\nu_u(\zeta),$$

есть функция вполне регулярного роста в каждом внутреннем углу. Если при этом $u(z)$ вполне регулярного роста на граничных лучах, $u(t) < KV(|t|)$ и

$$S_{\nu_1}(0, \vartheta) + S_{\nu_1}(\pi-\vartheta, \pi] \underset{\vartheta\to 0}{\to} 0,$$

где индекс ν_1 обозначает, что функция S строилась по мере ν_1,

$$d\nu_1 = d\nu_u + \frac{1}{2\pi}\frac{u(t)}{|t|}dt,$$

то функция $u(z)$ вполне регулярного роста в замкнутой полуплоскости.

Доказательство. Пусть $\sin\theta > \sin\eta$, а $\varepsilon > 0$. Выберем неособый луч φ_0 так, чтобы при $\sin\varphi \leqslant \sin\varphi_0$ выполнялись соотношения

$$\frac{1}{\sin\varphi}\ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| = -(1+\alpha)\frac{2ty}{(t-x)^2+y^2}, \quad |\alpha| < \varepsilon, \quad t = |\zeta|,$$

$$\nu_u(0, \varphi_0) - \nu_u(0, +0) + \nu_u(\pi-\varphi_0, \pi) - \nu_u(\pi-0, \pi) < \varepsilon.$$

Так как луч φ_0 неособый, то в силу леммы 18 имеем

$$\nu_u(r, 0, \varphi_0) = \nu_u(0, \varphi_0)\int\limits_1^r \frac{V(t)}{t}(1+\varepsilon_1(t))\,dt + \varepsilon_2(r)V(r),$$

$$\nu_u(r, \pi-\varphi_0, \pi) = \nu_u(\pi-\varphi_0, \pi)\int\limits_1^r \frac{V(t)}{t}(1+\varepsilon_3(t))\,dt + \varepsilon_4(r)V(r).$$

Поэтому при $\sin\theta > \sin\eta$ получим

$$u_{\varphi_0}(z) = \int\limits_{D_{\varphi_0}} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\nu_u(\zeta) =$$

$$= -[2\mu(0, +0)(\pi-\theta) + 2\mu(\pi-0, \pi)\theta + \varepsilon(\varphi_0) + \varepsilon(r)]\, V(r).$$

Рассмотрим область $Z_+ \setminus D_{\varphi_0}$. В этой области

$$d\nu_u(\zeta) = d\mu(\zeta) = \sin\varphi\, d\bar\mu(\zeta),$$

где $\bar\mu$ — мера Рисса функции $u(z)$. Разобьем эту область углами Δ_k,

$$Z_+ \setminus D_{\varphi_0} = \bigcup_{k=0}^{n} \Delta_k,$$

$$\Delta_k : \theta_k \leqslant \arg z < \theta_{k+1},\ \ \theta_{k+1} - \theta_k \leqslant \delta,$$

причем лучи θ_k неособые, и сместим часть меры μ, находящейся в угле Δ_k на луч θ_k. Вновь полученную меру назовем μ_1. Очевидно, что

$$\int\limits_{Z_+ \setminus D_{\varphi_0}} f(\zeta)\, d\mu_1(\zeta) = \int\limits_{Z_+ \setminus D_{\varphi_0}} f(\alpha(\zeta))\, d\mu(\zeta),$$

где $\alpha(\zeta) = |\zeta| e^{i\theta(\zeta)}$, $\theta(\zeta) = \theta_k$ при $\zeta \in \Delta_k$. Для мер μ и μ_1, принадлежащих классу $б'$, выберем исключительные множества кругов C и C_1 нулевой линейной плотности способом, указанным в теореме 12. Вне этих множеств выполняются неравенства

$$\int \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu_i(\zeta) > -A_4 V(r),\ \ \mu_i = \mu,\ \mu_1.$$

Поэтому

$$v = \int\limits_{Z_+ \setminus D_{\varphi_0}} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu_1(\zeta) - \int\limits_{Z_+ \setminus D_{\varphi_0}} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| \times$$

$$\times\, d\mu(\zeta) = \int \frac{1}{\sin\theta(\zeta)} \ln\left|\frac{(z-\alpha(\zeta))(z-\bar\zeta)}{(z-\overline{\alpha(\zeta)})(z-\zeta)}\right| d\mu(\zeta) +$$

$$+ \int \left[\frac{1}{\sin\theta(\zeta)} - \frac{1}{\sin\varphi}\right] \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu(\zeta).$$

