Выпуск 8 1969

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ОБОБЩЕНИЮ РАВЕНСТВА ПАРСЕВАЛЯ НА ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

Буй-Мин-Чи и *В. И. Гурарий*

В настоящее время известно несколько различных характеристик выпуклости и гладкости единичной сферы нормированного пространства — модулей выпуклости и гладкости.

В данной работе устанавливаются некоторые свойства этих величин, в частности, некоторые оценки для них и связи между ними. Основным приемом получения таких оценок является рассмотрение выпуклых центрально-симметричных кривых — единичных окружностей плоскости Минковского. При этом вводятся в рассмотрение новые определения модулей выпуклости и гладкости, в терминах которых получается обобщение равенства Парсеваля — Стеклова на ортогональные базисы в банаховом пространстве. В частности, получаются оценки для коэффициентов разложения функций по ортогональному базису в L_p.

§ 1. РАЗЛИЧНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЕЙ ВЫПУКЛОСТИ И ГЛАДКОСТИ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Определение 1. *Модулем выпуклости и соответственно модулем гладкости (см., например, [1]) банахова пространства E называются функции*

$$\delta(\omega) = \inf_{\|x\|=\|y\|=1} \left(1 - \frac{1}{2}\|x+y\|\right)$$

$$\|x-y\| = \omega \quad (0 \leqslant \omega \leqslant 2)$$

и соответственно

$$\rho(\omega) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=\omega}} (\|x+y\| + \|x-y\| - 2), \ (\omega \geqslant 0)$$

Определение 1′. *Локальным модулем выпуклости и соответственно локальным модулем гладкости банахова пространства E называются функции*

$$\sigma(x, \omega) = \inf_{\substack{\|y\|=1 \\ \|x-y\|=\omega}} \left(1 - \frac{1}{2}\|x+y\|\right) \quad (0 \leqslant \omega \leqslant 2)$$

и соответственно

$$\rho(x, \omega) = \frac{1}{2} \sup_{\|y\|=\omega} (\|x+y\| + \|x-y\| - 2) \quad (\omega \geqslant 0).$$

Предложение 1. $\delta(x, \omega)$ — *неотрицательная монотонно неубывающая функция от* ω *на интервале* $[0, 2]$

Для доказательства этого предложения нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть даны кривая Минковского Γ и вектор $x=\overline{OA}$, $\|x\|=1$. Обозначим пересечение продолжения AO с кривой Γ через A'. Рассмотрим вектор $y=\overline{OB}$, $\|y\|=1$, где B принадлежит одной из двух частей Γ, на которые ее делит AA'. Обозначим угол между AA' и AB через α.*

Тогда величина $\|\overline{AB}\|=\|y-x\|$ есть монотонно невозрастающая функция от α при $\alpha \geqslant 0$ (см. рис. 1).

Доказательство леммы. Построим кривую Минковского Γ и вектор $x=\overline{OA}$, $\|x\|=1$. Продолжение AO пересекает кривую Γ в точке A'. Возьмем два вектора y_1, y_2; $y_1=\overline{OB}_1$, $y_2=\overline{OB}_2$, так чтобы $\|y_1\|=1$, $\|y_2\|=1$, причем $\alpha_1<\alpha_2$, где α_1 — угол между AA' и AB_1, α_2 — угол между AA' и AB_2. Из O проводим радиусы-векторы $\overline{OM}\|\overline{AB}_1$ и $\overline{ON}\|\overline{AB}_2$.

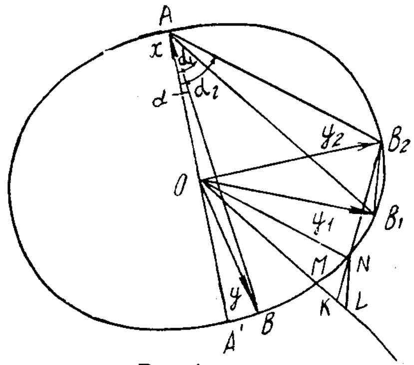

Рис. 1.

По определению нормы

$$\|y_1-x\|=\|\overline{AB}_1\|=\frac{|\overline{AB}_1|}{|\overline{OM}|},$$

$$\|y_2-x\|=\|\overline{AB}_2\|=\frac{|\overline{AB}_2|}{|\overline{ON}|}.$$

Соединим B_1 с B_2 и B_2 с N.

Из выпуклости кривой Γ видно, что B_2N пересекает OM в точке, лежащей вне фигуры, ограниченной кривой Γ. Обозначим эту точку через K. Из точки N проводим луч, параллельный отрезку B_2B_1. Из выпуклости кривой видно, что этот луч пересекает продолжение OM в точке, лежащей дальше точки K относительно центра O. Обозначим ее через L. Мы имеем $|\overline{OL}|\geqslant|\overline{OM}|$, следовательно,

$$\|y_1-x\|=\|\overline{AB}_1\|=\frac{|\overline{AB}_1|}{|\overline{OM}|}\geqslant\frac{|\overline{AB}_1|}{|\overline{OL}|}. \tag{1.1}$$

С другой стороны, из подобия треугольников AB_1B_2, OLN имеем

$$\frac{|\overline{AB}_1|}{|\overline{OL}|}=\frac{|\overline{AB}_2|}{|\overline{ON}|}=\|\overline{AB}_2\|=\|y_2-x\|. \tag{1.2}$$

Из неравенств (1.1) и (1.2) следует

$$\|y_1-x\|\geqslant\|y_2-x\|.$$

Лемма доказана.

Доказательство предложения 1. Очевидно, достаточно провести доказательство для случая $\dim E=2$, т.е. для плоскости Минковского.

Пусть дана кривая Минковского Γ и задан вектор $x=\overline{OA}$, $\|x\|=1$, где O — центр кривой Γ. Обозначим пересечение продолжения OA с кривой Γ через A'; AA' делит кривую Γ на две части. Очевидно, достаточно провести рассуждения для одной из этих частей. Возьмем произвольную хорду AB (см. рис. 2). Обозначим середину AB через M. Заметим, что если точка B непрерывно меняет свое положение, пробегая всю кривую Γ, то точка M пробегает такую кривую Γ', которая подобна кривой Γ. Если точка B пробегает дугу AA' кривой Γ от A

до A', то точка M пробегает дугу AO кривой Γ' от A до O. Пусть O' — середина AO.

