Выпуск 8 1969

О ГРАНИЦАХ ВЫПУКЛОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Т. Г. Эзрохи

До настоящего времени изучались [1, 2, 3] классы регулярных однолистных в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, для которых

$$f'(z)=\frac{p(z)+h}{1+h}, \tag{1}$$

или

$$f'(z)=\frac{1+h}{p(z)+h},$$

где

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+z^s e^{-i\theta}}{1-z^s e^{-i\theta}}\,d\mu(\theta), \tag{2}$$

а $\mu(\theta)$ — неубывающая функция, причем $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta)=1$, s — целое $\geqslant 1$, $h\geqslant 0$. Получить границы выпуклости, когда h — фиксированное комплексное, $\operatorname{Re} h\geqslant 0$, $\operatorname{Im} h=\lambda\neq 0$, пока не удается, поскольку возникают большие алгебраические затруднения. Поэтому в качестве следующего приближения здесь решается задача для случая фиксированного $h=i\lambda$, $\lambda\in(-\infty;\ +\infty)$, $\lambda\neq 0$, который до сих пор в литературе не рассматривался. Для решения этой задачи пользуемся методом, указанным в работе [1].

Аналогично решается задача по определению радиуса выпуклости регулярных в области $1<|\zeta|<+\infty$ функций $F(\zeta)$, для которых

$$F'(\zeta)=\frac{p\left(\frac{1}{\zeta}\right)+h}{1+h}, \tag{3}$$

или

$$F'(\zeta)=\frac{1+h}{p\left(\frac{1}{\zeta}\right)+h}, \tag{3'}$$

где $h=i\lambda$, $\lambda\in(-\infty;\ +\infty)$, а $p\left(\frac{1}{\zeta}\right)=p(z)$ есть s-симметричная функция, $s\geqslant 2$, определяемая формулой (2).

Для классов функций, определяемых в круге $|z|<1$ формулой (1), и функций, определяемых в области $1<|\zeta|<+\infty$ формулой (3), решена указанная выше задача для случая, когда разложение в ряд имеет пропуск нескольких начальных коэффициентов и $h\geqslant 0$.

§ 1. Обозначим через $U^\lambda(s)$ класс регулярных однолистных в $|z|<1$ функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, для которых

$$f'(z)=\frac{p(z)+i\lambda}{1+i\lambda},$$

где $p(z)$ определяется равенством (2), s — целое $\geqslant 1$, λ — вещественное число.

Теорема 1. *Радиус выпуклости класса $U^{\lambda}(s)$ равен*

$$r_0 = \sqrt[2s]{\frac{t(s^2+2t^2+2)-|\lambda|s^2}{t(s^2+2t^2+2)+|\lambda|s^2}},$$

где t является единственным вещественным корнем уравнения

$$|\lambda| s\sqrt{1+t^2}\sqrt{s^2(1+\lambda^2)+1+t^2} = t[s^2(1+\lambda^2)+2(1+t^2)]. \qquad (4)$$

Доказательство. Радиус выпуклости класса $U^{\lambda}(s)$ определяется как наименьшее значение $r \in (0;\ 1)$, при котором на окружности $|z| = r$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} I_1 = \operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant 0 \qquad (5)$$

для всех $f(z) \in U^{\lambda}(s)$, причем хотя бы для одной из этих функций в некоторых точках окружности $|z| = r$ реализуется равенство.

Имеем

$$\operatorname{Re} I_1 = \operatorname{Re}\left(1+\frac{zp'(z)}{p(z)+i\lambda}\right) = \operatorname{Re}\left(1+\frac{w}{\omega+i\lambda}\right),$$

где $w = zp'(z)$, $\omega(z) = p(z)$. Тогда на основании теоремы 1 [1]

$$\min_{f\in U^{\lambda}(s)}\min_{|z|=r}\operatorname{Re} I_1 = \min_{p\in P_{2,s}}\min_{|z|=r}\operatorname{Re} I_1,$$

