Выпуск 8 1969

НЕЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. А. Щербина

1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже строится нелокальный гамильтониан взаимодействия H_{int} квантовой электродинамики, которому соответствует сходящийся ряд теории возмущений для матрицы рассеяния S.

Предлагаемая модель не является лоренц-инвариантной. Однако можно построить последовательность $H_{\text{int}}(N)$ нелокальных гамильтонианов так, что соответствующие им ряды для матрицы рассеяния S_N при $N \to \infty$ почленно сходятся к ренормированному ряду для S-матрицы с локальным взаимодействием.

На этом пути удается получить корректное обоснование вычитательного формализма, приводящего к теории перенормировок в квантовой теории поля.

В дальнейшем полезно будет остановиться на структуре формального ряда теории возмущений для матрицы рассеяния S (см. [1, стр. 154]):

$$S = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int T\left\{ \prod_{k=1}^{n} H(x_k)\, d^4x_k \right\}, \tag{1}$$

где $H(x_k)$ — гамильтониан (лагранжиан) взаимодействия $H_{\text{int}}(x_k)$.

Обычно применяемая процедура сглаживания его коэффициентных функций по Паули — Вилларсу, при которой причинная функция

$$f(x) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{ix^2}{4t} - im^2 t\right) \frac{dt}{t^2} \tag{2}$$

(здесь $(f, \varphi) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2} e^{-im^2 t} \int P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-i\frac{x^2}{4t}} \varphi(x)\, dx$, если $\varphi(x)$ из основного пространства) с особенностью на световом конусе $x^2 = 0$ заменяется на

$$\bar{f}(x) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \int_0^{\infty} e^{-i\frac{x^2}{4t}} \left(e^{-im^2 t} - e^{-iM^2 t}\right) \frac{dt}{t^2}, \tag{2'}$$

эквивалентна замене в операторе $H(x)$ полевых операторов $\bar{\psi}$, ψ, $\hat{A}$ на операторы вида

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x) + i\bar{\psi}_M(x), \\ \psi'(x) &= \psi(x) + i\psi_M(x), \\ \hat{A}'(x) &= \hat{A}(x) + i\hat{A}_M(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\bar{\psi}_M$, ψ_M — спинорные операторы поля свободных частиц с массой M, коммутирующие с $\bar{\psi}$, ψ, $\hat{A}_M$ — оператор векторного поля массы M, коммутирующий с $\hat{A}(x)$.

Такая замена нарушает формальную эрмитовость $H(x)$, т. е. унитарность S. Это проявляется, например, в том, что перенормированный заряд (см. [1, стр. 268]) уже в первом приближении по e^2 при $M^2 \to \infty$ становится чисто мнимым.

Медленное убывание функций (2) на бесконечности приводит, как известно, к инфракрасным расходимостям. Применяемое для их устранения обрезание, когда $f(x)$ заменяется на

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_0^\infty \exp\left(-i\frac{x^2}{4t} - im^2t - \varepsilon t\right)\frac{dt}{t^2}, \tag{4}$$

также нарушает унитарность ряда для S.

Неунитарность ряда для S, полученного из (1) после перехода к (3) и обрезания (4), сильно затрудняет проверку условия унитарности для ренормированного ряда, если его строить на такой основе.

Это явилось одной из побудительных причин для построения модели, к описанию которой мы переходим.

2. ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПОЛЯ

В основу построения упомянутой выше последовательности S_N мы положим ограниченные операторные функционалы, лишь в пределе переходящие в обычные операторы полей.

Прежде всего, чтобы избавиться от инфракрасных расходимостей (подробнее об этом будет сказано ниже), достаточно отказаться от фиксирования массы частиц, допуская, что она может принимать значения из некоторого интервала с положительными вероятностями. Это достигается путем замены обычных перестановочных соотношений для операторов поля в импульсном пространстве соотношениями вида

$$[a^*_\mu(k),\ a_\nu(k')]\,\varphi(k^2)\,\varphi(k'^2) = \delta_{\mu\nu}\,\delta(k+k')\,\varphi(k^2),$$

где $\varphi(k^2)$ уже не есть $\delta(k^2 - m^2)$, а некоторая неотрицательная гладкая финитная функция.

Перестановочные функции в x-пространстве видоизменяются следующим образом. Для спинорного поля, полагая

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{\pm ikx}\sum_\nu v^{\pm,\nu}(k)\,a^{\pm}_\nu(k)\,\varphi(k^2)\,d^4k$$

$$\bar{\psi}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{\pm ikx}\sum_\nu \bar{v}^{\pm,\nu}(k)\,a^{*\pm}_\nu(k)\,\varphi(k^2)\,d^4k,$$

где

$$a^{\pm}_\nu(k) = \theta(k^0)\,a_\nu(\pm k),\quad a^{*\pm}_\nu(k) = \theta(k^0)\,a^*_\nu(\pm k)$$

и

$$\sum_{\mu=1}^{2} v^{-,\mu}_\alpha(k)\,\bar{v}^{+,\mu}_\beta(k) = (\hat{k} + \sqrt{k^2})_{\alpha\beta},$$