Обозначим норму отрезка в метрике Минковского, порождаемой кривой Γ' через $\|\cdot\|'$. Соединим центр O с точкой M. Обозначим угол между OA и OM через α. По лемме 1 величина $\|\overline{OM}\|'$ есть монотонно невозрастающая функция от α. Продолжим OM до пересечения с кривой Γ в точке N. Пусть $y=\overline{OB}$ и $\|x-y\|=\omega$. По определению мы имеем

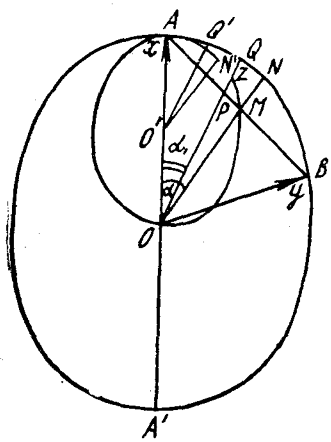

Рис. 2.

$$\delta\ x,\ \omega)=\|\overline{MN}\|=1-\|\overline{OM}\|. \tag{1.3}$$

Возьмем теперь вектор $z\in E$, $\|z\|=1$ так, чтобы угол α_1 между $\overline{OA}$ и z был меньше α. Обозначим $z=\overline{OQ}$, пересечение OQ с Γ' через P. Из O' проведем векторы-радиусы $\overline{O'N'}$ и $\overline{O'Q'}$ так, чтобы $O'N'\|ON$, $O'Q'\|OQ$. По построению кривой Γ' и векторов $\overline{O'N'}$, $\overline{O'Q'}$ имеем

$$\frac{|\overline{ON}|}{|\overline{O'N'}|}=\frac{|\overline{OQ}|}{|\overline{O'Q'}|},\ \text{т. е.}\ |\overline{ON}|=\frac{|\overline{OQ}|}{|\overline{O'Q'}|}\cdot|\overline{O'N'}|.$$

По лемме 1 $\|\overline{OM}\|'\leqslant\|\overline{OP}\|'$

$$\text{или}\quad \frac{|\overline{OM}|}{|\overline{O'N'}|}\leqslant\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{O'Q'}|}.$$

В метрике, порожденной Γ,

$$\|\overline{OM}\|=\frac{|\overline{OM}|}{|\overline{ON}|}=\frac{|\overline{OM}|}{|\overline{O'N'}|}\cdot\frac{|\overline{O'Q'}|}{|\overline{OQ}|}\leqslant\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{O'Q'}|}\cdot\frac{|\overline{O'Q'}|}{|\overline{OQ}|}=\|\overline{OP}\|.$$

Итак, в метрике Γ $\|\overline{OM}\|$ тоже есть монотонно невозрастающая функция от α, но α — монотонно неубывающая функция от ω. Поэтому величина $\|\overline{OM}\|$ — монотонно невозрастающая функция от ω и $\delta(x,\omega)$ — монотонно неубывающая функция от ω при каждом фиксированном x. Предложение 1 доказано. Идея этого доказательства принадлежит М. И. Кадецу.

Замечание 1. В случае равномерной выпуклости пространства E $\delta(x,\omega)$ — строго монотонно возрастающая функция от ω при каждом фиксированном $x\in E$.

Введем теперь новые определения модулей выпуклости и гладкости банахова пространства E.

Определение 2. *Модулем выпуклости банахова пространства E будем называть функцию*

$$\tilde{\beta}(\omega)=\inf_{\substack{\|x\|=\|y\|=1\\ \|x-y\|=\omega}}\ \max_{0\leqslant t\leqslant 1}(1-\|tx+(1-t)y\|)$$

$$(0\leqslant\omega\leqslant 2).$$

Эта величина в несколько ином виде была введена в [2].

Определение 2'. *Локальным модулем выпуклости банахова пространства будем называть функцию*

$$\tilde{\beta}(x,\ \omega)=\inf_{\substack{\|y\|=1\\ \|x-y\|=\omega}}\ \max_{0\leqslant t\leqslant 1}(1-\|tx+(1-t)y\|)$$

$$(0\leqslant\omega\leqslant 2,\ \|x\|=1).$$

Предложение 2. $\tilde{\beta}(x, \omega)$ — *неотрицательная монотонно неубывающая функция от* ω, $0 \leqslant \omega \leqslant 2$.

Доказательство. Достаточно доказать предложение для случая $\dim E = 2$, т. е. для плоскости Минковского.

Мы можем представить $\tilde{\beta}(x, \omega)$ в виде

$$\tilde{\beta}(x, \omega) = \inf_{\substack{\|y\|=1 \\ \|x-y\|=\omega}} \left(1 - \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|tx + (1-t)y\|\right)$$

Сначала докажем, что $\inf\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|tx + (1-t)y\|$ есть невозрастающая функция от ω.

Пусть имеем векторы $x \in E$, $y_1 \in E$, $\|x\| = 1$, $\|y_1\| = 1$. Возьмем вектор y_2, расположенный дальше y_1 относительно x, $\|y_2\| = 1$. Обозначим $x = \overline{OA}$, $y_1 = \overline{OB}$, $y_2 = \overline{OC}$. Соединим точку A с точкой B и A с C. В силу выпуклости кривой Γ, отрезок AC отстоит от центра O не дальше, чем AB, поэтому (см. рис. 3)

$$\inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|tx + (1-t)y_2\| \leqslant \inf_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|tx + (1-t)y_1\|.$$

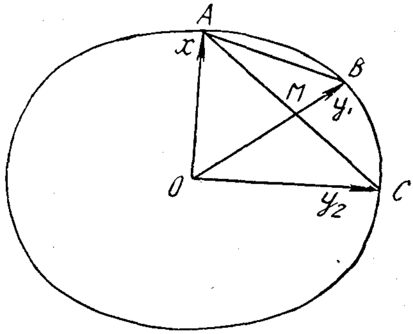

Рис. 3.

Это значит, что $\inf\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|tx + (1-t)y\|$ — невозрастающая функция от ω, и поэтому $\tilde{\beta}(x, \omega)$ — неубывающая функция от ω.

Определение 3. *Модулем выпуклости и соответственно модулем гладкости банахова пространства мы будем называть функции*

$$\varphi(\omega) = \inf_{\substack{\|x\|=1,\ \|y\|=\omega \\ (\widehat{x, y})=1}} (\|x+y\| - 1) \quad (\omega \geqslant 0)$$

и соответственно

$$\mu(\omega) = \sup_{\substack{\|x\|=1,\ \|y\|=\omega \\ (\widehat{x, y})=1}} (\|x+y\| - 1) \quad (\omega \geqslant 0),$$

где $(\widehat{x, y})$ — *наклон** x к y.

Определение 3′. *Локальным модулем выпуклости и соответственно локальным модулем гладкости банахова пространства мы будем называть функции*

$$\varphi(x, \omega) = \inf_{\substack{\|y\|=\omega \\ (\widehat{x, y})=1}} (\|x+y\| - 1), \quad (\omega \geqslant 0, \ \|x\| = 1)$$

---

* Наклоном подпространства P к подпространству Q банахова пространства E называется величина (см. [3]).

$$(\widehat{P, Q}) = \inf_{x \in P,\ \|x\|=1} \rho(x, Q).$$

Если L_x, L_y — одномерные подпространства, порождаемые x и y, то полагаем $(\widehat{x, y}) = (\widehat{L_x, L_y})$.

и соответственно

$$\mu(x, \omega) = \sup_{\substack{\|y\|=\omega \\ \wedge \\ (x, y)=1}} (\|x+y\| - 1), (\omega \geqslant 0, \ \|x\| = 1).$$

Если $\|x\| \neq 1$, *то мы полагаем* $\varphi(x, \omega) = \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}, \omega\right)$, $\mu(x, \omega) = \mu\left(\frac{x}{\|x\|}, \omega\right)$.

Предложение 3. $\varphi(x, \omega)$, $\mu(x, \omega)$ — *неотрицательные монотонно неубывающие функции от* ω.