где $P_{2,s}$ — класс функций $p(z)$, определяемых формулой

$$p(z) = \delta_1\frac{1+z^s e^{-i\theta_1}}{1-z^s e^{-i\theta_1}} + \delta_2\frac{1+z^s e^{-i\theta_2}}{1-z^s e^{-i\theta_2}}, \qquad (5^*)$$

$$\delta_1 \geqslant 0,\ \delta_2 \geqslant 0,\ \delta_1+\delta_2 = 1,\ \theta_1,\ \theta_2 \in [0;\ 2\pi].$$

Если ввести замену $\omega + i\lambda = Re^{i\varphi}$ и воспользоваться теоремой 2 [4], то приходим прежде всего к задаче нахождения наименьшего значения функции

$$Q_1 = 1+\frac{s}{2}R\cos\varphi - \frac{s}{2R}(1+\lambda^2)+\frac{s}{2}\frac{\rho_0^2-\rho^2}{R} \qquad (6)$$

в круге

$$R^2-2R(a\cos\varphi+\lambda\sin\varphi)+1+\lambda^2 \leqslant 0, \qquad (7)$$

где

$$a = \frac{1+r^{2s}}{1-r^{2s}},\ \rho = \frac{2r^s}{1-r^{2s}},\ 0 \leqslant \rho_0 \leqslant \rho.$$

$$\omega = a+\rho_0 e^{i\varphi_0},\ \varphi_0 \in [0;\ 2\pi].$$

Введем обозначения

$$\frac{R}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \eta,\quad x = \frac{a\cos\varphi+\lambda\sin\varphi}{\sqrt{1+\lambda^2}}. \qquad (8)$$

Тогда соотношения (6) и (7) принимают соответственно вид

$$Q_1 = 1+\frac{s}{2}\sqrt{1+\lambda^2}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)\cos\varphi+\frac{s}{2}\sqrt{1+\lambda^2}\,\frac{\eta^2-2x\eta+1}{\eta}, \qquad (6')$$

$$\eta(2x-\eta) \geqslant 1. \qquad (7')$$

Задача нахождения радиуса выпуклости класса $U^{\lambda}(s)$ сводится к следующей: найти точку на кривой $Q_1 = 0$ в области (7'), для которой $x = x_{\min}$, ибо нахождение $r_{\min}$, удовлетворяющего условию (5), сводится к нахождению $a_{\min}$, а это в свою очередь сводится, как следует из (8), к нахождению $x_{\min}$.

Исследуем уравнения гипербол

$$s(1-\cos\varphi)=\eta\left[2xs-\eta s(1+\cos\varphi)-\frac{2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right], \tag{9}$$

$$\eta(2x-\eta)=1 \tag{10}$$

при фиксированном φ.

Поскольку, как следует из (8), $\eta>0$, то из (7′) мы видим, что $x>0$, а потому и $x_{\min}>0$. Таким образом, нужно рассматривать только первую четверть: $\eta>0$, $x>0$. Обозначим через (D) область, определяемую в первой четверти неравенством (7′). Нужно найти точку гиперболы (8) с наименьшим значением x, принадлежащую области $(\bar{D})$. Назовем вершиной ветви гиперболы (9), которая расположена в первой четверти, ту точку L, касательная в которой параллельна оси 0η. Нетрудно вычислить, что координаты вершины есть

$$x_0=\frac{1}{s\sqrt{1+\lambda^2}}+|\sin\varphi|,\quad \eta_0=\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Если $L\in(\bar{D})$ т. е. $\eta_0(2x_0-\eta_0)\geqslant 1$, то

$$x_{\min}(\varphi)=\frac{1}{s\sqrt{1+\lambda^2}}+|\sin\varphi|. \tag{11}$$

Если же $L\bar{\in}(\bar{D})$, то $x_{\min}(\varphi)$ будет абсциссой точки пересечения гипербол (9) и (10), принадлежащей первой четверти. Нетрудно убедиться, что в этом случае

$$x_{\min}(\varphi)=\sqrt{\frac{\sec^2\varphi}{s^2(1+\lambda^2)}+1}. \tag{12}$$

Условие $\eta_0(2x_0-\eta_0)\geqslant 1$ равносильно

$$\frac{1}{s\sqrt{1+\lambda^2}}\geqslant\frac{1}{\sin\varphi}-\sin\varphi$$

или

$$\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

где

$$\frac{1}{s\sqrt{1+\lambda^2}}=\frac{1}{\sin\varphi_0}-\sin\varphi_0,\quad 0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}.$$

