Выпуск 8 1969

О СВЯЗИ МЕЖДУ СЛАБОЙ РАВНОМЕРНОЙ ВЫПУКЛОСТЬЮ И РЕФЛЕКСИВНОСТЬЮ

Станимир Троянски

Пусть X — пространство Банаха. Через X^* и X^{**} обозначим первое и второе сопряженные пространства. Через $x, y, z \ldots, x^*, y^*, z^* \ldots, x^{**}, y^{**}, z^{**} \ldots$ будем обозначать соответственно элементы пространств X, X^*, X^{**}. Единичные сферы пространств X, X^*, X^{**} обозначим соответственно через S, S^*, S^{**}. Значение линейного функционала x^* в точке x будем записывать в симметричной форме (x^*, x). Через Γ обозначим оператор (градиент нормы), сопоставляющий каждому элементу $x \in S$ элемент $x^* \in S^*$ такой, что $(x^*, x) = 1$.

Модули выпуклости и гладкости определяются следующим образом

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf_{\substack{x,\, y \in S \\ \|x-y\|=\varepsilon}} \left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right),$$

$$\rho_X(\tau) = \sup_{x,\, y \in S} \left(\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{2} - 1\right).$$

Пространство X называется равномерно выпуклым, если $\delta_X(\varepsilon) > 0$, как только $\varepsilon > 0$.

Пространство называется равномерно гладким, если

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0.$$

Линденштраус [5] показал, что между модулями гладкости и выпуклости пространств X и X^* существует следующая связь:

$$\rho_X(\tau) = \sup_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2}\left[\frac{\varepsilon\tau}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon)\right], \tag{1}$$

$$\rho_{X^*}(\tau) = \sup_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2}\left[\frac{\varepsilon\tau}{2} - \delta_X(\varepsilon)\right]. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что если X равномерно выпукло, то X^* равномерно гладко, и если X равномерно гладко, то X^* равномерно выпукло. Эти результаты были ранее получены Дэйем [3].

Д. П. Мильман [7] доказал, что любое равномерно выпуклое пространство рефлексивно.

В настоящей заметке рассмотрим некоторый более широкий, чем равномерно выпуклые, но близкий к ним класс пространств и будем выяснять, при каких дополнительных требованиях эти пространства являются рефлексивными.

Введем локальные в некотором смысле модули выпуклости и гладкости

$$\delta_X(y^*, \varepsilon) = \inf_{\substack{x,\, y \in S \\ |(y^*,\, x-y)|=\varepsilon}} \left(1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\right) \qquad (y^* \in S^*),$$

$$\delta^*_{X^*}(y, \varepsilon) = \inf_{\substack{x^*, y^* \in S^* \\ |(x^*-y^*, y)| = \varepsilon}} \left(1 - \left\|\frac{x^*+y^*}{2}\right\|\right) \qquad (y \in S),$$

$$\rho_X(y, \tau) = \sup_{x \in S} \left(\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{2} - 1\right) \qquad (y \in S).$$

Пространство X называется слабо равномерно выпуклым, если $\delta_X(y^*, \varepsilon) > 0$ для любых $y^* \in S^*$ и $\varepsilon > 0$.

Пространство X^* называется слабо равномерно выпуклым относительно X, если $\delta^*_{X^*}(y; \varepsilon) > 0$ для любых $y \in S$ и $\varepsilon > 0$.

Пространство X называется равномерно гладким в каждом направлении, если

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_X(y, \tau)}{\tau} = 0 \quad (y \in S).$$

Слабо равномерно выпуклые и равномерно гладкие в каждом направлении пространства были введены Шмульяном в [8].

Почти так же как в [5] можно получить аналогичные соотношения, связывающие локальные модули выпуклости и гладкости

$$\rho_X(y, \tau) = \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 2} \left[\frac{\varepsilon\tau}{2} - \delta^*_{X^*}(y, \varepsilon)\right], \tag{3}$$

$$\rho_{X^*}(y^*, \tau) = \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 2} \left[\frac{\varepsilon\tau}{2} - \delta_X(y^*, \varepsilon)\right]. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекают следующие предложения.

Предложение 1. *Пространство X равномерно гладко в каждом направлении тогда и только тогда, когда X^* слабо равномерно выпукло относительно X.*

Предложение 2. *Пространство X слабо равномерно выпукло тогда и только тогда, когда X^* равномерно гладко в каждом направлении.*

Другим путем предложения 1 и 2 были получены Шмульяном в [8].