Отсюда следует, что при $z \bar\in C \cup C_1$ выполняется неравенство

$$v < \frac{1}{\sin\varphi_0} \int \ln\left(1 + \frac{4\delta\,|z|}{\sin\varphi_0\,|z-\zeta|}\right) d\mu(\zeta) +$$

$$+ \frac{\delta}{\sin^2\varphi_0} \int \ln\left|\frac{z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right| d\mu(\zeta < \varepsilon(\delta)\, V(r),$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Аналогично оценивается v снизу. Но функция

$$\int\limits_{Z_+ \setminus D_{\varphi_0}} \frac{1}{\sin\varphi} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}\right| d\mu_1(\zeta)$$

есть функция вполне регулярного роста с индикатором

$$h(\theta) = 2(\theta-\pi) \sum_{\varphi_k < \theta} \bar\sigma(\Delta_k)\theta_k + 2\theta \sum_{\theta_k > \theta} \bar\sigma(\Delta_k)(\theta_k - \pi),$$

где $\sigma(\sigma)$ — мера, определенная на углах, причем ее значение на угле с граничными лучами ϑ и θ равно $\bar{\mu}(\vartheta, \theta)$ $(\mu(\vartheta, \theta))$. Поэтому $u(z)$ вполне регулярного роста при $\sin\theta \geqslant \sin\eta$ с индикатором

$$h(\theta) = 2(\theta - \pi)\left(\int_0^\theta \varphi d\bar{\sigma}(\varphi) + \nu_u(0, +0)\right) + 2\theta\left(\int_\theta^\pi (\varphi - \pi) \times\right.$$

$$\left.\times\, d\bar{\sigma}(\varphi) + \nu_u(\pi - 0, \pi)\right) = 2(\theta - \pi)\int_0^\theta \frac{\varphi}{\sin\varphi}\, d\sigma(\varphi) + 2\theta\int_\theta^\pi \frac{\varphi - \pi}{\sin\varphi}\, d\sigma(\varphi).$$

Если еще выполняются условия второй части теоремы, то из них вытекает, что функция $u(z)$ принадлежит классу $б$. Поэтому $u(z)$ вполне регулярного роста в замкнутой области Z_+. Докажем теперь обратную теорему.

Теорема 22. *Если функция $u(z)$ вполне регулярного роста во всяком внутреннем угле, то заряд ν_u имеет дифференциальную плотность во всяком внутреннем угле. Если при этом она вполне регулярного роста в замкнутой полуплоскости и имеет формальный порядок $\rho(r)$, то заряд ν_1 имеет дифференциальную плотность в замкнутой области Z_+, причем*

$$\nu_1(0, \vartheta) + \nu_1(\pi - \vartheta, \pi) \to 0.$$
$$\vartheta \to 0.$$

Доказательство. Нам придется воспользоваться одним фактом теории субгармонических функций, который является аналогом принципа аргумента для аналитических функций. Утверждается, что если $u(z)$ субгармоническая функция, то соответствующая ей мера Рисса $\bar{\mu}$ является обобщенной функцией $(2\pi)^{-1}\Delta u$, см. [2, стр. 135]. При $\operatorname{Im} z > 3n^{-1}$ определена функция $u_n(z)$ — троекратное усреднение по кругу радиуса $\frac{1}{n}$ функции $u(z)$. Это субгармоническая функция, имеющая непрерывные частные производные второго порядка, причем $u_n(z) \downarrow u(z)$. Мера $\bar{\mu}_n$ стремится к мере $\bar{\mu}$ и имеет плотность $(2\pi)^{-1}\Delta u_n$. Пусть $D = \{z : r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2,\ \vartheta \leqslant \arg z \leqslant \theta\}$, $r_2 = (1 + \alpha) r_1$.

Имеем

$$\bar{\mu}_n(D) = \frac{1}{2\pi}\iint_D \Delta u_n dx dy.$$

Применяя формулу Грина, получим

$$\bar{\mu}_n(D) = \frac{1}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{du_n(te^{i\theta})}{t d\theta}\, dt - \frac{1}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{du_n(te^{i\vartheta})}{t d\vartheta}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_\vartheta^\theta r_2 \frac{du_n(r_2 e^{i\varphi})}{dr_2}\, d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_\vartheta^\theta r_1 \frac{du_n(r_1 e^{i\varphi})}{dr_1}\, d\varphi. \qquad (4.2)$$