Тот случай, когда $|\varphi|=\varphi_0$, соответствует предположению, что «вершина» гиперболы (9) лежит на гиперболе (10). Вычисляя $a(\varphi)$ по $x_{\min}(\varphi)$ из (11) на основании формулы (8), легко убедиться, что

$$\min_{\varphi_0\leqslant|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}} a(\varphi)=a(\varphi_0),$$

т. е. когда точка L лежит на гиперболе (9). Но этот случай содержится в предположении, что $x_{\min}(\varphi)$ определяется формулой (12).

Таким образом, нужно найти $\min a(\varphi)$, где

$$a(\varphi)=\left[\sqrt{\frac{\sec^2\varphi}{(1+\lambda^2)s^2}+1}\,\sqrt{1+\lambda^2}-\lambda\sin\varphi\right]\sec\varphi,$$

причем можно считать $0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$. Положим $\operatorname{tg}\varphi=t$. Тогда

$$a=\frac{1}{s}\sqrt{1+t^2+s^2(1+\lambda^2)}\cdot\sqrt{1+t^2}-|\lambda|t.$$

Функция $a(t)$ имеет, как нетрудно проверить, одну точку минимума, для которой

$$|\lambda| s \sqrt{(1+t^2)[s^2(1+\lambda^2)+1+t^2]} = t[s^2(1+\lambda^2)+2(1+t^2)].$$

Последнее уравнение имеет единственный вещественный корень $t_0 > 0$. Тогда

$$a_{\min} = t_0 \frac{s^2+2t_0^2+2}{|\lambda| s^2}.$$

Из последнего следует утверждение теоремы.

Оценка достигается функцией

$$f(z) = \int_0^z \frac{1+\beta\zeta^s}{1-\zeta^s} d\zeta, \quad \beta = \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}.$$

§ 2. Пусть $V_\lambda(s)$ класс регулярных однолистных в $|z|<1$ функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, для которых

$$f'(z) = \frac{1+i\lambda}{p(z)+i\lambda},$$

где $p(z)$, λ, s — те же, что и в § 1.

Теорема 2. *Радиус выпуклости класса $V_\lambda(s)$ равен радиусу выпуклости класса $U^\lambda(s)$.*

Доказательство. Мы имеем

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''}{f'}\right) = \operatorname{Re}\left(1-\frac{zp'(z)}{p(z)+i\lambda}\right) = \operatorname{Re}\left(1-\frac{w}{\omega+i\lambda}\right).$$

Путем рассуждений, приведенных в § 1, приходим сначала к задаче нахождения наименьшего значения функции

$$Q_2 = 1-\frac{s}{2}\sqrt{1+\lambda^2}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)\cos\varphi + \frac{s}{2}\sqrt{1+\lambda^2}\,\frac{\eta^2-2x\eta+1}{\eta}$$

в области (7′), а затем к нахождению $x_{\min}$, удовлетворяющего уравнению $Q_2=0$ в области (7′), что приводит к исследованию гиперболы (10) и гиперболы (при фиксированном φ)

$$s(1+\cos\varphi) = \eta\left[2xs-\eta s(1-\cos\varphi)-\frac{2}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right], \tag{13}$$

которая, как нетрудно проверить, имеет «вершину» L_1 с той же абсциссой, что и гипербола (9). Кроме того, убеждаемся, что в случае $L_1 \in (\overline{D})$

$$\min_{\varphi_0 \leqslant |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}} a(\varphi) = a(\varphi_0),$$

т. е. точка L_1 лежит на гиперболе (10). Если $L_1 \overline{\in} (\overline{D})$, то $x_{\min}(\varphi)$ является абсциссой точки пересечения гипербол (13) и (10), которая совпадает с абсциссой точки пересечения гипербол (8) и (10). Отсюда и следует утверждение теоремы.