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. (Диксмье [4]). *Если четвертое сопряженное пространство банахова пространства X строго нормировано (т. е. его единичная сфера не содержит прямолинейных отрезков), то X рефлексивно.*

Теорема 1. *Если X^{**} слабо равномерно выпукло, то X рефлексивно.*

Доказательство. В силу предложений 1 и 2 четвертое сопряженное пространство X слабо равномерно выпукло относительно третьего сопряженного. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что если банахово пространство Y^* слабо равномерно выпукло относительно Y, то Y^* строго нормировано. Пусть для некоторых $x^*, y^* \in Y^*$ ($\|x^*\| = \|y^*\| = 1$) имеем

$$\|x^* + y^*\| = \|x^*\| + \|y^*\|.$$

Так как Y^* слабо равномерно выпукло относительно Y, то для любого $x \in Y$ и $\varepsilon > 0$ имеем

$$|(x^* - y^*, x)| < \varepsilon.$$

Значит $(x^* - y^*, x) = 0$ для любого $x \in Y$. Отсюда $x^* = y^*$.

Теорема 1 доказана.

Лемма 2 (Бишоп, Фелпс [1]). *Множество нормированных линейных функционалов, определенных в банаховом пространстве X и достигающих своей верхней грани на его единичной сфере S, всюду плотно по норме в единичной сфере S^* сопряженного пространства.*

Предложение 3. *Если пространство X слабо равномерно выпукло, то оно всюду плотно в X^{**} относительно слабой секвенциальной сходимости линейных функционалов, определенных в X^*.*

Доказательство. Сначала установим неравенство

$$\|z+\tau y\| \leqslant 1+\tau(\Gamma z, y)+2\rho_X(y, \tau). \tag{5}$$

Из определения $\rho_X(y, \tau)$ следует, что

$$2\rho_X(y, \tau) \geqslant \|z+\tau y\|+\|z-\tau y\|-2. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$\|z-\tau y\| \geqslant (\Gamma z, z-\tau y)=(\Gamma z, z)-\tau(\Gamma z, y)=1-\tau(\Gamma z, y). \tag{7}$$

Из (6) и (7) немедленно вытекает (5). Пусть $x^{**} \in S^{**}$. Так как

$$\|x^{**}\|=\sup_{x^* \in S^*}|(x^{**}, x^*)|,$$

то существует последовательность $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ такая, что

$$(x^{**}, x_n^*)>1-\frac{1}{2n}.$$

По лемме 2 найдется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\|\Gamma x_n-x_n^*\|<\frac{1}{2n}.$$

Тогда

$$(x^{**}, \Gamma x_n)=(x^{**}, x_n^*)+(x^{**}, \Gamma x_n-x_n^*)>1-\frac{1}{n}.$$

В [5] положим $z=\Gamma x_n$, а $y=y^*$. Замечая, что $\Gamma(\Gamma x_n)=x_n$, получим

$$\|\Gamma x_n+\tau y^*\| \leqslant 1+\tau(x_n, y^*)+2\rho_{X^*}(y^*, \tau)$$

Так как

$$(x^{**}, \Gamma x_n+\tau y^*) \leqslant \|\Gamma x_n+\tau y^*\|,$$

то

$$(x^{**}, \Gamma x_n)+\tau(x^{**}, y^*) \leqslant 1+\tau(x_n, y^*)+2\rho_{X^*}(y^*, \tau).$$

Отсюда

$$(x^{**}-x_n, y^*) \leqslant \frac{1-(x^{**}, \Gamma x_n)}{\tau}+\frac{2\rho_{X^*}(y^*, \tau)}{\tau}.$$

Зададим $\varepsilon>0$. В силу предложения 2 X^* равномерно гладко в каждом направлении. Тогда существует τ_0 такое, что

$$\rho_{X^*}(y^*, \tau_0)<\frac{\varepsilon\tau_0}{4}.$$

Выберем N так, чтобы

$$N>\frac{2}{\tau_0\varepsilon}.$$

Тогда при $n>N$

$$(x^{**}-x_n, y^*)<\varepsilon.$$

Так как

$$\rho_{X^*}(y^*, \tau)=\rho_{X^*}(-y^*, \tau),$$

т. е., заменяя y^* на $-y^*$, получим

$$-(x^{**}-x_n, y^*)<\varepsilon.$$

Отсюда

$$|(x^{**}-x_n, y^*)|<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если X слабо равномерно выпукло, то*

$$\operatorname{card} X=\operatorname{card} X^{**}\text{[1]}.$$

Доказательство. Каждому элементу $x^{**}\in X^{**}$ в силу предложения 3 можно сопоставить счетный набор элементов из X. Так как

$$\operatorname{card} X^{**}\geqslant \operatorname{card} X\geqslant 0,$$

то мощности множеств X и X^{**} совпадают.