получим (см. [1, стр. 89])

$$[\psi_\alpha^{(-)}(x), \psi_\beta^{(+)}(y)] = \frac{1}{i}\int_0^\infty \varphi(s^2)\, ds^2\, S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y;\ s^2) = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y).$$

Здесь $S_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y;\ s^2)$ — перестановочная функция спинорного поля с массой s. Нетрудно видеть, что $S^c(x-y)$ допускает аналогичное представление

$$S^c(x-y) = \int_0^\infty \varphi(s^2)\, ds^2\, S^c(x-y;\ s^2).$$

Функция $S^c(x;\ s^2)$ имеет, как известно, следующее интегральное представление:

$$S^c(x;\ x^2) = -\frac{i\hat{\partial}+s}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\exp\left(-i\frac{x^2}{4t} - is^2t\right),$$

$$\hat{\partial} = \sum_{n=0}^{3} \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n},$$

где γ^n — матрицы Дирака. Это дает для $S^c(x)$ представление

$$S^c(x) = -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\,[i\psi_1(t)\hat{\partial} + \psi_2(t)]\exp\left(-i\frac{x^2}{4t}\right).$$

Функции ψ_1, ψ_2 выражаются через $\varphi(s^2)$ так:

$$\psi_1(t) = \int_0^\infty e^{-is^2t}\varphi(s^2)\, ds^2,$$
$$\psi_2(t) = \int_0^\infty e^{-is^2t} s\varphi(s^2)\, ds^2. \tag{5}$$

Таким образом, если φ имеет производные всех порядков и сосредоточена на положительной полуоси, то $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ убывают с ростом t быстрее любой обратной степени t. Они аналитически продолжаются по t в нижнюю полуплоскость и принимают на отрицательной мнимой полуоси вещественные значения, сохраняя ту же скорость убывания на бесконечности.

Аналогичным образом для электромагнитного поля

$$A_n^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int e^{\pm ikx} A_n^{\pm}(k)\varphi_1(k^2)\, d^4k,$$

и

$$[A_m^{(-)}(x),\ A_n^{(+)}(y)] = ig^{mn}\int_0^\infty D^{(-)}(x-y;\ s^2)\varphi_1(s^2)\, ds^2 = ig^{mn} D^{(-)}(x-y),$$

$$D^c(x-y) = \int_0^\infty D^c(x-y;\ s^2)\varphi_1(s^2)\, ds^2 = -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\psi(t)e^{-i\frac{x^2}{4t}},$$

$$\psi(t) = \int_0^\infty \exp[-is^2t]\varphi_1(s^2)\, ds^2. \tag{5'}$$

Однако «размазывание» массы частиц оставляет операторы поля попрежнему неограниченными, а перестановочные функции — сингулярными.

Для сглаживания перестановочных функций полей достаточно усреднить операторы поля следующим образом:

$$\bar{u}(x) = \int u(x^0, \vec{x} - \vec{\xi})\, \chi(\vec{\xi})\, d^3\xi,$$

где $\chi(\vec{\xi})$ — гладкая быстро убывающая функция. Для дальнейших построений мы будем наиболее часто использовать

$$\chi(\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\alpha\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)|\vec{\xi}|^2. \tag{6}$$

При $\alpha \to 0$ $\bar{u}(x) \to u(x)$, т. е. сглаживание снимается. Отметим, что такого типа сглаживание полевых операторов уже рассматривалось в работах некоторых авторов (см., например [2]).

Нетрудно показать, что после указанного пространственного усреднения волновые операторы для частиц с полуцелым спином становятся ограниченными по норме равномерно по x.

Операторы полей с целым спином продолжают оставаться неограниченными ввиду того, что числа заполнения квантовых состояний системы могут принимать любые значения. Однако операторы

$$\bar{u}_N(x) = P_N \bar{u}(x)\, P_N,$$

где P_N — оператор проектирования на подпространство векторов состояний с числом частиц не выше N, уже будут ограничены. Ради простоты записи сохраним для построенных выше ограниченных операторов обозначения соответствующих операторов свободных полей, имея в виду, что они зависят еще от ряда параметров — $\varphi(s^2)$, $\chi(\vec{\xi})$, N, предельный переход по которым дает обычные волновые операторы.

Если $\chi(\vec{\xi})$ в (6) — вещественная четная функция, то для построенных операторов сохраняются обычные соотношения при эрмитовом сопряжении. Поэтому

$$H(x) = e : \bar{\bar{\psi}}(x)\, \hat{A}(x)\, \psi(x):$$

по-прежнему самосопряженный оператор, теперь уже ограниченный.

Перестановочные функции введенных выше операторов спинорного поля будут получаться из обычных путем уже проделанного выше размазывания массы и свертывания с функцией $\varkappa(\vec{\xi}) = \chi * \chi(\vec{\xi}) = \int \chi(\vec{\xi} + \vec{\eta})\, \chi(\vec{\eta})\, d^3\eta$.