Оценка достигается функцией

$$f(z) = \int_0^z \frac{1-\zeta^s}{1+\beta\zeta^s} d\zeta, \quad \beta = \frac{1-i\lambda}{1+i\lambda}.$$

§ 3. Пусть $\Sigma^\lambda(s)$ — клас регулярных в области $1<|\zeta|<+\infty$ функций $F(\zeta)$, для которых $F'(\zeta)$ есть s-симметричная функция, $s \geqslant 2$, определяемая формулой (3), где $h = i\lambda$, $\lambda \in (-\infty; +\infty)$.

Теорема 3. *Радиус выпуклости класса* $\Sigma^{\lambda}(s)$ *определяется формулой*

$$\rho_0 = \sqrt[2s]{\frac{t(s^2+2t^2+2)+|\lambda|s^2}{t(s^2+2t^2+2)-|\lambda|s^2}}, \tag{14}$$

где t *является единственным вещественным корнем уравнения* (*4*).

Утверждение следует из доказательства теоремы 2, если учесть, что

$$1+\frac{\varsigma F''(\varsigma)}{F'(\varsigma)} = 1-\frac{zp'(z)}{p(z)+i\lambda},\quad z=\frac{1}{\varsigma},$$

и $\rho_0 = \frac{1}{r_0}$, где r_0 — радиус выпуклости класса $V_{\lambda}(s)$, а $p(z)$ определяется формулой (2).

Оценка достигается функцией

$$F(\zeta) = \int_{\varsigma_0}^{\varsigma}\frac{z^s+\beta}{z^s-1}dz,\quad \beta=\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda},\ |\zeta_0|\geqslant 1.$$

§ 4. Пусть $\Sigma_{\lambda}(s)$ — класс регулярных в области $1<|\zeta|<+\infty$ функций $F(\zeta)$, для которых $F'(\zeta)$ есть s-симметричная функция, $s\geqslant 2$, и определяется соотношением (3′), $h=i\lambda$, $\lambda\in(-\infty;\ +\infty)$.

Теорема 4. *Радиус выпуклости класса* $\Sigma_{\lambda}(s)$ *определяется формулой* (*14*).

Утверждение следует из доказательства теоремы 1, если учесть, что

$$1+\frac{\varsigma F''(\varsigma)}{F'(\varsigma)} = 1+\frac{zp'(z)}{p(z)+i\lambda},\quad \zeta=\frac{1}{z},\quad \rho_0=\frac{1}{r_0},$$

где r_0 — радиус выпуклости класса $U^{\lambda}(s)$.

Оценка достигается функцией

$$F(\zeta) = \int_{\varsigma_0}^{\varsigma}\frac{z^s-1}{z^s+\beta}dz,\quad \beta=\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda},\quad |\zeta_0|\geqslant 1.$$

§ 5. Обозначим через $\tilde{\Sigma}_{h,m}$ класс регулярных в области $1<|\zeta|<+\infty$ функций

$$F(\zeta)=\zeta+a_0+\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{a_k}{\varsigma^k},\quad m\geqslant 1,$$

для которых

$$F'(\zeta)=\frac{p\left(\frac{1}{\varsigma}\right)+h}{1+h},$$

где $h\geqslant 0$, $p\left(\frac{1}{\varsigma}\right)=p(z)\in P_{(m+1)}$, а $P_{(m+1)}$ — класс регулярных в $|z|<1$ функций $p(z)$, нормированных разложением

$$p(z)=1+b_{m+1}z^{m+1}+\ldots$$

и удовлетворяющих в $|z|<1$ условию $\operatorname{Re}p(z)>0$.