Следствие 2. *Пространства $c_0(\Lambda)$ и $m(\Lambda)$ при несчетном Λ не изоморфны слабо равномерно выпуклому пространству.*

Доказательство. Так как $\operatorname{card} c_0(\Lambda)<\operatorname{card} m(\Lambda)$ при несчетном Λ, а $m(\Lambda)=c_0^{**}(\Lambda)$, то из следствия 1 следует, что $c_0(\Lambda)$ не изоморфно слабо равномерно выпуклому пространству. Так как $m(\Lambda)$ содержит $c_0(\Lambda)$ в качестве подпространства, то и $m(\Lambda)$ не изоморфно слабо равномерно выпуклому пространству.

Теорема 2. *Если слабо секвенциально полное пространство изоморфно слабо равномерно выпуклому пространству, то оно рефлексивно.*

Доказательство. Пусть X — слабо секвенциально полное пространство и $\|\cdot\|_1$ новая эквивалентная норма, относительно которой пространство X слабо равномерно выпукло. Так как при изоморфизме слабая секвенциальная полнота сохраняется, то X с нормой $\|\cdot\|_1$ является также слабо секвенциально полным. Возьмем $x^{**}\in X^{**}$. В силу предложения 3 существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y^*)=(x^{**}, y^*)\quad y^*\in X^*.$$

В силу слабой секвенциальной полноты $x^{**}\in X$, т. е. $X=X^{**}$.

Заметим, что из теоремы 2 следует, что пространство $l(\Lambda)$ при бесконечном Λ, пространство суммируемых на отрезке функции L, пространство функций, имеющих ограниченные вариации на отрезке V, не изоморфны слабо равномерно выпуклому пространству, так как $l(\Lambda)$, L и V суть слабо секвенциально полные не рефлексивные пространства.

Пространство X называется локально равномерно выпуклым (Ловалья [6]), если из равенств

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n+x\|=2,\quad \|x_n\|=\|x\|=1\ \ (n=1, 2\ldots)$$

следует

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0.$$

Говорят, что нормированное пространство обладает свойством (H), если в нем из условий

$$x_n\xrightarrow{\text{сл}}x\ \text{и}\ \|x_n\|\to\|x\|$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0.$$

[1] Через card X обозначаем мощность множества X.

Как заметил Выборный [9], локально равномерно выпуклые пространства обладают свойством (H). Оказывается, что если слабо равномерно выпуклое пространство обладает свойством (H), то оно локально равномерно выпуклое. В самом деле, пусть

$$\| x_n \| = \| x \| = 1 \text{ и } \lim_{n \to \infty} \| x_n + x \| = 2.$$

Так как пространство слабо равномерно выпукло, то для каждого $\varepsilon > 0$ и $x^* \in X^*$ можно найти такое $N = N(\varepsilon, x)$, что при $n > N$

$$|(x - x_n, x^*)| < \varepsilon.$$

Отсюда в силу (H) следует, что x_n сходится по норме к x.

В заключение автор выражает глубокую благодарность М. И. Кадецу за полезные указания по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Bishop, R. Phelps. A proof that every Banach space is subreflexive. Bull. Amer. Math. Soc. 67, № 1 (1961), 97—98.

2. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. ИЛ, М., 1961.

3. M. M. Day. Uniform convexity in factor and conjugate spaces Ann. Math. (2), 45 (1944), 375—385.

4. J. Dixmier. Sur une thèorème de Banach Duke Math. J. 15 (1948), 1057—1071.

5. J. Lindenstrauss. On the modulus of smoothness, Mich. Math. J. 10, N 23 (1963), 241—252.

6. A. R. Lovaglia. Locally uniformly convex Banach spaces. Trans Amer. Math. Soc. 78 (1955), 225—238.

7. Д. П. Мильман. О некоторых признаках регулярности пространств типа (B). ДАН СССР, 20 (1938), 243—246.

8. В. Л. Шмульян. О дифференцируемости нормы в пространстве Банаха. ДАН СССР, 27 (1940), 643—648.

9. R. Vyborný. O Slabè konvergencí v prostorech lokálně stejnoměrně konvexních, Časop. pěst. mat. 81 (1956), 352—353.

Поступила 7 декабря 1967 г.