Выпуск 8 1969

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Я. Скачек

Пусть L — самосопряженный оператор, определенный в $L_2(0, \infty)$ дифференциальной операцией

$$l(y)=(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left(p\frac{d^ny}{dx^n}\right)+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)+\ldots+p_0y,$$

где $p_0>0$, а $p_i(i=1, \ldots, n-1)$ — полуограниченные функции из $L_2(0, \infty)$, неотрицательные при $x>K$. Исследованием асимптотического распределения собственных значений таких операторов в случае чисто дискретного спектра занимался ряд авторов [1—8]. В большинстве работ асимптотические формулы для числа $A(\lambda)$ собственных значений оператора L, лежащих левее λ, были получены в предположении, что $p_1\equiv\ldots\equiv p_{n-1}\equiv 0$, $p\equiv 1$, а в [1] и [2] в случае, когда операция l содержит промежуточные производные и $p(x)\equiv 1$. Ограничение на $p(x)$ в [1] и [2] существенно связано с методом А. Г. Костюченко, основанным на использовании асимптотики спектральной функции.

В работах [10—12] автор с помощью вариационных принципов получил асимптотические формулы для числа $A(\lambda)$ ряда сингулярных дифференциальных операторов. При этом случай чисто дискретного спектра у оператора L не рассматривался. В данной статье методом, основанным на вариационных принципах, получены асимптотические формулы для $A(\lambda)$ в случае, когда спектр оператора L — чисто дискретен. В отличие от [1] и [2] в нашей статье функция $p(x)$ может стремиться к $+\infty$. Более подробное сравнение излагаемых ниже результатов с результатами работ [1] и [2] дано в конце статьи.

Используем две леммы, с которых и начнем изложение.

Пусть L_a — самосопряженный дифференциальный оператор, определенный в $L_2(0, a)$ дифференциальной операцией

$$l_a(y)=(-1)^np(a)\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}+(-1)^{n-1}p_{n-1}(a)\frac{d^{2n-2}y}{dx^{2n-2}}+\ldots+(-1)p_1(a)\frac{d^2y}{dx^2}, \quad (1)$$

где $p(a)>0$, $p_i\geqslant 0$. Пусть $\alpha(a)$ — монотонная и неотрицательная при всех x функция. Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия*

1) $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{\alpha^{\frac{1}{2n}}a}{p^{\frac{1}{2n}}(a)}=\infty;$

2) $\dfrac{p_i(a)}{p(a)}a^{2n-2i}\leqslant 1\ (i=1, \ldots, n-1).$

Тогда для числа $A(\alpha)$ собственных значений оператора L_a, лежащих левее α, при $a \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\frac{a\alpha^{\frac{1}{2n}}}{\pi \sqrt[2n]{p(a)}} - B \leqslant A(\alpha) \leqslant \frac{a\alpha^{\frac{1}{2n}}}{\pi \sqrt[2n]{p(a)}} + B, \tag{2}$$

где B — некоторая константа, зависящая только от n.

В ходе изложения все постоянные, зависящие только от n, будем обозначать через B.

Доказательство. Сделаем замену переменных в уравнении

$$L_a y = \alpha y \tag{3}$$

по формуле

$$t = \frac{x}{a}.$$

Разделив затем обе части равенства (3) на

$$p(a)\, a^{2n},$$

получим

$$\tilde{L} y = \frac{\alpha a^{2n}}{p(a)} y,$$

где $\tilde{L}$ — оператор, определенный в $L_2(0, 1)$ операцией

$$\tilde{l}(y) = (-1)^n \frac{d^{2n} y}{dt^{2n}} + (-1)^{n-1} \frac{p_{n-1}(a)}{p(a)} a^2 \frac{d^{2n-2} y}{dt^{2n-2}} + \ldots + (-1) \frac{p_1(a)}{p(a)} a^{2n-2} \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Пусть λ_k — k-е собственное значение оператора $\tilde{L}_a$, а $\tilde{A}(\lambda)$ — число собственных значений оператора $\tilde{L}_a$, лежащих левее λ.
Заметим, что

$$A(\alpha) = \tilde{A}\left(\frac{\alpha a^{2n}}{p(a)}\right). \tag{4}$$

Так как оператор $\tilde{L}_a$ определен в $L_2(0, 1)$ и выполняется условие (2), то для λ_k справедливы асимптотические формулы (45 *а*) — (47 *б*) [9, гл. II, § 4]. С помощью этих формул получаем, что при достаточно больших k справедливы неравенства

$$\frac{\lambda_k^{\frac{1}{2n}}}{\pi} - B \leqslant K \leqslant \frac{\lambda_k^{\frac{1}{2n}}}{\pi} + B. \tag{5}$$