Теорема 5. *Радиус выпуклости класса* $\tilde{\Sigma}_{n,m}$ *равен*

$$\rho_0=\sqrt[m+1]{\frac{m+1+h+\sqrt{m^2+2(m+1)(1+h)}}{1+h}}.$$

При доказательстве этой теоремы мы применяем метод, указанный в работе [5]. Нетрудно видеть, что

$$1+\frac{\varsigma F''(\varsigma)}{F'(\varsigma)}=1-\frac{zp'(z)}{p(z)+n},\quad p(z)\in P_{(m+1)}.$$

Воспользуемся известными фактами:

$$1)\quad p(z)=\frac{1+z^m\omega(z)}{1-z^m\omega(z)},\quad \omega(z)\in\Omega,$$

где Ω — класс регулярных однолистных в $|z|<1$ функций $\omega(z)$, $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$;

$$2)\quad \omega(z)=\frac{q(z)-1}{q(z)+1},\quad q(z)\in P_{(1)}=P. \tag{15}$$

Тогда

$$T(z)=1-\frac{zp'(z)}{p(z)+h}=$$

$$=1-2z\frac{2z^mq'(z)+(q^2-1)mz^{m-1}}{[q+1-z^m(q-1)][(q+1)(1+h)+z^m(q-1)(1-h)]}, \tag{16}$$

или, если учесть, что (см. [1])

$$2zq'(z)=q^2-1+(\rho^2-\rho_0^2)e^{i\theta},$$

$$\rho^2-\rho_0^2=\frac{4}{1-r^2}\frac{r^2-|\omega|^2}{|1-\omega|^2},\quad \omega\in\Omega,$$

$$(q+1)^2=\frac{4}{(1-\omega)^2},\quad \rho_0^2=|q-a|^2,\quad a=\frac{1+r^2}{1-r^2},$$

$$\rho=\frac{2r}{1-r^2},$$

то в силу [1]

$$\min_{q\in P}\min_{|z|=r<1}\operatorname{Re}T=\min_{\omega\in\Omega_2}\min_{\theta\in[0;\,2\pi]}\operatorname{Re}\Big[1-$$

$$-\frac{2z^m(m+1)\omega}{[1-z^m\omega][1+h+z^m\omega(1-h)]}-\frac{2z^m(r^2-|\omega|^2)e^{i(\varphi+\theta)}}{(1-r^2)[1-z^m\omega][1+h+z^m\omega(1-h)]}\Big],$$

где Ω_2 — подкласс Ω, соответствующий подклассу $P_2\subset P$, связанный с ним соотношением (15), а функции $q\in P_2$ определяются формулой (5*).

Нетрудно показать, что для любого $h\geqslant 0$ справедливо

$$\min_{\omega\in\Omega_2}\min_{\theta\in[0;\,2\pi]}\operatorname{Re}T\geqslant 1-\frac{2r^m(m+1)|\omega|}{(1-r^m|\omega|)(1+h+r^m|\omega|(1-h))}-$$

$$-\frac{2r^m(r^2-|\omega|^2)}{(1-r^2)(1-r^m|\omega|)(1+h+r^m|\omega|(1-h))},$$

причем неравенство достигается при $z^m\omega=r^m|\omega|$, $z^me^{i(\varphi+\theta)}=r^m$.

Для нахождения $\min\operatorname{Re}T$, равного нулю, достаточно исследовать на минимум функцию

$$\Phi(t)=(1-r^2)[(h-1)r^{2m}t^2-2r^m(m+1+h)t+1+h]-$$

$$-2r^m(r^2-t^2)$$

для $t\in[0;\,r]$. Своего абсолютного минимума на $[0;\,+\infty)$ функция $\Phi(t)$ достигает при $t=t^*$, где

$$t^*=(1-r^2)\frac{m+1+h}{2-(1-h)(1-r^2)r^m}.$$

Если $t^*\leqslant r$, то

$$\min_{t\in[0;\,r]}\Phi(t)=-\frac{(1-r^2)^2(m+1+h)^2r^m}{2-(1-h)(1-r^2)r^m}+(1-r^2)(1+h)-2r^{m+2}, \tag{17}$$