Таким образом,

$$S^c(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\, [i\psi_1 \hat{\partial} + \psi_2] \int \exp\left[-i\, \frac{(x - \vec{\xi})^2}{4t}\right] \varkappa(\vec{\xi})\, d^3\xi.$$

Антикоммутатор $[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = \frac{1}{i} S(x - y)$ для случая финитной $\chi(\vec{\xi})$, сосредоточенной в окрестности нуля радиуса l, будет обращаться в нуль вне окрестности радиуса $2l$ светового конуса $(x - y)^2 \geqslant 0$, т. е. будет иметь место квазипричинность.

Несколько иначе обстоит дело для бозонных операторов. Коммутаторы операторов $A_N(x)$ вида $P_N A(x) P_N$ будут сами теперь операторными функциями. Так, например,

$$[P_N A_m^{(-)}(x) P_N,\ P_N A_n^{(+)}(y) P_N] =$$
$$= ig^{mn} D^{(-)}(x-y) P_{N-1} - A_n^{(+)}(y) A_m^{(-)}(x) P_N,$$

где P_N — оператор проектирования на N-частичные состояния.

Это обстоятельство приводит к нарушению условия квазипричинности. Однако средние коммутаторов по векторам состояний с числом частиц менее N будут удовлетворять условию квазипричинности.

Что касается причинных функций $D^c(x) = \theta(x^0) D^{(-)}(x) - \theta(-x^0) \times \times D^{(+)}(x)$, то они имеют интегральное представление того же типа, что и $S^c(x)$.

3. РЯД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ И ЕГО КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Заменим гамильтониан взаимодействия $H(x^0)$ в уравнении Шредингера оператором

$$H_N(t) = H(t;\ \varphi,\ \varphi_1,\ \chi,\ N,\ g) =$$
$$= e\int : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : g(x)\, d^3x = e\int H_N(x) g(x)\, d^3x,$$

где операторы $\bar{\psi}$, $\hat{A}$, ψ — введенные выше сглаженные операторы свободных полей, а $g(x)$ — быстро убывающая на бесконечности функция, «выключающая» взаимодействие при больших по модулю t и $\vec{x}$.

Если Φ_1, Φ_2 таковы, что $(\Phi_1,\ H(x)\Phi_2)$ имеет смысл, то $(\Phi_1,\ H_N\Phi_2) \to \to (\Phi_1,\ H\Phi_2)$ при φ_1, φ_2, $\chi \to \delta$-функции, $N \to \infty$ и $g \to 1$. Ясно, что

$$\| H_N(t) \| \leqslant C_N(t),$$

причем $C_N(t)$ быстро убывает при $t \to \pm\infty$.

В силу этого ряд теории возмущений для уравнения

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H_N \Phi$$

сходится по норме, и оператор преобразования

$$S(t,\ t_0) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} T\left\{\prod_{i=1}^{n} H_N(t_i)\, dt_i\right\}$$

при $t \to \infty$, $t_0 \to -\infty$ дает тоже сходящийся по норме операторный ряд, определяющий матрицу рассеяния S_N,

$$S_N = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} T\left\{\prod_{i=1}^{n} H_N(t_i)\, dt_i\right\} =$$
$$= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int S_n(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ N) \prod_{i=1}^{n} g(x_i)\, d^4x_i.$$

Операторные функции $S_n(x,\ N)$ ограничены по норме $\| S_n(x;\ N) \| < (C_N)^n$, что и обеспечивает сходимость ряда для S_N.

Зависимость сглаженного гамильтониана $H_N(x)$ от N, обеспечивающая сходимость ряда для S_N по норме, может быть снята. Ряд (1) и в этом случае будет определять унитарный оператор.

Действительно, пусть Φ_k — вектор состояния для произвольной системы, содержащей не более k фотонов, т. е. $\Phi_k = P_k\Phi_k$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{n} H(x_i)\,\Phi_k = P_{n+k}H(x_1)\,P_{n+k-1}H(x_2)\,P_{n+k-2}\ \ldots\ P_{k+1}H(x_n)\,P_k\Phi_k,$$

и следовательно,

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} H(x_i)\,\Phi_k \right\| \leqslant \sqrt{\frac{(n+k)!}{k!}}\, c^n \|\Phi_k\|,$$

так как $\| P_m A P_m \| < c\sqrt{m}$.

Отсюда вытекает, что степенной ряд

$$S\Phi_k = \Phi_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} T\left\{ \prod_{i=1}^{n} H\ \ t_i) \right\} dt\Phi_k \tag{7}$$

сходится, и что $S_N\Phi_k$ сильно сходится к $S\Phi_k$

Но множество всех векторов Φ_k плотно в пространстве векторов состояний, так же, как и $S_N\Phi_k$, поскольку S_N — унитарный оператор. Таким образом, $\| S\Phi_k \| = \| \Phi_k \|$ и $S\Phi_k$ плотно в пространстве векторов состояний. Следовательно, замыкание оператора S есть унитарный оператор, который над каждым Φ_k определяется сходящимся рядом (7).