Доказательство. Пусть имеем вектор x, $\|x\| = 1$. Отождествим x с $\overline{OA}$. Из точки A проводим опорную прямую At к кривой (окружность Γ). На At возьмем вектор $y_1 = AP$. Возьмем еще вектор $y_2 = \overline{OQ}$, так чтобы $\|y_2\| > \|y_1\|$, т. е. чтобы точка P была расположена между A и Q; OP, OQ пересекает окружность Γ в точках B и C соответственно. Соединим A с C. Отрезок AC пересекает OB в точке K. В силу выпуклости кривой Γ точка K не дальше от центра O, чем точка B. Через точку C проводим прямую, параллельную опорной прямой At. Обозначим ее пересечение с OB через L. Очевидно, что точка L отстоит от центра O не дальше, чем точка K, и подавно не дальше, чем точка B.

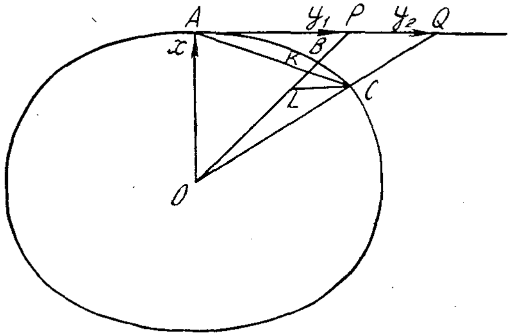

Рис. 4.

Так как $CL \| PQ$, то в треугольнике OPQ мы имеем (см. рис. 4)

$$\frac{|\overline{CQ}|}{|\overline{OC}|} = \frac{|\overline{LP}|}{|\overline{OL}|} \geqslant \frac{|\overline{LP}|}{|\overline{OB}|} \geqslant \frac{|\overline{PB}|}{|\overline{OB}|}.$$

Но по определению $\varphi(x, \omega)$ и $\mu(x, \omega)$ из неравенства

$$\frac{|\overline{GQ}|}{|\overline{OC}|} \geqslant \frac{|\overline{PB}|}{|\overline{OB}|}$$

мы можем заключить, что

$$\varphi(x, \|y_2\|) \geqslant \varphi(x, \|y_1\|),$$
$$\mu(x, \|y_2\|) \geqslant \mu(x, \|y_1\|),$$

что и требовалось доказать.

§ 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ МОДУЛЯМИ ВЫПУКЛОСТИ И ГЛАДКОСТИ

В этом параграфе мы будем сравнивать различные модули выпуклости и гладкости банахова пространства, которые введены в первом параграфе.

Сначала установим связь между $\tilde{\beta}(x, \omega)$ и $\varphi(x, \omega)$. Для этого нам понадобится лемма 1 и следующая лемма.

Лемма 2. *Для любого банахова пространства*

$$\tilde{\beta}(x, \omega) \leqslant \frac{\omega}{2} \ (0 \leqslant \omega \leqslant 2).$$

Доказательство. Рассмотрим кривую Минковского Γ — единичную окружность плоскости Минковского E. Пусть задан вектор $x \in E$, $\|x\| = 1$. Обозначим $x = \overline{OA}$. Построим вектор $y = \overline{OB}$, $\|y\| = 1$ так, чтобы $\|x - y\| = \omega$, и вектор z такой, что он лежит между векторами x и y, причем $\|z\| = 1$. Отождествим z с $\overline{ON}$. Пересечение ON с AB обозначим через M. Пусть AO пересекает Γ в A'. Рассмотрим отношение $\frac{|\overline{MN}|}{|\overline{ON}|}$. Будем непрерывно менять положение вектора z до тех пор, пока не добьемся равенства

$$\tilde{\beta}(x, \omega) = \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{ON}|}$$

(при этом предполагаем, что мы выбрали ту из двух частей кривой Γ, отделенной прямой AA', которая дала нам такую возможность).

Обозначим $h_1 = \overline{OM}$, $h_2 = \overline{MN}$.

Имеются две возможности положения точки M (см. рис. 5).

$$\|\overline{AM}\| \leqslant \frac{\omega}{2},$$

или

$$\|\overline{BM}\| \leqslant \frac{\omega}{2}.$$

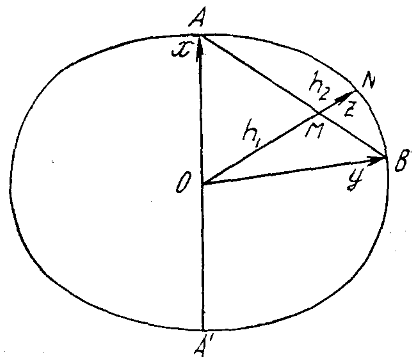

Рис. 5.

Для определенности допустим, что $\|\overline{BM}\| \leqslant \frac{\omega}{2}$ и рассмотрим треугольник OMB (в противном случае будем рассматривать треугольник OMA). В этом треугольнике имеем

$$\|\overline{OM}\| = \|h_1\| \geqslant \|\overline{OB}\| - \|\overline{MB}\| \geqslant 1 - \frac{\omega}{2}, \tag{2.1}$$

с другой стороны,

$$\tilde{\beta}(x, \omega) = \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{ON}|} = \|h_2\| = 1 - \|h_1\|. \tag{2.2}$$

Из неравенств (2.1) и (2.2)

$$\tilde{\beta}(x, \omega) = 1 - \|h_1\| \leqslant 1 - \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) = \frac{\omega}{2}.$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Из определения модулей $\delta(x, \omega)$ и $\tilde{\beta}(x, \omega)$ имеем при каждом фиксированном x

$$\delta(x, \omega) \leqslant \tilde{\beta}(x, \omega) \tag{2.3}$$

для любого банахова пространства.

Следствие 1. *В силу леммы 2 и замечания 2 имеем для любого банахова пространства E*

$$\delta(x, \omega) \leqslant \frac{\omega}{2}. \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Для любого банахова пространства*

$$\tilde{\beta}(x, \omega) \leqslant \varphi\left(x, \frac{3}{2}\omega\right).$$

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем доказать эту теорему для случая, когда $\dim E = 2$, т. е. для плоскости Минковского с единичной кривой Γ. Пусть задан вектор $x \in E$, $\|x\| = 1$. Обозначим $x = \overline{OA}$. Пусть продолжение AO пересекает кривую Γ в точке A'; AA' делит кривую Γ на две части.

Сначала приведем доказательство для правой части кривой Γ (относительно AA'). Обозначим функцию $\tilde{\beta}(x, \omega)$ для правой части через $\tilde{\beta}_{\text{пр}}(x, \omega)$.

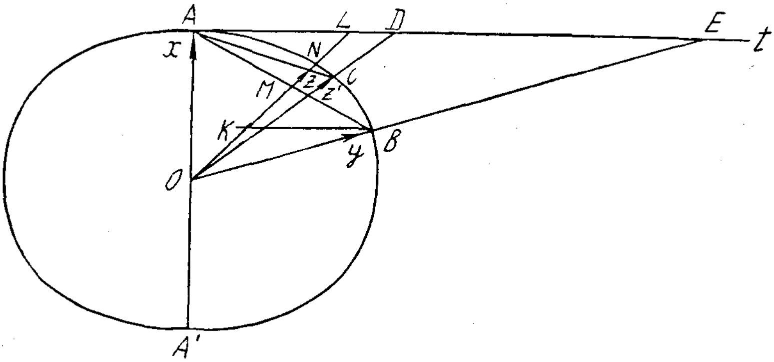

Рис. 6.