Положим

$$\lambda = \frac{\alpha a^{2n}}{p(a)}.$$

Обозначим через λ_{k_0} наибольшее собственное значение оператора L_a, не превосходящее λ. Очевидно

$$k_0 = \tilde{A}\left(\frac{\alpha a^{2n}}{p(a)}\right)$$

и

$$\lambda_{k_0} \leqslant \lambda. \tag{6}$$

Если в (6) имеет место равенство, то (2) вытекает из (4) и (5). Если в (6) имеет место неравенство, то из (4) и (5) следует, что

$$A(\alpha) \leqslant \frac{1}{\pi} \lambda^{\frac{1}{2n}} + B. \tag{7}$$

Далее, вследствие (5)

$$k_0 + 1 \geqslant \frac{1}{\pi} \lambda_{k_0+1}^{\frac{1}{2n}} - B. \tag{8}$$

Так как λ_{k_0+1} больше λ, то из (4), (7) и (8) следует (2). Лемма доказана.

Пусть $\alpha(x)$ — определенная на положительной полуоси функция, монотонная в некоторой окрестности нуля и такая, что

$$\lim_{a \to 0} \alpha(a) = \infty.$$

Имеет место следующая

Лемма 2. Пусть выполнены условия

1) $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{\alpha^{\frac{1}{2n}}(a)\, a}{p^{\frac{1}{2n}}(a)} = \infty;$

2) $\dfrac{p_i(a)}{p(a)} a^{2n-2i} \leqslant 1.\ (i = 1, \ldots, n-1).$

Тогда для числа $A(\alpha)$ собственных значений оператора L, лежащих левее α, имеет место асимптотическая формула (2).

Лемма 2 доказывается аналогично лемме 1.

Далее везде через C и R будем обозначать положительные постоянные, численное значение которых нас не интересует.

Введем некоторые определения. Функцию $f(x)$ назовем квазивозрастающей, если при каком-нибудь $a > 0$ и всех x из интервала (R, ∞) выполняется неравенство

$$f(x + a) \geqslant f(x).$$

Функцию $f(x)$ будем относить к классу M_n, если найдется такая функция $x^k\ (0 < k < 2n)$, что при любом $\alpha > 0$ будут выполняться предельные равенства

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^{k+\alpha}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{k-\alpha}}{f(x)} = 0. \tag{9}$$

Заметим, что если функция $p_0(x)$ относится к классу M_n, то спектр оператора L — чисто дискретный.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) *функции $p_i(x)$ и $p(x)$ — квазивозрастающие;*

2) *при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ выполняются неравенства*

$$p_i \leqslant cp;$$

3) *функция $p_0(x)$ принадлежит классу M_n;*

4) *найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $x > R$ будет выполняться неравенство*

$$p_0(x) > c\,[p(x)]^{1+\varepsilon}.$$

Тогда для числа $A(\lambda)$ собственных значений оператора L, лежащих левее λ, при $\lambda \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$A(\lambda) = \frac{1 + o(1)}{\pi} \int\limits_{p_0(x) \leqslant \lambda} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\, dx. \tag{10}$$

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, можем предположить, что $p_0(x)$ — монотонная функция.