В частности, ряды для матричных элементов S между состояниями с фиксированным числом частиц $(\Phi_l,\ S\Phi_k)$, определяющие функции Грина теории поля, для сглаженного оператора $H(t)$ всегда сходятся.

Переход от хронологических произведений к нормальным (теорема Вика) дает коэффициентные функции, имеющие в каждом порядке по e вид

$$\prod_{l=1}^{L} f(x_{i_l} - x_{k_l}),$$

где $f(x)$ — сглаженные причинные функции $S^c(x)$ и $D^c(x)$. Каждая из $S^c(x)$ представляет собой матрицу четвертого порядка, однако при обсуждении всех вопросов о сходимости их произведений мы будем рассматривать эти произведения как прямые по матричным индексам.

Для случая $\chi(\vec{\xi})$ вида (6) $S^c(x)$, $D^c(x)$ имеют, как нетрудно видеть, следующие интегральные представления:

$$S^c(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-i\alpha)^3}} \left[\frac{1}{2}\psi_1(t) \left(\frac{\hat{x}}{t} \right) + \psi_2(t) \right] \exp\left[-\frac{i}{4} \left(\frac{x^2}{t} \right) \right],$$

$$D^c(x) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-i\alpha)^3}}\, \psi_3(t) \exp\left[-\frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{t} \right) \right],$$

где

$$\left(\frac{\hat{x}}{t} \right) = \frac{x^0\gamma^0}{t} - \frac{\vec{x}\vec{\gamma}}{t-i\alpha}, \qquad \left(\frac{x^2}{t} \right) = \frac{x^{0^2}}{t} - \frac{\vec{x}^2}{t-i\alpha}.$$

В обоих случаях выбирается та ветвь корня под интегралом, которая имеет положительный предел при $\alpha \to 0$.

Итак, $S_n(x)$ выражается в виде суммы нормальных произведений с коэффициентными функциями, которые в свою очередь распадаются на суммы произведений вида

$$\Pi(x) = C \int_0^{\infty} \prod_{l=1}^{L} \frac{\psi_l(t_l)\,dt_l}{\sqrt{t_l(t_l-i\alpha)^3}}\, P_l \left[\left(\frac{x_{il} - x_{k_l}}{t_l} \right) \right] \exp\left[-\frac{i}{4} \left(\frac{(x_{il} - x_{k_l})^2}{t_l} \right) \right]. \tag{8}$$

где C — некоторые постоянные матричные коэффициенты, $\psi_l(t)$ — одна из функций ψ_1, ψ_2, ψ, а P_l — полиномы первой или нулевой степени от компонент вектора $\left(\frac{x}{t}\right)=\left(\frac{x^0}{t}, \frac{\vec{x}}{t-i\alpha}\right)$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(\varphi;\ t)=\prod_{l=1}^{L}\frac{\psi_l(t_l)}{\sqrt{t_l(t_l-i\alpha)^3}}\int\prod_{k=1}^{L}P_k\left[\left(\frac{x_{i_k}-x_{\ k}}{t_k}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{i}{4}\left(\frac{(x_{i_k}-x_{j_k})^2}{t_k}\right)\right]\varphi(x)\,dx \tag{9}$$

как функцию параметра $t\,(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_L)$ в области $t_k>0$.

Покажем, что $\Phi(\varphi;\ t)$ абсолютно интегрируем по $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_L$ в области $t_k>0$, т. е. $\int\limits_0^\infty\Phi(\varphi;\ t)\,dt$ определяет линейный непрерывный функционал над пространством Шварца.

Для доказательства абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty\Phi(\varphi;\ t)\,dt$ ввиду быстрого стремления $\psi_l(t)\to 0$ при $t\to\infty$ достаточно доказать абсолютную сходимость интеграла $\int\limits_0^1\Phi(\varphi;\ t)\,dt$ для любого $\Phi(\varphi;\ t)$ вида (9) при всех $L=1,\ 2,\ \ldots$.

В свою очередь сходимость этого интеграла будет обеспечена, если функционал

$$\Phi_0(\varphi;\ t)=\prod_{l=1}^{L}\frac{1}{t_l^{\frac{\lambda_l}{2}}}\int\prod_{k=1}^{L}\left(x^0_{i_k}-x^0_{j_k}\right)^{\frac{k_l-1}{2}}\exp\left[-i\,\frac{\left(x^0_{i_k}-x^0_{j_k}\right)^2}{4t_k}\right]\varphi(x^0)\,dx^0, \tag{10}$$

$$\lambda_l=1,\ 3;\ x^0=\{x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\},$$