Возьмем вектор $y \in E$, $\|y\| = 1$, так чтобы $\|x - y\| = \omega$. Обозначим $y = \overline{OB}$. При этом точка B будет менять свое положение от точки A до точки A' по часовой стрелке (см. рис. 6). Построим теперь вектор z, такой чтобы

1) $z \in \Gamma$, т. е. $\|z\| = 1$;

2) если обозначим $z = \overline{ON}$ и пересечение ON с AB через M, то

$$\tilde{\beta}_{\text{пр}}(x, \omega) = \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{ON}|}. \tag{2.5}$$

Проведем опорную прямую At к кривой в точке A. Рассмотрим произвольный вектор $z' \in E$, $\|z'\| = 1$, лежащий между векторами x и y. Отождествим z' с $\overline{OC}$. Продолжение OC пересекает At в точке D.

Рассмотрим величину $\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OC}|}$. Будем непрерывно менять положение вектора z' до тех пор, пока не добьемся, чтобы

$$\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{OC}|} = \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{ON}|}. \tag{2.6}$$

Точка C, для которой имеет место равенство (2.6), лежит на Γ между A и B (см. рис. 6). Действительно, обозначим точку пересечения OB с опорной прямой At через E и точку пересечения продолжения ON с At через L. Проведем через B прямую, параллельную AE. Обозначим ее пересечение с OM через K. Из подобия треугольников OLE и OKB имеем

$$\frac{|\overline{BE}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{KL}|}{|\overline{OK}|} \geqslant \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{OK}|} \geqslant \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{ON}|}. \tag{2.7}$$

Но мы хотели бы $\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OC}|} = \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{ON}|}$, а из (2.7) видно, что если точка C совпадала бы с B, то

$$\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OC}|} \geqslant \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{ON}|},$$

и так как $\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OC}|}$ есть, очевидно, монотонно возрастающая функция от $\|\overline{AD}\|$, то точку $C \in \Gamma$ можно выбрать лежащей между A и B.

Оценим теперь норму $\|\overline{AD}\|$. В треугольнике ACD имеем

$$\|\overline{AD}\| \leqslant \|\overline{AC}\| + \|\overline{CD}\|. \tag{2.8}$$

Но по лемме 1

$$\|\overline{AC}\| \leqslant \|\overline{AB}\| = \omega. \tag{2.9}$$

По лемме 2

$$\|\overline{CD}\| = \tilde{\beta}_{\text{пр}}(x, \omega) \leqslant \frac{\omega}{2}. \tag{2.10}$$

Следовательно, из неравенств (2.8), (2.9) и (2.10) получаем

$$\|\overline{AD}\| \leqslant \omega + \frac{\omega}{2} = \frac{3}{2}\omega. \tag{2.11}$$

Обозначим функцию $\varphi(x, \omega)$ в правой части кривой Γ через $\varphi_{\text{пр}}(x, \omega)$. Мы имеем

$$\tilde{\beta}_{\text{пр}}(x, \omega) = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OC}|} = \varphi_{\text{пр}}\left(x, \|\overline{AD}\|\right). \tag{2.12}$$

В силу монотонности функции $\varphi(x, \omega)$ и из (2.11), (2.12) следует

$$\varphi_{\text{пр}}\left(x, \frac{3}{2}\omega\right) \geqslant \varphi_{\text{пр}}(x, \|AD\|) = \tilde{\beta}_{\text{пр}}(x, \omega). \tag{2.13}$$

Аналогично в левой части кривой Γ (в этом случае точка B будет менять свое положение на кривой Γ от точки A до точки A' против часовой стрелки). Имеем

$$\varphi_{\text{л}}\left(x, \frac{3}{2}\omega\right) \geqslant \tilde{\beta}_{\text{л}}(x, \omega). \tag{2.14}$$

Но очевидно,

$$\begin{gathered} \tilde{\beta}(x, \omega) = \min\left\{\tilde{\beta}_{\text{пр}}(x, \omega),\ \tilde{\beta}_{\text{л}}(x, \omega)\right\}, \\ \varphi(x, \omega) = \min\left\{\varphi_{\text{пр}}(x, \omega),\ \varphi_{\text{л}}(x, \omega)\right\}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Из формул (2.13), (2.14), (2.15) заключим, что

$$\tilde{\beta}(x, \omega) \leqslant \varphi\left(x, \frac{3}{2}\omega\right). \tag{2.16}$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Из неравенства* (2.3) *и теоремы 1 имеем для любого банахова пространства E*

$$\delta(x, \omega) \leqslant \varphi\left(x, \frac{3}{2}\omega\right). \tag{2.17}$$

Установим теперь связь между $\delta(x, \omega)$ и $\tilde{\beta}(x, \omega)$.

Теорема 2. *Для любого банахова пространства* E

$$\delta(x, \omega) \leqslant \tilde{\beta}(x, \omega) \leqslant 2\delta(x, \omega). \qquad (2.18)$$

Доказательство*. Очевидно, достаточно доказать эту теорему для случая $\dim E = 2$, при этом мы можем считать E эвклидовой плоскостью, перенормированной с помощью метрики Минковского, относительно некоторой выпуклой центрально-симметричной кривой Γ — единичной сферы в E.

Для данного ω, $0 \leqslant \omega \leqslant 2$ пусть $x \in E$ и $y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$, таковы, что $\|x - y\| = \omega$ и $1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \delta(x, \omega)$. Отождествим x и y векторами соответственно $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$; $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$ (O — центр Γ). Пусть $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$, D — точка пересечения продолжения OC с Γ (D и O лежат по разные стороны от AB), проведем $BE \| CD$, где E лежит на продолжении AD.

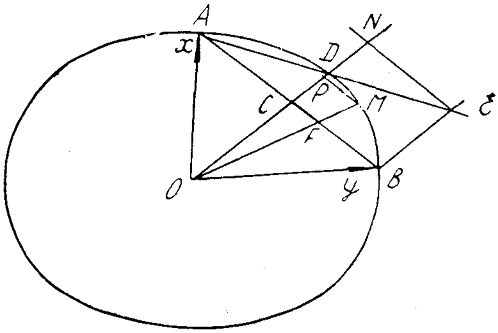

Рис. 7.

Покажем, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$1 - \|tx + (1-t)y\| \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{2}\|x + y\|\right).$$

Пусть $tx + (1-t)y = \overline{OF}$; M — точка пересечения продолжения OF с Γ; проведем $MP \| AB$ и $EN \| AB$ до пересечения с продолжением OD в точках P и соответственно N. Имеем (см. рис. 7)

$$1 - \|tx + (1-t)y\| = 1 - \|\overline{OF}\| = \frac{\|\overline{ME}\|}{\|\overline{OM}\|} = \frac{\|\overline{CP}\|}{\|\overline{OP}\|} \leqslant \frac{\|\overline{CN}\|}{\|\overline{NO}\|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|\overline{CN}\|}{\|\overline{DO}\|} = 2\frac{\|\overline{CD}\|}{\|\overline{DO}\|} = 2\left(1 - \frac{1}{2}\|x + y\|\right).$$

Поэтому имеем

$$\tilde{\beta}(x, \omega) \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1}(1 - \|tx + (1-t)y\|) \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{2}\|x + y\|\right) = 2\delta(x, \omega).$$

Неравенство же $\delta(x, \omega) \leqslant \tilde{\beta}(x, \omega)$ прямо следует из определения $\delta(x, \omega)$ и $\tilde{\beta}(x, \omega)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь связь между $\tilde{\beta}(\omega)$ и $\varphi(\omega)$.