Разделим обе части равенства на произведение $r_1 r_2$, после этого усредним по r_1 в пределах от $r_1 - h_1 r_1$ до r_1, по r_2 в пределах от r_2 до $r_2 + h r_2$, по ϑ в пределах от $\vartheta - l$ до ϑ и по θ в пределах от θ до $\theta + k$. Затем умножим обе части равенства на $r_1 r_2$ и разделим на $V(r_1)$. После проделанных операций наше равенство не будет содержать производных функции $u(z)$. Перейдем к пределу в этом равенстве при $n \to \infty$. Мы получили соотношение между $\bar{\mu}$ и $u(z)$, которое выполняется для произвольной субгармонической функции. Из него следует, что если функция $u(z)$ субгармоническая класса a относительно порядка $\rho(r)$, то $\overline{\mu}(D) < A(\vartheta, \theta) \times [1 + \ln(1+\alpha)]\, V(r_1)$. Из условий теоремы и полученной оценки, пользуясь рассуждением леммы 2 [1, стр. 188], можно получить

$$\frac{1}{V(r)} \int_{\alpha}^{\beta} |u(re^{i\theta}) - V(r)\, h(\theta)|\, d\theta \to 0, \quad r \to \infty$$

$$\frac{1}{V(r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{|u(te^{i\theta}) - V(t)\, h(\theta)|}{t}\, dt \to 0. \quad r_1 \to \infty$$

Из этих соотношений и преобразованного равенства (4. 2) следует, что

$$\lim_{r_1 \to \infty} \frac{\overline{\mu}(D)}{V(r_1)} = [h'(\theta) - h'(\vartheta)] \ln(1+\alpha)$$

всюду, где существуют написанные производные. Отсюда получаем

$$\lim_{r_1 \to \infty} \frac{\nu_\alpha(D)}{V(r_1)} = \ln(1+\alpha) \int_{\vartheta}^{\theta} \sin\varphi\, dh'(\varphi).$$

Первую часть теоремы мы доказали. Предположим теперь, что $u(z)$ имеет формальный порядок $\rho(r)$ и вполне регулярного роста во всей области Z_+. Тогда существует предел

$$\lim_{\substack{t \to {+\infty \atop -\infty} \\ t \bar{\in} C}} \frac{u(t)}{V(|t|)} = \begin{cases} h(0) \\ h(\pi) \end{cases}$$

Так как еще $u(t) < KV(|t|)$, то мера μ_+ с плотностью

$$\mu_+(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{u(t) - h(0)\, V(t)}{|t|}\right)_+ & t > 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{u(t) - h(\pi)\, V(|t|)}{|t|}\right)_+ & t < 0 \end{cases}$$

имеет нулевой дифференциальный тип относительно порядка $\rho(t)$, а следовательно, построенная по этой мере функция $u(z, \mu_+)$ вполне регулярного роста с нулевым индикатором. Аналогично строим меру μ_-. Функция

$$u_1(z) = u(z) - \frac{h(0)\, y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(t)\, dt}{(t-x)^2 + y^2} - \frac{h(\pi)\, y}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{V(|t|)\, dt}{(t-x)^2 + y^2} - u(z, \mu_+)$$

вполне регулярного роста с индикатором, равным нулю на граничных лучах. Этой функции соответствует мера $\mu_1 = \nu_1 + \mu_-$. Представим функцию $u_1(z)$ в виде $u_1(z) = u_\varphi(z) + u_2(z)$, где $u_\varphi(z)$ — функция, построенная по части меры μ_1, распределенной в области D_φ. Так как $u_2(z)$ — функция вполне регулярного роста с отрицательным индикатором, то $h_\varphi(\theta)$ — индикатор функции $u_\varphi(z)$, не меньше, чем $h_1(\theta)$. Поэтому величины $h_\varphi(\varphi)$ и $h_\varphi(\pi - \varphi)$ стремятся к нулю при $\varphi \to 0$. Так как на участке $[\varphi, \pi - \varphi]$ индикатор $h_\varphi(\theta)$ линеен, то $h_\varphi(\theta) \rightrightarrows 0$ при $\varphi \to 0$.

Допустим теперь, что существуют $\delta > 0$, $\alpha > 0$ и последовательности $r_n \to \infty$ и $\vartheta_n \to 0$ такие, что

$$\mu_1(D(r_n, r_n + \alpha r_n, 0, \vartheta_n)) > \delta V(r_n).$$

Тогда

$$u_\varphi(ir_n) < -A(\delta,\ \alpha)\,V(r_n) \quad \text{при } \vartheta_n < \varphi.$$

Это противоречит тому, что функция $u_\varphi(z)$ вполне регулярного роста при каждом φ и $h_\varphi(\theta) \rightrightarrows 0$ при $\varphi \to 0$. Наша теорема доказана.

Список литературы, на которую тут производятся ссылки, приведен после частей I, II нашей работы, помещенных в выпуске 6 настоящего сборника. Часть III помещена в выпуске 7.

В заключение отметим, что работа выполнена под руководством Б. Я. Левина, которому автор выражает глубокую благодарность.

Автор также искренне признателен И. В. Островскому и В. Э. Кацнельсону, сделавшим ряд ценных замечаний.

Поступила 27 ноября 1967 г.