абсолютно интегрируем в области $0\leqslant t_l\leqslant 1$. $\Phi_0(\varphi;\ t)$ получается из (9) после интегрирования по пространственным составляющим x_l. При этом $\varphi(x^0)$ уже зависит от t как от параметра. Однако ввиду того, что все ее нормы равномерно ограничены по t в интервале $(0,1)$, это обстоятельство для вопроса об интегрируемости $\Phi_0(\varphi;\ t)$ несущественно. Если в (10) сделать замену $x_k^0-x_1^0=u_k$ $(u_1\equiv 0)$ и выполнить интегрирование по x_1^0, то, переходя в интеграле по u_k к преобразованиям Фурье (равенство Парсеваля), для $\Phi_0(\varphi;\ t)$ можно получить представление

$$\Phi_0(\varphi;\ t)=C\prod_{l=1}^{L}t_l^{-\frac{\lambda_l}{2}}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Det}A}}\int P\left(\frac{\partial}{\partial p^0}\right)\exp\left[iA^{-1}(p^0,\ t)\right]\tilde{\varphi}_1(p^0)\,dp^0=$$

$$=\sum_{(m)}S_m(t)\int\Pi_m(p^0)\exp\left[iA^{-1}(p^0;\ t)\right]\tilde{\varphi}_1(p^0)\,dp^0. \tag{11}$$

Здесь $A^{-1}(p^0;\ t)$ есть квадратичная форма, обратная к $A(u,\ t)=$ $=\sum\limits_{l=1}^{L}\frac{\left(u_{i_l}-u_{j_l}\right)^2}{t_l}$, $P\left(\frac{\partial}{\partial p^0}\right)$ — однородный дифференциальный полином степени $s=\sum_{l=1}^{L}\frac{\lambda_l-1}{2}$. Нетрудно видеть, что функции $S_m(t)$ однородны, и их степень однородности ρ_m удовлетворяет неравенству

$$\rho_m \geqslant \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\frac{\lambda_l-1}{2}-\sum_{l=1}^{L}\frac{\lambda_l}{2}+\frac{n-1}{2}=-\sum_{l=1}^{L}\frac{\lambda_l+1}{4}+ \\ +\frac{n-1}{2}\geqslant -L+\frac{1}{2}. \tag{12}$$

Что касается $\Pi_m(p^0)$, то их можно выбрать линейно независимыми. Дальнейшие наши построения будут существенно опираться на следующую лемму.

Лемма. *Для каждой из функций $S_m(t_1, \ldots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \ldots, t_L)$ $(k=1, 2, \ldots, L)$, $(0\leqslant t_l\leqslant 1)$ в (11) имеет место неравенство*

$$|S_m(t_1, \ldots, t_{k-1}, 1, t_{k+1}, \ldots, t_L)|<\sum_{(j)}|S'_j(t_1, \ldots, t_{k-1}, \\ t_{k+1}, \ldots, t_L)|\, b_j^m,$$

где S'_j имеют для произведения (8) с вычеркнутым k-тым сомножителем тот же смысл, что и S_m для исходного, а b_j^m — некоторые константы.

Доказательство. Обозначим через

$$C_m(\varphi)=\int\Pi_m(p^0)\exp[iA^{-1}(p^0;\ t)]\,\tilde{\varphi}_1(p^0)\,dp^0$$

$$C'_m(\psi)=\int\Pi'_m(p^0)\exp[i(A')^{-1}(p^0;\ t)]\,\tilde{\psi}(p^0)\,dp^0,$$

где $\psi(u^0)=\left(u^0_{i_k}-u^0_{j_k}\right)^{\frac{\lambda_k-1}{2}}\exp\left[-i\frac{\left(u^0_{i_k}-u^0_{j_k}\right)^2}{4}\right]\varphi_1(u^0)$.

Очевидно $\psi(u^0)\in S$ и имеет место равенство

$$\Sigma C_m(\varphi)S_m(t_1, \ldots, t_{k-1}, 1, t_k, \ldots, t_L)=\Sigma C'_m(\psi)S'_m(t_1, \ldots, t_{k-1}, \\ t_{k+1}, \ldots, t_L).$$

Ввиду того, что $\Pi_m(p^0)$ $(m=1, 2, \ldots, N)$ — линейно независимы, существует такой набор функций $\varphi_j\in S$ $(j=1, 2, \ldots, N)$, что

$$\operatorname{Det}\|C_m(\varphi_j)\|_{m,\, j=1}^{N}>\delta>0$$

равномерно по $0\leqslant t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_L\leqslant 1$.

Действительно, ввиду линейной независимости $\Pi_m(p^0)$ существует N точек $p^0_1, p^0_2, \ldots, p^0_N$ в пространстве векторов p^0, для которых определитель $\operatorname{Det}\|\Pi_m(p^0_j)\|_{m,\, j=1}^{N}$ отличен от нуля. Определитель матрицы $\|\exp[iA^{-1}(p^0_j;\ t)]\,\Pi_m(p^0_j)\|$ имеет ту же абсолютную величину.