Пусть φ — решение уравнения

$$p_0(\varphi) = \lambda, \tag{11}$$

а φ_1 — наименьший действительный корень уравнения

$$p_0(\varphi_1) = \lambda - p(\varphi_1) \log \lambda. \tag{12}$$

Заметим, что φ_1 меньше или равно φ. Разделим интервал $(0, \varphi_1)$ на $N-1$ равных частей длины $\varphi_1 | E(\varphi_1)$ каждый, где $E(a)$ — целая часть числа a. Положим $x_0 = 0$, $x_{N-1} = \varphi_1$, $x_N = \varphi$, и обозначим через x_k $(k = 1, \ldots, N-2)$ координаты точек деления. Обозначим далее через $m_i(\lambda)$ и $\overline{m}_i(\lambda)$ число собственных значений, меньших λ, у оператора, определенного в $L_2(x_{i-1}, x_i)$ операцией l и, соответственно, нулевыми и естественными краевыми условиями.

Из вариационных принципов Р. Куранта следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \overline{m}_i(\lambda) \leqslant A(\lambda) \leqslant \sum_{i=1}^{N} m_i(\lambda). \tag{13}$$

Используя асимптотические формулы для $A(\lambda)$ в случае, когда оператор L определен в L_2 $(0, 1)$ (см. [9]), получим при $1 \leqslant i \leqslant N-1$

$$m_i(\lambda) \leqslant \frac{1}{\pi} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0(i-1)}{p(i-1)}} + 4n, \tag{14}$$

а

$$\overline{m}_i(\lambda) \geqslant \frac{1}{\pi} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0(i)}{p(i)}} - 4n. \tag{15}$$

С помощью вариационных принципов Р. Куранта и (13) — (15) получим неравенства

$$A(\lambda) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varphi} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\, dx + m_1(\lambda) + m_N(\lambda) + 4Nn, \tag{16}$$

и

$$A(\lambda) \geqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varphi} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\, dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\varphi-1}^{\varphi} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\, dx - C\lambda^{\frac{1}{2n}} - 4Nn. \tag{17}$$

Оценим слагаемые, стоящие в правых частях неравенств (11) — (17). Положим

$$J = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varphi} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\, dx.$$

Обозначим через φ_2 корень уравнения

$$p_0(\varphi_2) = \lambda - \lambda^{\theta} \quad (0 < \theta < 1). \tag{18}$$

Заметим, что

$$J \geqslant C\lambda^{\frac{\theta}{2n}}\gamma, \tag{19}$$

$$\gamma = \int_0^{\varphi_2} \frac{dx}{\sqrt[2n]{p(x)}}.$$

Вследствие условия 4) теоремы 1

$$p^{-1}(\varphi_2) \geqslant C\,[p_0(\varphi_2)]^{-\frac{1}{1+\varepsilon}}.$$

Поэтому

$$\gamma \geqslant C\lambda^{\frac{2n(1+\varepsilon)-k-\alpha}{2nk(1+\varepsilon)}}, \tag{20}$$

где k и α из (9), при условии, что в (9) роль $f(x)$ играет функция $p_0(x)$. Поскольку N не превосходит $C\varphi_1$, то

$$N \leqslant C\lambda^{\frac{1}{k-\alpha}}, \tag{21}$$

где α — любое сколь угодно малое число. Выбирая соответствующим образом θ, получим в силу (19) и (21) предельное равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} NJ^{-1} = 0. \tag{22}$$

Далее заметим, что $m_1(\lambda)$ не превосходит $C\lambda^{\frac{1}{2n}}$, и следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty} m_1 J^{-1} = 0. \tag{23}$$

Остается оценить $m_N(\lambda)$. Для этого придется произвести некоторые дополнительные построения.

Разобьем интервал (φ_1, φ) на N_1 равных промежутков длины $\varphi - \varphi_1 / E(\varphi - \varphi_1)$ каждый, а координаты концов полученных промежутков обозначим через $x_i^{(1)}$ $(0 \leqslant i \leqslant N_1)$. Пусть L_1 и L_{1i} — операторы, определенные соответственно в $L_2(\varphi_1, \varphi)$ и $L_2\left(x_{i-1}^{(1)}, x_i\right)$ операцией

$$l_1 y = ly + (\lambda - p_0(x) - p(x)\log\lambda)\,y$$

и естественными краевыми условиями. Обозначим через $\overline{m}_N(\lambda)$ и $\overline{m}_{iN}(\lambda)$ число собственных значений, лежащих левее λ, соответственно у операторов L_1 и L_{1i}.