а при $t^* \geqslant r$ имеем

$$\min_{t\in[0;r]} \Phi(t) = (1-r^2)\,[(h-1)\,r^{2m+2} - 2r^{m+1}(m+1+h) + 1 + h]. \tag{18}$$

Из (17) следует, что $r_0 = \frac{1}{\rho_0}$ является корнем уравнения

$$\frac{(1-r^2)(m+1+h)}{2-(1-h)(1-r^2)\,r^m} = \frac{(1-r^2)(1+h) - 2r^{m+2}}{(1-r^2)(m+1+h)\,r^m}. \tag{19}$$

Легко показать, что уравнение (19) имеет на (0; 1) только один корень. Из (18) следует, что $r_0 = \frac{1}{\rho_0}$ является корнем уравнения

$$(h-1)\,r^{2m+2} - 2r^{m+1}(m+1+h) + 1 + h = 0. \tag{20}$$

Для выяснения, в каких случаях r_0 определяются уравнением (19), а в каких — уравнением (20), проводим следующие исследования. Обозначим через r_1 и r_2 соответственно корни уравнений

$$f_1(r) \equiv \frac{(1-r^2)(1+h) - 2r^{m+2}}{(1-r^2)(m+1+h)\,r^m} = r, \tag{21}$$

$$f_2(r) \equiv \frac{(1-r^2)(m+1+h)}{2-(1-h)(1-r^2)\,r^m} = r, \tag{22}$$

или

$$\varphi_1(r) \equiv \frac{1+h}{r^{m+1}} - \frac{2r}{1-r^2} = m+1+h, \tag{21'}$$

$$\varphi_2(r) \equiv \frac{2r}{1-r^2} - (1-h)\,r^{m+1} = m+1+h. \tag{22'}$$

Так как $f_2(r_0) \geqslant r_0$ при $r_1 \leqslant r_2$ и $f_2(r_0) \leqslant r_0$ при $r_1 \geqslant r_2$, то в первом из этих случаев радиус выпуклости класса $\tilde{\sum}_{h,\,m}$ должен определяться уравнением (20). Мы докажем, что это именно так и есть при любом целом $m \geqslant 1$ и любом $h \in [0;\ +\infty)$. Полагаем в (21′) и (22′) $r = e^{-t}$ и обозначим через t_0 корень уравнения $\varphi_1(e^{-t}) = \varphi_2(e^{-t})$, которое можно записать в виде

$$\Psi(t) = \operatorname{sh} t\,[\operatorname{ch}(m+1)\,t + h\operatorname{sh}(m+1)\,t\,] = 1. \tag{23}$$

Очевидно, это уравнение имеет один положительный корень t_0. Обозначим

$$\tilde{y} = \varphi_1(e^{-t_0}) = \operatorname{sh}(m+1)\,t_0 + h\operatorname{ch}(m+1)\,t_0.$$

Тогда при

$$\tilde{y} \leqslant m+1+h \tag{24}$$

имеем $r_1 \leqslant r_2$, а при

$$\tilde{y} \geqslant m+1+h \tag{25}$$

получается $r_1 \geqslant r_2$. Выясним возможность неравенств (24) и (25). Пусть t_1 — корень уравнения

$$\operatorname{sh}(m+1)\,t + h\operatorname{ch}(m+1)\,t = m+1+h. \tag{26}$$

Покажем, что при любом $h \geqslant 0$ будет $t_1 \geqslant t_0$, т. е. $r_1 \leqslant r_2$ и r_0 определяется уравнением (20).