---

* Неравенство, близкое к (2.18), было доказано в [2].

Лемма 3. (*Геометрическая интерпретация* $\tilde{\beta}(x, \omega)$). *Пусть имеются кривая Минковского* Γ *и вектор* $x = \overline{OA}$, $\|x\| = 1$. *Построим вектор* $y = \overline{OB}$ *так, чтобы* $\|x - y\| = \omega$ *и проведем опорную прямую к кривой* Γ, *параллельную* AB. *Пусть она касается кривой* Γ *в точке* P *и* R — *есть точка пересечения* OP *с* AB.

Тогда $\tilde{\beta}(x, \omega) = \|\overline{RP}\| = \dfrac{|\overline{RP}|}{|\overline{OP}|}$.

Доказательство. По определению

$$\tilde{\beta}(x, \omega) = \inf_{\substack{\|y\|=1 \\ \|x-y\|=\omega}} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{1 - \|tx + (1-t)y\|\}.$$

Пусть AO пересекает Γ в точке A'. Очевидно, достаточно доказать лемму для одной части кривой, на которые ее делит диаметр AA'. Возьмем любую точку S на кривой Γ, лежащую между точками A и B и отличную от точки P. Соединим O с S; OS пересекает AB в точке L и опорную прямую PK в точке K. Поскольку $PK \parallel AB$, то

$$\frac{|\overline{PR}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{KL}|}{|\overline{OK}|}.$$

Так как эти отношения меньше 1, то имеем (см. рис. 8)

$$\frac{|\overline{PR}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{KL}|}{|\overline{OK}|} \geqslant \frac{|\overline{KL}| - |\overline{KS}|}{|\overline{OK}| - |\overline{KS}|} = \frac{|\overline{SL}|}{|\overline{OS}|}.$$

Итак, $\dfrac{|\overline{PR}|}{|\overline{OP}|} \geqslant \dfrac{|\overline{SL}|}{|\overline{OS}|}$ для любой точки S.

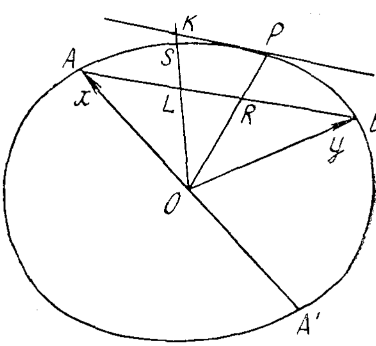

Рис. 8.

Отсюда из определения $\tilde{\beta}(x, \omega)$ имеем

$$\tilde{\beta}(x, \omega) = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{OP}|} = \|\overline{RP}\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть в условиях леммы 3 M — *середина* AB, R *лежит между точками* M *и* B (*случай, когда* R *лежит между* A *и* M, *рассматривается аналогично*). *Отложим на одной опорной прямой в противоположную сторону* MB *отрезок* PT, $\|PT\| = \frac{1}{2}\|AM\| = \frac{\omega}{4}$. *Пусть* C — *точка пересечения* OT *с кривой* Γ, G — *точка пересечения* AB *и* OC.

Тогда $\|\overline{TC}\| \leqslant \|CG\|$.

Доказательство. Соединим A с P (см. рис. 9). Обозначим пересечение AP и OT через Q. В силу выпуклости кривой Γ имеем

$$\|\overline{TC}\| \leqslant \|\overline{TQ}\|, \tag{2.19}$$

$$\|\overline{QG}\| \leqslant \|\overline{CG}\|. \tag{2.20}$$

Поэтому достаточно доказать неравенство $\|\overline{TQ}\| \leqslant \|\overline{QG}\|$. Из точки T проведем прямую, параллельную отрезку PR, она пересекает AB в точке I. Очевидно G лежит между точками I и R (т. е. дальше точки I относительно A), поэтому

$$\|\overline{AG}\| \geqslant \|AI\| \tag{2.21}$$

(знак равенства имеет место, когда дуга AB — отрезок прямой).

Могут быть два случая:
1) точка G лежит между A и M;
2) точка G лежит между M и B.
Рассмотрим сначала первый случай.
Так как $TI \parallel PR$,

$$\|\overline{IR}\| = \|\overline{PT}\| = \frac{\omega}{4}.$$

Если G лежит между A и M, то I также; мы имеем

$$\|\overline{IM}\| \leqslant \|\overline{IR}\| = \frac{\omega}{4},$$

$$\|\overline{AI}\| = \|\overline{AM}\| - \|\overline{IM}\| \geqslant \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{4}. \qquad (2.22)$$

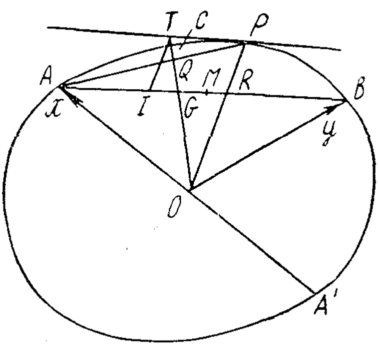

Рис. 9.

Из неравенств (2.21), (2.22)

$$\|\overline{AG}\| \geqslant \frac{\omega}{4} \qquad (2.22')$$

или

$$\|\overline{AG}\| \geqslant \|\overline{PT}\|. \qquad (2.23)$$

Из подобия треугольников PTQ и AGQ

$$\frac{|\overline{TQ}|}{|\overline{QG}|} = \frac{|\overline{PT}|}{|\overline{AG}|}. \qquad (2.24)$$

Из неравенств (2.23) и (2.24)

$$\frac{|\overline{TQ}|}{|\overline{QS}|} \leqslant 1, \text{ т. е. } \|\overline{TQ}\| \leqslant \|\overline{QG}\|. \qquad (2.25)$$

Из неравенств (2.19), (2.20) и (2.25)

$$\|\overline{TC}\| \leqslant \|\overline{CG}\|. \qquad (2.26)$$

Для второго случая, когда G лежит между M и B, имеем, очевидно,

$$\|\overline{AG}\| \geqslant \frac{\omega}{2}, \ \|\overline{AG}\| \geqslant \|\overline{PT}\|,$$

и, повторяя рассуждения, мы получим формулы (2.24), (2.25) и увидим, что в этом случае подавно

$$\|\overline{TC}\| \leqslant \|\overline{CG}\|.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Для любого банахова пространства справедливо неравенство*

$$\tilde{\beta}(\omega) \geqslant \varphi\left(\frac{\omega}{4}\right)^*.$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать эту теорему для случая, когда $\dim E = 2$, т. е. для плоскости Минковского. Пусть имеется кривая Минковского Γ и пусть задан вектор $x \in E$, $\|x\| = 1$, для которого $\tilde{\beta}(x, \omega) = \tilde{\beta}(\omega)$. Отождествим вектор x с $\overline{OA}$.

* Можно показать, что локальный аналог этого неравенства не имеет места; более того, не существует констант $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, таких что $\tilde{\beta}(x, \omega) \geqslant C_1 \varphi(x, C_2\omega)$.