Так как при $x \in (\varphi_1, \varphi)$ выполняется неравенство

$$\lambda - p_0(x) - p(x)\log\lambda \leqslant 0,$$

то

$$m_N(\lambda) \leqslant \overline{m}_N(\lambda). \tag{24}$$

В силу вариационных принципов Р. Куранта

$$\overline{m}_N(\lambda) \leqslant \sum_{i=1}^{N_1} \overline{m}_{iN}(\lambda) + 4N_1,$$

поэтому достаточно оценить $\overline{m}_{iN}(\lambda)$. С этой целью применим асимптотические формулы для $A(\lambda)$ в случае конечного интервала. В результате получим

$$\overline{m}_{iN}(\lambda) \leqslant C\log\lambda.$$

Так как $N_1 < \varphi$, то ввиду (24)

$$\lim_{\lambda \to \infty} m_N(\lambda) J^{-1} = 0. \tag{25}$$

Из (16), (22), (23) и (25) следует, что

$$A(\lambda) J^{-1} \leqslant 1 + \psi(\lambda), \tag{26}$$

где

$$\lim_{\lambda \to \infty} \psi(\lambda) = 0.$$

Аналогичным способом получим

$$A(\lambda) J^{-1} \geqslant 1 - \psi(\lambda). \tag{27}$$

Теорема доказана.

В теореме 1 в силу условия 3) функция $p_0(x)$ при всех x должна быть меньше функции Cx^{2n}. Ниже мы получим асимптотическую формулу для $A(\lambda)$ в предположении, что $p_0(x)$ больше Cx^{2n}.

Теорема 2. *Пусть при $x > R$ выполняются условия*

1) *функции p_i и p монотонно возрастают;*

2) *найдется такое $\zeta > 0$, что будет выполняться равенство*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p_0(x)}{x^{2n+\zeta}} = \infty;$$

3) *найдется такое $\theta\,(0 < \theta < \zeta)$, что будут справедливы неравенства*

$$\frac{p_{n-k}(x)}{p(x)} \leqslant x^{k\frac{\theta}{n}} \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Тогда для числа $A(\lambda)$ собственных значений оператора L, лежащих левее λ, при $\lambda \to \infty$ имеет место асимптотическая формула (10)

Доказательство. Положим

$$a = \lambda^{-\frac{\gamma}{2n(2n+\zeta)}}, \tag{28}$$

где

$$0 < \gamma < \zeta.$$

Обозначим через φ_3 корень уравнения

$$\frac{\lambda - p_0(\varphi_3)}{p(\varphi_3)} = a^{-2n(1+\varepsilon)}, \tag{29}$$

где

$$0 < \varepsilon < \frac{\zeta - \gamma}{\gamma}, \tag{30}$$

и определим $\bar{\varphi}$ равенством

$$\bar{\varphi} = aE(\varphi_3).$$

Разделим интервал $(0, \bar{\varphi})$ на $N-1$ равных частей длины a_i. Положим $x_0 = 0$, $x_{N-1} = \bar{\varphi}$, $x_N = \varphi$ и обозначим через $x_k\,(k = 1, \ldots, N-2)$ координаты точек деления.

С помощью леммы 1 и вариационных принципов Р. Куранта так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, получим неравенства (16) и (17). Для этого проверим, выполняются ли условия 1) и 2) леммы 1. Условие 2) леммы 3 выполняется вследствие ограничения 3) теоремы 2, а условие 1) ввиду (28) и (29).

Докажем предельные равенства (22), (23) и (25). Заметим, что

$$N \leqslant \frac{\varphi}{a}, \tag{31}$$

а

$$J \geqslant C\lambda^{\frac{1}{2n}}. \tag{32}$$

Далее ввиду ограничения 2) теоремы 2 выполняется неравенство

$$\varphi \leqslant C\lambda^{\frac{1}{2n+\varepsilon}}. \tag{33}$$

Из (29) — (31) следует (22).

Поскольку

$$m_1(\lambda) \leqslant C\lambda^{-\frac{1}{2n}} a, \tag{34}$$

то из (32) вытекает предельное равенство (23).