Пусть $0 \leqslant h \leqslant 1$, $\gamma = (m+1)\,t_1$. Из (26) имеем

$$e^{2\gamma}(h+1) - 2(m+1+h)\,e^{\gamma} + h - 1 = 0.$$

Отсюда

$$e^{\gamma}=\frac{m+1+h+\sqrt{M}}{1+h},\quad e^{-\gamma}=\frac{m+1+h-\sqrt{M}}{-1+h},$$

где $M=m^2+2(m+1)(h+1)$. Получаем

$$\Psi(t_1)=\operatorname{sh}t_1[\operatorname{ch}(m+1)t_1+h\operatorname{sh}(m+1)t_1]=\sqrt{M}\frac{\ln N}{1+m}T_m,$$

где

$$N=\frac{m+1+h+\sqrt{M}}{1+h},$$

$$T_m=1+\frac{\ln^3 N}{(1+m)^3\cdot 3!}+\frac{\ln^5 N}{(1+m)^5\cdot 5!}+\ldots,$$

$T_m>1$, $\lim\limits_{m\to\infty}T_m=1$ и убеждаемся, что $\Psi(t_1)>1$ для $0\leqslant h\leqslant 1$, $m\geqslant 1$, так как при $0\leqslant h\leqslant 1$ имеем $N\geqslant 3$. Тогда из (23) следует, что $t_1\geqslant t_0$.

Пусть $h\geqslant 1$. Вводим обозначение $\frac{1}{1+h}=\tau^2$. Тогда

$$\Psi(t_1)=\sqrt{M}\frac{\ln N}{1+m}T_m=\frac{1}{1+m}\frac{\sqrt{m^2\tau^2+2(m+1)}}{\tau}\ln\left[1+m\tau^2+\right.$$

$$\left.+\tau\sqrt{m^2\tau^2+2(m+1)}\right]T_m\geqslant\frac{1}{1+m}\frac{\sqrt{m^2\tau^2+2(m+1)}}{\tau\left[1+\frac{1}{m^2\tau^2+\tau\sqrt{m\tau^2+2(1+m)}}\right]}\geqslant 1$$

для $m\geqslant 1$, что и требовалось доказать.

Оценка достигается функцией

$$F(\zeta)=\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{z^{m+1}+\beta}{z^{m+1}-1}dz,\quad \beta=\frac{1-h}{1+h},\quad |\zeta_0|\geqslant 1.$$

§ 6. Пусть $V_{h,m}$ — класс регулярных однолистных в $|z|<1$ функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, для которых

$$f'(z)=\frac{1+h}{p(z)+h},\quad p(z)\in P_{(m)},\ h\geqslant 0.$$

Теорема 6. *Радиус выпуклости класса $V_{h,m}$ определяется соотношением*

$$r_0=\sqrt[m]{\frac{1+h}{m+h+\sqrt{m^2+1+2mh}}}.\tag{27}$$

Для доказательства заметим, что для данного класса функций

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=1-\frac{zp'(z)}{p(z)+h}=$$

$$=1-\frac{4z^mq'+2(q^2-1)z^{m-1}\quad(m-1)}{[q+1-z^{m-1}(q+1)]\,[(q+1)(1+h)+z^{m-1}(q-1)(1+h)]},$$

где $q\in P$. Сравнивая полученное выражение с (16), замечаем, что они отличаются лишь степенью z. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 5, получаем радиус выпуклости класса $V_{h,m}$, который определяется формулой (27). При $m = 1$ получаем теорему 9 [3].

Оценка достигается функцией

$$f(z) = \int_0^z \frac{1 - \zeta^m}{\beta\zeta^m + 1} d\zeta, \quad \beta = \frac{1 - h}{1 + h}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Macgregor Thomas H. A class of univalent functions Proc. Amer. Math. Soc., 15, № 2, 1964, 311—317.

2. Т. Г. Езрохі. Деякі оцінки в спеціальних класах однолистих регулярних в колі $|z| < 1$ функцій. Доп. АН УРСР, № 8, 1965, 984.

3. Т. Г. Эзрохи. Об одном классе однолистных функций. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 2. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966, 198—205.

4. В. А. Зморович. Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій. Доп. АН. УССР, № 8, 1965, 980—984.

5 Р. И. Демаховская. О границах выпуклости классов S^*_{m+1} и Σ^*_{m+1}. В печати.

Поступила 12 апреля 1967 г.