Последняя матрица получится из $\|C_m(\varphi_j)\|$, если положить $\tilde{\varphi}_i(p^0)=$ $=\delta(p^0-p^0_j)$. Но такие $\tilde{\varphi}_j(p^0)$ не принадлежат S. Возьмем поэтому $\tilde{\varphi}_j(p^0)=\tilde{\varphi}(p^0-p^0_j)$, где $\tilde{\varphi}(p^0)\in S$, финитная в окрестности нуля и $\tilde{\varphi}(p^0)\geqslant 0$, $\int\tilde{\varphi}(p^0)\,dp^0=1$. Тогда

$$C_m(\varphi_j)=\exp[iA^{-1}(p^0_j;\ t)]\,\Pi_m(p^0_j)+O(\Delta p^0),$$

где Δp^0_j принадлежит области финитности функции $\tilde{\varphi}(p^0)$, так как коэффициенты формы $A^{-1}(p^0;\ t)$ равномерно ограничены в рассматриваемой области изменения t. Поэтому, если Δp достаточно малы,

$$|\,\mathrm{Det}\,\|C_m(\varphi_j)\|^N_{m,\ j=1}| > \delta > 0$$

равномерно по t.

Таким образом, $S_m(t_1,\ \ldots,\ t_{k-1},\ 1,\ t_{k+1},\ \ldots,\ t_L)$ могут быть выражены в виде линейных комбинаций $S'_m(t_1,\ \ldots,\ t_{k-1},\ t_{k+1},\ \ldots,\ t_L$ с равномерно ограниченными по $0 \leqslant t_j \leqslant 1$ коэффициентами, что и доказывает наше утверждение.

Из доказанной леммы и неравенства (12) для степени однородности ρ_m функций $S_m(t)$ немедленно вытекает абсолютная интегрируемость функционала $\Phi_0(\varphi;\ t)$, а тем самым и $\Phi(\varphi;\ t)$ в области $0 \leqslant t_j \leqslant 1$. Действительно, разобьем L-мерный куб $0 \leqslant t_j \leqslant 1$ на L пирамид Δ_k: $0 \leqslant t_k \leqslant 1,\ t_j \leqslant t_k$. Тогда

$$\int\limits_{\Delta_k} |S_m(t)\,dt| = \int\limits_0^1 \lambda^{L-1}\,d\lambda \int\limits_0^1 |S_m(\lambda\xi_1,\ \ldots,\ \lambda\xi_{k-1},\ \lambda,\ \lambda\xi_{k+1},\ \ldots,\ \lambda\xi_L)|\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^1 \lambda^{L-1+\rho_m} d\lambda \int\limits_0^1 |S'_m(\xi_1,\ldots,\ \xi_{k-1},\ 1,\ \xi_{k+1},\ \ldots,\ \xi_L)|\,d\xi.$$

Интеграл по λ очевидно сходится, интеграл по ξ допускает оценку через интегралы от $|S'_m(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{k-1},\ \xi_{k+1},\ \ldots,\ \xi_L)|$, к которым в свою очередь применимы аналогичные рассмотрения.

4. КОНТРЧЛЕНЫ И ФОРМУЛИРОВКА ВЫЧИТАТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Построенный выше на основе сглаженных операторов поля ряд (1) для матрицы рассеяния S_N при снятии сглаживания, т. е. $\alpha \to 0$, даст, очевидно, обычный формальный ряд теории возмущений.

Предельному переходу должно, следовательно, предшествовать вычитание расходимостей из коэффициентных функций произведений $T\{\Pi H(x_i)\} = S_k(x)$. К формулировке соответствующей вычитательной процедуры мы и перейдем.

Итак, пусть G есть некоторая диаграмма Феймана (см. [1, стр. 168]), а $\Pi(G)$ — отвечающее ей произведение причинных функций (мы будем его для простоты рассматривать как прямое по индексам всех матричных сомножителей), т. е. произведение вида (6). Каждое из них, отвечающее k-вершинной связной диаграмме G, можно рассматривать как функцию переменных $u_i = x_i - x_1$ $(i = 2,\ \ldots,\ k)$.

Рассмотрим преобразование Фурье по $u = (u_2,\ \ldots,\ u_k)$ произведения $\Pi(G)$. Как видно из (6), его можно представить в виде

$$C' \int\limits_0^\infty \prod_{l=1}^L \frac{\psi_l(t_l)\,dt_l}{\sqrt{t_l(t_l - i\alpha)^3}}\, P_l\left[g\left(\frac{\dfrac{\partial}{\partial p_{j_l}} - \dfrac{\partial}{\partial p_{k_l}}}{it_l}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,A}} \times$$
$$\times \exp\{iA^{-1}(p;\ t)\}. \tag{13}$$

Здесь g — метрический тензор Лоренца, $A^{-1}(p;\ t)$ — квадратичная форма, обратная к $A(u,\ t) = \sum\limits_{l=1}^{L}{}' \dfrac{\left(u_{j_l} - u_{k_l}\right)^2}{t_l}$, а $\mathrm{Det}\,A$ — определитель ее матрицы. Соответствующая выкладка стандартна, хотя и довольно громоздка, и мы на ней не останавливаемся.

Ввиду того что $[\mathrm{Det}\,A]^{-1} = \mathrm{Det}\,A^{-1}$, а форма $A^{-1}(p;\ t)$ ограничена при любых конечных $t_l \geqslant 0$ и имеет положительную мнимую часть, то написанный интеграл по t сходится абсолютно.