Докажем (25). Пусть L_2 — самосопряженный оператор, определенный в $L_2(\varphi_3, \varphi)$ операцией l_2, где

$$l_2 y = ly + (\lambda - p_0(x) - p(x) a^{-(1+\varepsilon)2n}) y,$$

а $\bar{m}(\lambda)$ — число собственных значений оператора L_2, лежащих левее λ. Далее, как легко видеть, имеет место неравенство

$$m_N(\lambda) \leqslant \bar{m}(\lambda). \tag{35}$$

Поэтому в силу леммы 3

$$m_N(\lambda) \leqslant c\varphi a^{-(1+\varepsilon)}. \tag{36}$$

Из (36) с помощью (32) и (33) получим (25). Итак, предельные равенства (22), (23) и (25) доказаны.

Из (16), (22), (23) и (25) следует (26). Аналогичным образом получим и (27). Теорема доказана.

Введем некоторые определения. Класс F по определению состоит из функций f, обладающих свойствами:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;

2) существует такое число ξ $(0 < \xi < 1)$, что все x_1 и x_2 из интервала (R, ∞), при которых имеет место

$$f(x_1) \leqslant [f(x_2)]^{\gamma} \qquad (0 < \gamma < 1),$$

удовлетворяют неравенству

$$x_1 \leqslant x_2^{\xi}.$$

Заметим, что $M_n \subset F$.

Пусть $p(x)$ — квазивозрастающая функция, стремящаяся к $+\infty$. Класс $G_n(\psi)$ по определению состоит из функций $f(x)$, которые при всех $x \in [R, \infty]$ удовлетворяют неравенству

$$f(x + x\beta(x)) - f(x) \geqslant \psi^{-1}(x),$$

где $\beta(x)$ — какая-нибудь квазиубывающая функция, для которой

$$\lim_{x\to\infty} \beta(x)\psi^{-\frac{1}{2n}}(x)[f(x+\beta x) - f(x)] = 0. \tag{37}$$

Укажем теперь семейство M функций $f(x)$, принадлежащих классу $G_n(\psi)$. Положим

$$\ln_j x = \ln(\ln_{j-1} x), \quad \ln_0 x = x \quad (1 \leqslant j < \infty).$$

По определению $f(x) \in M$, если найдется функция вида

$$\ln_1^{k_1} x \ln_2^{k_2} x \ldots \ln_l^{k_l} x$$

$$(0 \leqslant k_j < \infty, \quad 1 \leqslant j \leqslant l, \quad l < \infty)$$

такая, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\ln_1^{k_1} x \ln_2^{k_2} x \ldots \ln_l^{k_l} x} = c.$$

Легко проверить, что $M \subset G_\alpha(\psi)$ при

$$\psi \geqslant c \ln^\theta x,$$

где θ — какое-нибудь число, большее $\frac{2n(k_1 - 1)}{4n - 1}$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть при $x > R$ выполняются следующие условия:*

1) *функция $p(x)$ — квазивозрастает, $p \in F$*

и

$$p(x) \leqslant cx^\tau,$$

где τ — какое-нибудь число из интервала $(0, 2n)$;

2) функция $p_0(x)$ — квазивозрастает, стремится к $+\infty$, и при этом

$$p_0(x) \leqslant cx^k,$$

где

$$k = \frac{2n - \tau}{2}.$$

3) $p_i(x) \leqslant c[p(x)]^{\frac{i}{n} - \alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$

где α_i — какое-нибудь число из интервала $\left(0, \frac{i}{n}\right)$;

4) функция $p_0(x) \in G_n(p^\alpha)$ при каком-нибудь

$$\alpha < \min\left\{\frac{k}{2\tau}, \ \alpha_i\right\}.$$

Тогда для числа $A(\lambda)$ собственных значений оператора L, лежащих левее λ, при $\lambda \to \infty$ имеет место асимптотическая формула (10).

Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что $p_0(x)$ и $p(x)$ — монотонные функции. Пусть φ и J имеют тот же смысл, что и в теореме 1, а φ_0 — наименьший действительный корень уравнения

$$\varphi_0 + \varphi_0 \beta(\varphi_0) = \varphi. \tag{38}$$

Обозначим $\min\limits_{k=1\ldots,n-1} \{\alpha_k\}$ через α_0 и положим

$$N = E\left(\frac{\ln[2n - k - \tau(1 + \alpha)] - \ln 2n}{\ln \gamma}\right) + 1,$$

где

$$\frac{2n}{2n + \alpha_0} < \gamma < 1. \tag{39}$$

Определим $\varphi_i \, (i = 1, 2, \ldots, N)$ из уравнений

$$p(\varphi_i) = p(\varphi_{i-1})^\gamma \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{40}$$

Пусть

$$a_i = p(\varphi_i)^\theta, \tag{41}$$

где

$$\Theta = \frac{1}{2n} + \frac{\alpha_0}{2(n-1)}.$$

Разобьем промежуток $[\varphi_i, \varphi_{i-1}]$, где $i \geqslant 1$, на интервалы длиной a_i каждый, исключая последний, длина которого не превосходит a_i. Обозначим число полученных интервалов через N_i. Пусть $m_i(\lambda)$ — число собственных значений, лежащих левее λ, у оператора L, определенного в $L_2(\varphi_i, \varphi_{i-1})$ любыми самосопряженными условиями. Оценим $m_i(\lambda)$, пользуясь леммой 1. Для этого покажем, что выполняются условия 1) и 2) леммы 1.

Условие 2) леммы выполняется ввиду (40), (41) и ограничений, наложенных на p_i в теореме 3. Проверим теперь условие 1). Обозначим

$$\xi_i = \sqrt[2n]{\lambda - p_0(\varphi_{i-1})}\ .$$

Заметим, что

$$\xi_i^{2n} \geqslant p_0(\varphi_{i-1} + \beta\varphi_{i-1}) - p_0(\varphi_{i-1}),$$

и так как $p_0 \in G_\alpha(p)$, то ξ_i^{2n} не меньше, чем $p^{-\alpha}(\varphi_{i-1})$. Отсюда и из (40) (41) вытекает

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{a_i^{2n}\,\xi_i^{2n}}{p(\varphi_i)} = \infty. \tag{42}$$

Из (42) следует, что условие 2) леммы 1 выполняется.

С помощью вариационных принципов Р. Куранта и леммы 1 получим при $1 \leqslant i \leqslant N-1$ оценку сверху для $m_i(\lambda)$:

$$m_i(\lambda) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{\varphi_i}^{\varphi_{i-1}} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\,dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\varphi_i - a_i}^{\varphi_i} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\,dx + 4nN_i.$$

Отсюда следует, что

$$A(\lambda) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\varphi} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\,dx + \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{\varphi_i - a_i}^{\varphi_i} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\,dx + $$
$$+ m_0 + m_l + 4NN_{in}, \tag{43}$$

где m_0, m_l — число собственных значений, лежащих левее λ, у оператора L, определенного соответственно в $L_2(\varphi_0, \varphi)$ и $L_2(0, \varphi_N)$.

Для вывода формулы (10) оценим члены правой части (43) и докажем предельные равенства, аналогичные (22), (23) и (25). Докажем (25). Так как m_N не превосходит $C\lambda^{\frac{1}{2n}}\varphi_N$, то для этого достаточно показать, что выполняется предельное равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda^{\frac{1}{2n}}\varphi_N}{J} = 0. \tag{44}$$

Поскольку $p_0 \in G_\alpha(p)$, то ξ_0 не меньше, чем $p(\varphi_0)^{-\frac{\alpha}{2n}}$ и

$$J \geqslant \varphi_0 p(\varphi_0)^{-\frac{1+\alpha}{2n}}. \tag{45}$$

Далее, так как $p \in F$, то (40) влечет неравенство

$$\varphi_i \leqslant \varphi_{i-1}^{\gamma_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{46}$$

где γ_1 — какое-нибудь число из интервала (0,1). Из (46) следует, что φ_N не превосходит $\varphi_0^{\gamma_1^N}$. Так как φ меньше, чем $2\varphi_0$, а ввиду условия 2) рассматриваемой теоремы λ не превосходит $\varphi^{\frac{k}{2n}}$, то

$$\lambda \leqslant c\varphi_0^{\frac{k}{2n}}. \tag{47}$$

Из неравенств (45) и (47) оценки сверху для φ_N и условия 1) теоремы 3 вытекает, что (44) будет иметь место при

$$\frac{k}{2n} - 1 + \tau\frac{1+\alpha}{2n} + \gamma_1^N < 0. \tag{48}$$

Неравенство (48), а следовательно, и (44) будет выполняться в силу выбора N. В свою очередь, из (44) следует (25).