Возьмем теперь вектор $y \in E$, $\|y\| = 1$, так чтобы

$$\|x - y\| = \omega.$$

Обозначим $y = \overline{OB}$. Соединим точку A с B. Проведем опорную прямую к кривой, параллельную AB. Точку касания обозначим через P. Соединим O с P. Пересечение OP с AB обозначим через R, точка M — середина AB. Пусть R лежит между точками M и B. На опорной прямой отложим отрезок PT, $\|\overline{PT}\| = \frac{\omega}{4}$, в противоположную сторону MB.

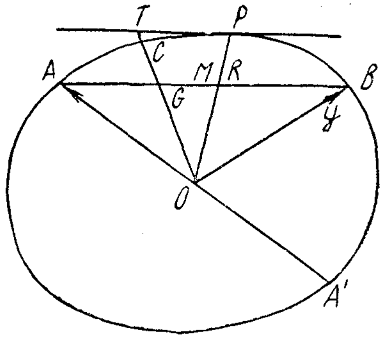

Рис. 10.

Соединим O с T, OT пересекает кривую в точке C и AB в точке G (см. рис. 10).

Из леммы 3

$$\tilde{\beta}(\omega) = \frac{|\overline{PR}|}{|\overline{OP}|} = \|\overline{PR}\|.$$

Из леммы 4

$$\|\overline{TC}\| \leqslant \|\overline{CG}\|.$$

Но по определению

$$\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) \leqslant \|\overline{TC}\|, \quad \|\overline{CG}\| \leqslant \|\overline{PR}\|,$$

поэтому имеем

$$\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) \leqslant \|\overline{TC}\| \leqslant \|\overline{CG}\| \leqslant \|\overline{PR}\| = \tilde{\beta}(\omega).$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Из теоремы 2 мы имели

$$\delta(x, \ \omega \leqslant \tilde{\beta}(x, \ \omega) \leqslant 2\delta(x, \ \omega).$$

Переходя к нелокальным модулям, получаем

$$\delta(\omega) \leqslant \tilde{\beta}(\omega) \leqslant 2\delta(\omega). \tag{2.27}$$

В силу теоремы 3

$$\tilde{\beta}(\omega) \geqslant \varphi\left(\frac{\omega}{4}\right). \tag{2.28}$$

Из неравенств (2.27), (2.28) имеем

$$\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) \leqslant 2\delta(\omega)$$

или

$$\delta(\omega) \geqslant \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right).$$

Теорема 4. *Для любого банахова пространства*

$$\mu(x, \ \omega) \leqslant 2\rho(x, \ \omega).$$

Доказательство. По определению

$$\mu(x, \ \omega) = \sup_{\|y\|=\omega, \ (x, \ y)=1} (\|x + y\| - 1),$$

$$\rho(x, \ \omega) = \frac{1}{2} \sup_{\|y\|=\omega} (\|x + y\| + \|x - y\| - 2).$$

Достаточно доказать теорему для случая $\dim E = 2$. Пусть имеем вектор $x = \overline{OA}$, $\|x\| = 1$ (см. рис. 11). Проводим опорную прямую к кривой Γ в точке A. На этой опорной прямой возьмем вектор $y_\mu = \overline{AB}$, $\|y_\mu\| = \omega$ (индекс μ означает, что вектор построен для $\mu(x, \omega)$). Соединим центр O с точкой B, OB пересекает кривую Γ в точке M. Будем считать, что точка B расположена по такую сторону от A, что

$$\mu(x, \omega) = \frac{|\overline{MB}|}{|\overline{OM}|}. \tag{2.29}$$

Для $\rho(x, \omega)$ возямем вектор $y_\rho = \overline{OC}$, параллельный вектору $\overline{AB}$ и $\|y_\rho\| = \omega$. Соединим точки A и C. Через O проводим прямую, параллельную AC. Она пересекает кривую Γ и продолжение AB в точках N и D соответственно. Далее

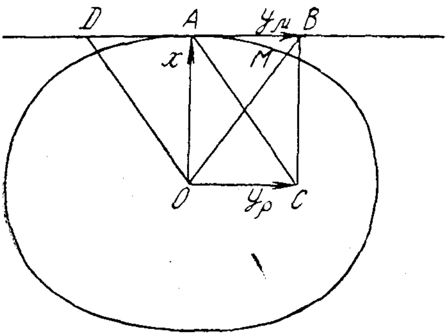

Рис. 11.

$$\|x + y_\rho\| + \|x - y_\rho\| - 2 = \frac{|\overline{MB}|}{|\overline{OM}|} + \frac{|\overline{NP}|}{|\overline{ON}|}.$$

Очевидно,

$$2\rho(x, \omega) \geqslant \frac{|\overline{MB}|}{|\overline{OM}|} + \frac{|\overline{ND}|}{|\overline{ON}|} \geqslant \frac{|\overline{MB}|}{|\overline{OM}|}. \tag{2.30}$$

Из неравенств (2.29), (2.30) видно, что

$$2\rho(x, \omega) \geqslant \mu(x, \omega).$$

Теорема доказана.

§ 3. ОБОБЩЕНИЕ РАВЕНСТВА ПАРСЕВАЛЯ—СТЕКЛОВА НА БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Пусть в гильбертовом пространстве H дана ортонормальная система элементов $\{e_i\}_1^\infty$. Если $\{e_i\}_1^\infty$ полна в H, то она является базисом в H, причем в разложении любого $x \in H : x = \sum_1^\infty c_i e_i$, имеет место равенство Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_1^\infty |c_i|^2. \tag{3.1}$$

Пусть теперь дана последовательность $\{e_i\}_1^\infty$ в банаховом пространстве E. Обозначим через $P_{i,j}$ линейную оболочку над элементами e_i, $e_{i+1}, \ldots, e_j$, $i \leqslant j$.

Определение 4. *Индексом последовательности* $\{e_i\}_1^\infty$ *называется величина см.* [4])

$$\gamma_{\{e_i\}_1^\infty} = \inf_{i<j} \left(\widehat{P_{1,i}, P_{i+1,j}}\right),$$

где $\left(\widehat{P_{1,i}, P_{i+1,j}}\right)$ — *наклон линейных оболочек* $P_{1,i}$ *и* $P_{i+1,j}$.

Очевидно,

$$0 \leqslant \gamma_{\{e_i\}_1^\infty} \leqslant 1.$$

Если $\gamma_{\{e_i\}_1^\infty}=1$, *то последовательность* $\{e_i\}_1^\infty$ *называется ортогональной.*

Определение 5. *Полная система элементов* $\{e_i\}_1^\infty$ *называется ортонормальной, если*

1) $\|e_i\|=1,\ i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

2) $(P_{1,\hat{i}},\ P_{i+1,\ j})=1,\ i<j.$

Как показал М. М. Гринблюм [4], для того чтобы полная система $\{x_i\}_1^\infty$ являлась базисом в сепарабельном банаховом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_{\{x_i\}_1^\infty}>0$.

Согласно М. М. Гринблюму, полная ортонормальная система $\{e_i\}_1^\infty$ *в* E есть базис в E.