Разложим (13) в ряд Маклорена по p и рассмотрим обратное преобразование Фурье от его членов до степени n включительно (для $n \geqslant 0$). Здесь

$$n = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l - 4(k-1), \tag{14}$$

$\lambda_l = 2$, когда в (13) P_l — нулевой степени, $\lambda_l = 3$, когда первой, а k — число вершин диаграммы G. Число n есть индекс диаграммы G (см. [1], стр. 220), характеризующий «степень расходимости» произведения $\Pi(G)$. Расходящимися впредь мы будем называть диаграммы с $n \geqslant 0$.

В результате каждой такой диаграмме будет сопоставлен локальный функционал $\Lambda(G)$, содержащий производные от $\delta(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_k - x_1)$ степени не выше n. Функционал $\Lambda(G)$ мы будем рассматривать как результат действия оператора $P(G)$ на произведение $\Pi(G)$

$$\Lambda(G) = P(G)\,\Pi(G).$$

Отметим, что хотя ряд Маклорена для $F\{\Pi(G)\}$ и расходится, $\Lambda(G)$ всегда имеет смысл ввиду быстрого убывания функций $\psi_l(t)$.

Рассмотрим множество «обобщенных вершин» диаграммы G, т. е. совокупностей вершин $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_j})$ из множества $(x_1, \ldots, x_k)$ и внутренних линий G, соединяющих между собой вершины из $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_j})$. Линии из G, лишь одним своим концом принадлежащие вершине $G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j})$, будем называть внешними ее линиями. Таким образом, каждая обобщенная вершина диаграммы G, в свою очередь, есть не что иное, как диаграмма Фейнмана. Отметим, что и сама диаграмма G согласно определению есть обобщенная вершина.

Среди всех расходящихся (т. е. с $n \geqslant 0$) обобщенных вершин G_i из G выделим множество $\{G\}$ сильно связных вершин, для которых соответствующие произведения $\Pi(G_i)$ причинных функций не распадаются после подходящей замены переменных на прямые произведения некоторых групп сомножителей.

Так как в электродинамике из каждой вершины исходят три линии, то сильно связные диаграммы можно определить как такие, которые не распадаются на две несвязные диаграммы после удаления любой из внутренних линий (это определение и дается в [1, стр. 219]).

Совокупность диаграмм $\{G\}$ разобьем на классы по следующему правилу. К первому классу мы отнесем все те $G_i \in \{G\}$, которые не содержат внутри обобщенных вершин из $\{G\}$. В k-й класс включаются все диаграммы, которые содержат внутри диаграммы не выше $(k-1)$-го класса и сами в него не входят.

Наконец, назовем всякую совокупность обобщенных вершин $\{G\}'$ покрывающей для G, если при стягивании всех $G_i \in \{G\}'$ в одну точку и G стягивается в точку (при этом конечно $G \overline{\in} \{G\}'$).

Определим теперь вычитательную процедуру, регуляризующую произведение $\Pi(G)$.

Для этого рассмотрим произведение $\tilde{\Pi}_{(i)}[1 - P(G_i)]$ биномов $[1 - P(G_i)]$, где G_i пробегает все $\{G\}$, построенное по следующим правилам: 1) сомножители расположены в нем в порядке возрастания номеров классов соответствующих вершин справа налево (внутри каждого из классов порядок произволен); 2) произведение $\tilde{\Pi}[1 - P(G_i)]$ понимается как сумма произведений операторов $P(G_i)$, которая получается после почленного перемножения всех биномов с сохранением следования сомножителей вычеркивания слагаемых, которые содержат хотя бы одну покрывающую совокупность вершин G_i для какой-нибудь из обобщенных вершин диаграммы G.

Применим произведение $\tilde{\Pi}[1-P(G_i)]$ к $\Pi(G)$. Получится обобщенная функция $\tilde{\Pi}[1-P(G_i)]\Pi(G)$, полностью определяемая способом раскрытия произведения $\tilde{\Pi}[1-P(G_i)]$ и операторами $P(G)$. Это будет сумма вида

$$\Pi[G]+\Sigma\pm\Pi P(G_i)\Pi(G). \tag{15}$$

В произведениях операторов $P(G_i)$, стоящих под знаком суммы, наборы вершин G_i обладают двумя свойствами:

1) обобщенные вершины одного класса не перекрываются;

2) обобщенные вершины разных классов если и перекрываются, то так, что вершина младшего класса целиком входит в соответствующую вершину старшего.

Это позволяет рассматривать функционалы $\Pi P(G_i)\ \Pi(G)$ как результат последовательного применения операторов $P(G_i)$ к соответствующим группам сомножителей в произведении $\Pi(G)$. То, что некоторым из $P(G_i)$ могут предшествовать операторы, действующие внутри той же группы сомножителей, не вызывает осложнений.

Под знаком суммы в (15) собраны контрчлены, регуляризующие произведение $\Pi(G)$ причинных функций при снятии усреднения со всех его сомножителей, т. е. $\alpha\to 0$.