Для обобщения равенства Парсеваля — Стеклова на банаховы пространства мы будем использовать модуль выпуклости $\varphi(x,\ \omega)$ и модуль гладкости $\mu(x,\ \omega)$ банахова пространства. Хорошо известна следующая

Лемма 5. *Любая плоскость, проходящая через начало координат гильбертова пространства, изометрична плоскости Минковского*, у которой единичная окружность есть эвклидовая окружность.

В силу предыдущей леммы, оценивая $\varphi(x,\ \omega)$ и $\mu(x,\ \omega)$ для гильбертова пространства, мы можем оценить $\varphi(x,\ \omega)$ и $\mu(x,\ \omega)$ для плоскости Минковского, у которой единичная окружность есть эвклидовая окружность.

В этом случае мы, очевидно, имеем

$$\mu(x,\ \omega)=\varphi(x,\ \omega)=\sqrt{1+\omega^2}-1. \tag{3.2}$$

Лемма 6. *Если для элементов* x *и* y *в банаховом пространстве* $\widehat{(x,\ y)}=1$, *то*

$$\|x\|\left[1+\varphi\left(\frac{x}{\|x\|},\ \frac{\|y\|}{\|x\|}\right)\right]\leqslant\|x+y\|\leqslant\|x\|\left[1+\mu\left(\frac{x}{\|x\|}\quad\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)\right]. \tag{3.3}$$

Доказательство. По определению для $\|x\|=1$

$$\varphi(x,\ \omega)=\inf_{\|y\|=\omega,\ \widehat{(x,\ y)}=1}(\|x+y\|-1),$$

$$\mu(x,\ \omega)=\sup_{\|y\|=\omega,\ \widehat{(x,\ y)}=1}(\|x+y\|-1).$$

Отсюда видно, что

$$\mu(x,\ \|y\|)\geqslant\|x+y\|-1\geqslant\varphi(x,\ \|y\|),$$

$$\mu(x,\ \|y\|)+1\geqslant\|x+y\|\geqslant\varphi(x,\ \|y\|)+1. \tag{3.4}$$

Пусть теперь норма $\|x\|$ произвольна, но $\widehat{(x,\ y)}=1$; имеем

$$\|x+y\|=\|x\|\cdot\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|x\|}\right\|. \tag{3.5}$$

Из формул (3, 4), (3, 5) видно, что если $\widehat{(x,\ y)}=1$, то

$$\|x\|\left[1+\varphi\left(\frac{x}{\|x\|},\ \frac{\|y\|}{\|x\|}\right)\right]\leqslant\|x+y\|\leqslant\|x\|\left[1+\mu\left(\frac{x}{\|x},\ \frac{\|y\|}{\|x\|}\right)\right].$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $\{e_i\}_1^\infty$ — ортонормальный базис в банаховом пространстве E. В разложении $x \in E$ по этому базису

$$x = \sum_1^\infty \alpha_i e_i,$$

положим

$$S_k x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Имеет место следующая основная

Теорема 5. *Для любого ортонормального базиса в банаховом пространстве E справедливо следующее обобщение равенства Парсеваля — Стеклова:*

$$\alpha_1 \| \prod_{k=1}^\infty \left[1 + \varphi\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right] \leqslant \|x\| \leqslant |\alpha_1| \prod_{k=1}^\infty \left[1 + \mu\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right]. \tag{3. 6}$$

Доказательство. Имеем

$$\|S_1 x\| = \|\alpha_1 e_1\| = |\alpha_1|.$$

Согласно лемме 6, мы можем оценить нормы всех частных сумм, учитывая, что $\left(\widehat{S_k x, e_{k+1}}\right) = 1$ (в силу ортогональности $\{e_i\}_1^\infty$),

$$\|S_2 x\| = \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\| = \|S_1 x + \alpha_2 e_2\|.$$

Так как $\left(\widehat{S_1 x, e_2}\right) = 1$, то по лемме 6

$$|\alpha_1| \left[1 + \varphi\left(\frac{S_1 x}{\|S_1 x\|}, \frac{\alpha_2}{\|S_1 x\|}\right)\right] \leqslant \|S_2 x\| \leqslant |\alpha_1| \left[1 + \mu\left(\frac{S_1 x}{\|S_1 x\|}, \frac{|\alpha_2|}{\|S_1 x\|}\right)\right],$$

$$\|S_3 x\| = \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3\| = \|S_2 x + \alpha_3 e_3\|.$$

Поскольку $\left(\widehat{S_2 x, e_3}\right) = 1$, то опять по лемме 6

$$\|S_2 x\| \left[1 + \varphi\left(\frac{S_2 x}{\|S_2 x\|}, \frac{|\alpha_3|}{\|S_2 x\|}\right)\right] \leqslant \|S_3 x\| \leqslant \|S_2 x\| \left[1 + \mu\left(\frac{S_2 x}{\|S_2 x\|}, \frac{|\alpha_3|}{\|S_2 x\|}\right)\right]$$

Ниже будем проводить лишь оценку снизу для $\|S_k x\|$ (оценка сверху проводится аналогично);

$$\|S_3 x\| \geqslant |\alpha_1| \left[1 + \varphi\left(\frac{S_1 x}{\|S_1 x\|}, \frac{|\alpha_2|}{\|S_1 x\|}\right)\right] \cdot \left[1 + \varphi\left(\frac{S_2 x}{\|S_2 x\|}, \frac{|\alpha_3|}{\|S_2 x\|}\right)\right] =$$

$$= |\alpha_1| \prod_{k=1}^2 \left[1 + \varphi\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right].$$

Пользуясь методом индукции, мы можем доказать, что для любого n

$$\|S_n x\| \geqslant |\alpha_1| \prod_{k=1}^{n-1} \left[1 + \varphi\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right]. \tag{*}$$

Допустим, что формула *) верна для $m = n - 1$, докажем ее для $m = n$. Формула верна для $m = n - 1$, значит,

$$\|S_{n-1} x\| \geqslant |\alpha_1| \prod_{k=1}^{n-2} \left[1 + \varphi\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right].$$

Оценим $\|S_n x\|$; так как $\left(\widehat{S_{n-1}x,\ e_n}\right) = 1$, то по лемме 6 имеем

$$\|S_n x\| = \|S_{n-1}x + \alpha_n e_n\| \geqslant \|S_{n-1}x\|\left[1 + \varphi\left(\frac{S_{n-1}x}{\|S_{n-1}x\|}, \frac{|\alpha_n|}{\|S_{n-1}x\|}\right)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \left\{|\alpha_1|\prod_{k=1}^{n-2}\left[1 + \varphi\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right]\right\}\left\{1 + \varphi\left(\frac{S_{n-1}x}{\|S_{n-1}x\|}, \frac{|\alpha_n|}{\|S_{n-1}x\|}\right)\right\} =$$

$$= |\alpha_1|\prod_{k=1}^{n-1}\left[1 + \varphi\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right].$$

Итак,

$$|\alpha_1|\prod_{k=1}^{n-1}\left[1 + \varphi\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right] \leqslant \|S_n x\| \leqslant |\alpha_1|\prod_{k=1}^{n-1}\left[1 + \mu\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right],$$

поскольку для оценки сверху аналогично имеем

$$\|S_n x\| \leqslant |\alpha_1|\prod_{k=1}^{n-1}\left[1 + \mu\left(\frac{S_k x}{\|S_k x\|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\|S_k x\|}\right)\right].$$

Поэтому (предполагая, что соответствующие бесконечные произведения сходятся) мы можем написать, переходя к пределу при $n \to \infty$, неравенство (3. 6).

Остается проверить, что это неравенство есть обобщение равенства Парсеваля—Стеклова.

По лемме 5 мы имели, что в гильбертовом пространстве

$$\mu(x, \omega) = \varphi(x, \omega) = \sqrt{1 + \omega^2} - 1.$$

Поэтому в гильбертовом пространстве неравенство (3. 6) превращается в равенство

$$\|x\| = |\alpha_1|\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1 + \frac{|\alpha_{k+1}|^2}{\|S_k x\|^2}}.$$

Обозначим через P_n, $n = 1, 2, \ldots$ частичные произведения

$$P_n = |\alpha_1|\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{1 + \frac{|\alpha_{k+1}|^2}{\|S_k x\|^2}}.$$

Имеем

$$P_1 = |\alpha_1|, \ P_2 = |\alpha_1|\sqrt{1 + \frac{|\alpha_2|^2}{|\alpha_1|^2}} = \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}.$$

Заметим, что в гильбертовом пространстве

$$\|S_k x\|^2 = \sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^2,$$

поэтому

$$P_3 = P_2\sqrt{1 + \frac{|\alpha_3|^2}{\|S_2 x\|^2}} = \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{|\alpha_3|^2}{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}} =$$

$$= \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2},$$

и проводя индукцию по n, получаем

$$P_n = \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2}. \qquad (**)$$

Отсюда

$$\| x \| = \lim_{n \to \infty} P_n = |\alpha_1| \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{|\alpha_{k+1}|^2}{\| S_k x \|^2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2},$$

т. е.

$$\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \| \alpha_k \|^2,$$

а это и есть равенство Парсеваля—Стеклова.

Применяя теоремы 1, 4, 5, мы получаем, что для ортонормального базиса в банаховом пространстве справедливо следующее неравенство:

$$|\alpha_1| \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + \delta\left(\frac{S_k x}{\| S_k x \|}, \frac{2 |\alpha_{k+1}|}{3 \| S_k x \|}\right)\right] \leqslant \| x \| \leqslant |\alpha_1| \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 + 2\rho\left(\frac{S_k x}{\| S_k x \|}, \frac{|\alpha_{k+1}|}{\| S_k x \|}\right)\right]. \tag{3.7}$$

Замечание 4. В банаховом пространстве для ортонормированного базиса имеем

$$\| x \| \geqslant \| S_k x \| \geqslant \| S_{k-1} x \| \geqslant |\alpha_1|.$$

Отсюда получаем (учитывая что $\mu(x, \omega) \leqslant \mu(\omega)$, $\varphi(x, \omega) \geqslant \varphi(\omega)$ и $\mu(\omega)$, $\varphi(\omega)$ есть неубывающие функции от ω):

Следствие 3. *Пусть α_S есть первый отличный от нуля коэффициент в разложении $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$. Тогда*

$$|\alpha_S| \prod_{k=S}^{\infty} \left[1 + \varphi\left(\frac{|\alpha_{k+1}|}{\| x \|}\right)\right] \leqslant \| x \| \leqslant |\alpha_S| \prod_{k=S}^{\infty} \left[1 + \mu\left(\frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_S|}\right)\right] \tag{3.8}$$

$$|\alpha_S| \prod_{k=S}^{\infty} \left[1 + \delta\left(\frac{2 |\alpha_{k+1}|}{3 \| x \|}\right)\right] \leqslant \| x \| \leqslant |\alpha_S| \prod_{k=S}^{\infty} \left[1 + 2\rho\left(\frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_S|}\right)\right]. \tag{3.9}$$

Так как при $\xi_i \geqslant 0$

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \xi_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i,$$

получаем

Следствие 4. *Для любого ортонормального базиса $\{e_i\}_1^{\infty}$ в банаховом пространстве справедливо неравенство*

$$\| x \| \geqslant |\alpha_1| \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \delta\left(\frac{2 |\alpha_{i+1}|}{3 \| x \|}\right)\right]. \tag{3.10}$$

Следствие 5. *Для любого ортонормального базиса $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в банаховом пространстве в разложении любого $x \in E$, $x = \Sigma \alpha_i e_i$ сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \delta(|\alpha_i|)$.**

Действительно, если $\| x \| \geqslant \frac{3}{2}$, то сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \delta(|\alpha_i|)$ вытекает из (3.10). Случай же $\| x \| < \frac{3}{2}$ сводится к случаю $\| x \| \geqslant \frac{3}{2}$, если

* Ранее эти утверждения получил В. И. Гурарий.

учесть, что $\delta(\omega)$ — неубывающая функция от ω $(0 \leqslant \omega \leqslant 2)$. Это следствие есть аналог одной теоремы М. И. Кадеца [5].

Как показал М. И. Кадец [5], для модуля выпуклости пространства L_p справедливы следующие оценки снизу:

$$\delta(\varepsilon) > K(p)\,\varepsilon^p \quad \text{при } p \geqslant 2,$$

$$\delta(\varepsilon) > K(p)\,\varepsilon^2 \quad \text{при } 1 < p < 2,$$

$$0 < K(p) < \infty$$

Поэтому мы получаем следующее

Следствие 6. *Для любого ортонормального базиса* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ *в* L_p *в разложении* $x \in L_p$: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ *имеют место неравенства*

$$\|x\| \geqslant |\alpha_1| \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{K}(p) \left(\frac{|\alpha_{i+1}|}{\|x\|}\right)^p\right] \quad \text{при } p \geqslant 2,$$

$$\|x\| \geqslant |\alpha_1| \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{K}(p) \left(\frac{|\alpha_{i+1}|}{\|x\|}\right)^2\right] \quad \text{при } 1 < p < 2.$$

Следствие 7. *Для любого ортонормального базиса* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ *в* L_p *в разложении* $x \in L_p$: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ *сходится ряд* $\sum_{1}^{\infty} |\alpha_i|^p$, *если* $p \geqslant 2$, $\sum_{1}^{\infty} |\alpha_i|^2$, *если* $1 < p < 2$.

В частности, эти утверждения имеют место для системы Хаара в L_p [6] (отметим, что изучение коэффициентов разложения функций по системе Хаара в L_p с других позиций проведено в статье П. Л. Ульянова [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Lindenstrauss. On the modulus of smothness and divergent series in Banach spaces, Michigan Math. J. 10 (1963), p. 241.
2. В. И. Гурарий. О модулях выпуклости и гладкости банаховых пространств. ДАН СССР, т. 161, № 5, 1965, 1003—1006.
3. В. И. Гурарий. О растворах и наклонах подпространств банахова пространства. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.
4. М. М. Гринблюм. Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа В. ДАН СССР 31, 1941, 428—432.
5. М. И. Кадец. Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом пространстве. Усп. матем. наук, т. XI, вып. 5(71), 1956, 185—190.
6. М. З Соломяк. Об ортогональном базисе в пространстве Банаха. Вестник ЛГУ, сер. матем., мех., астр., № 1, Изд-во ЛГУ, 1957.
7. П. Л. Ульянов. О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами. Изв. АН СССР, сер. матем., т. XXVIII, № 4, 1964, 925—950.

Поступила 6 декабря 1967 г.