Остановимся несколько подробнее на структуре этих контрчленов. Каждое из слагаемых суммы в (15) получается из произведения $\Pi(G)$ после замены некоторых групп сомножителей, отвечающих определенным обобщенным вершинам диаграммы G, локальными функционалами. С каждым таким произведением можно связать редуцированную диаграмму Фейнмана, получающуюся из G в результате стягивания соответствующих обобщенных вершин в одну точку.

Нетрудно видеть, что все слагаемые в сумме, отвечающие одной и той же редуцированной диаграмме G^r, могут быть сгруппированы в выражение вида

$$\pm\prod_{G_k\sim G^r}P(G_k)\tilde{\prod_{G_i\in\{G_k\}/G_k}}[1-P(G_i)]\Pi(G).$$

Здесь $\{G_k\}/G_k$ — совокупность всех расходящихся сильно связных обобщенных вершин, лежащих строго внутри G_k (т. е. $G_k\,\overline{\in}\,\{G_k\}/G_k$).

Чтобы описать результат предельного перехода в $\tilde{\Pi}[1-P(G_i)]\Pi(G)$ при снятии усреднения ($\alpha\to 0$), введем в рассмотрение T-операцию, определяемую при $\alpha=0$ для всякого $\Pi(G)$ равенством

$$T(G)\Pi(G)=\int_0^1\frac{(1-\tau)^n}{n!}d\tau\frac{\partial^{n+1}}{\partial\tau^{n+1}}\frac{1}{\tau^{4(k-1)}}\int_0^\infty\prod_{l=1}^{L}\frac{dt_l}{t_l^2}\times$$
$$\times P_l\left(\frac{x_{j_l}-x_{k_l}}{\tau t_l};\ t_l\right)\exp\left[-\frac{i(x_{j_l}-x_{k_l})^2}{4\tau^2 t_l}\right],$$

где k — число вершин в G, а n определяется равенством (14). Написанный интеграл имеет чисто формальный смысл, если среди обобщенных вершин диаграммы G (не совпадающих с ней) имеются расходящиеся.

Рассмотрим теперь выражение

$$\prod_{G_j\in\{G\}} T(G_j)\,\Pi(G) = \int\limits_0^1 \frac{(1-\tau_j)^{n_j}}{n_j!}\,d\tau_j\,\frac{\partial^{n_j+1}}{\partial\tau_j^{n_j+1}}\,\frac{1}{\tau_j^{4(k_j-1)}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \prod_{l=1}^{L}\frac{dt_l}{t_l^2}\,P_l\left(\frac{x_{jl}-x_{k_l}}{\pi_l(\tau)\,t_l};\ t_l\right)\exp\left[-i\,\frac{(x_{jl}-x_{k_l})^2}{4\pi_l^2(\tau)\,t_l}\right].$$

В стоящем слева произведении все $T(G_j)$ действуют независимо на свои группы сомножителей, так что $\pi_l(\tau)$ справа представляет собой произведения τ_j из тех $T(G_j)$, которые затрагивают l-й сомножитель.

Для коэффициентных функций ряда S-матрицы, построенного на базе сглаженного гамильтониана $H(x)$, справедлива следующая регуляризационная

Теорема. *Последовательность линейных непрерывных функционалов* $\tilde{\Pi}[1-P(G_j)]\,\Pi(G)$, *отвечающих любой диаграмме* G (*кроме вакуумных*), *сходится при* $\alpha\to 0$ *к линейному непрерывному функционалу* $\Pi\,T(G_j)\,\Pi(G)$.

Отметим, что параметрический интеграл, отвечающий преобразованию Фурье $F\{\Pi\,T(G_j)\,\Pi(G)\}$, сходится по t и τ абсолютно.

Доказательство приведенной теоремы для случая ковариантных сглаживаний сомножителей $f(x)$ в $\Pi(G)$ опубликовано в работе [3].

Решение задачи о регуляризации произведений $\Pi(G)$, данное выше, в основных чертах совпадает с вычитательной процедурой, получившей название R-операции Н. Н. Боголюбова (см. [4], [5]), так что сама теорема дает по сути полное обоснование R-операции.

Отметим, что построенный выше сглаженный гамильтониан $H(x)$ не решает еще поставленной выше задачи, так как в ряду для S-матрицы нужно производить вычитания, чтобы в пределе $\alpha\to 0$ получить ренормированный ряд.

Нужный гамильтониан будет построен в следующей работе на базе $H(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, М., 1957.
2. Б. М. Степанов. а) Нерелятивистская регуляризация S-матрицы. ДАН, 108, № 6, (1956). б) Структура нерелятивистских контр-членов. ДАН, 133, № 3 (1960).
3. В. А. Щербина. О вычитательном формализме в квантовой теории поля. 38—64. Каталог депонированных работ. Изд-во ВИНИТИ, 1965.
4. Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк. а) О вычитательном формализме при умножении причинных сингулярных функций. ДАН, 100, № 3 (1955). б) О вычитательном формализме при умножении причинных функций. Изв. АН СССР, сер. матем., 20, № 5 (1956).
5. О. С. Парасюк. К теории R-операции Боголюбова. УМЖ, XII, № 3 (1960).

Поступила 14 декабря 1967 г.