Докажем теперь, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} m_0 J^{-1} = 0. \tag{49}$$

Заметим, что

$$m_0(\lambda) \leqslant c\xi_0 \frac{\beta(\varphi_0)\varphi_0}{\sqrt[2n]{p(\varphi_0)}}. \tag{50}$$

Из (45) и (50) получим

$$m_0 J \leqslant c\xi_0\beta(\varphi_0)\, p^{\frac{\alpha}{2n}}(\varphi_0). \tag{51}$$

Так как $p_0 \in G_n(p^\alpha)$, то из (51) вытекает (49).

Перейдем теперь к оценке $N_i J^{-1}$. Так как N_i не превосходит $\varphi_{i-1}a_i^{-1}$, то ввиду (40) и (41)

$$N_i \leqslant \varphi_{i-1} p(\varphi_{i-1})^{-\gamma\theta}. \tag{52}$$

Легко видеть, что

$$J \geqslant \xi_{i-1}\varphi_{i-1} p(\varphi_{i-1})^{-\frac{1}{2n}}. \tag{53}$$

Из полученных оценок для N_i и J в силу выбора θ и γ вытекает предельное равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} N_i J^{-1} = 0. \tag{54}$$

Обозначим

$$J_i = \int\limits_{\varphi_i - a_i}^{\varphi_i} \sqrt[2n]{\frac{\lambda - p_0}{p}}\, dx.$$

Покажем, наконец, что

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_i J^{-1} = 0. \tag{55}$$

Заметим, что $\varphi_i a_i^{-1} J_i$ не превосходит J. Поэтому для доказательства (55) достаточно установить, что $\varphi_i a_i^{-1}$ стремится к $+\infty$. По определению a_i равно $p(\varphi_i)^\theta$. Так как $p(\varphi_i)$ не превосходит φ_i^τ, то a_i не превосходит $\varphi_i^{\tau\theta}$. Легко проверить, что $\tau\theta < 1$. Следовательно, $\varphi_i a_i^{-1} \to \infty$. Предельное равенство (55) доказано.

Из (25), (43), (49), (54), (55) следует асимптотическая формула (26). Формула (27) получается аналогично. Теорема доказана.

Ниже мы рассмотрим случай, когда главный член асимптотики $A(\lambda)$ зависит только от функции $p(x)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *функция* $p(x)$ *на интервале* $(0, R)$ непрерывна, а на интервале $[R\ \infty]$ — квазивозрастает. При $x > R$

$$p(x) \geqslant x^{2n+\zeta},$$

где ζ — какое-нибудь положительное число;

2) при $x > R$ выполняются неравенства

$$p_i(x) \leqslant x^{\zeta+2i} \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

где ζ из условия 1).

Тогда для числа $A(\lambda)$ собственных значений оператора L, лежащих левее λ, при $\lambda \to \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{m(\lambda)}{\sqrt[2n]{\lambda}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[2n]{p(x)}}. \qquad (56)$$

Доказательство теоремы проводится с помощью леммы 2 методом, предложенным в [8].

Сделаем несколько замечаний. Прежде всего отметим, что в теореме 5 главный член асимптотической формулы зависит только от p. Это обусловлено тем, что коэффициент $p(x)$ удовлетворяет неравенству

$$p(x) \geqslant cx^\theta \qquad (\theta > 2n)$$

при некоторых ограничениях на рост $p_i (i = 1, \ldots, n-1)$.

В теоремах 1 — 3 главный член асимптотики зависит от двух коэффициентов p_0 и p. В этом случае $p(x)$ не превосходит cx^{2n}. В теоремах 1 и 2 функция $p_0(x)$ возрастает не медленнее, чем степенная функция. С другой стороны, в теореме 3 $p_0(x)$ может возрастать как угодно медленно и не быстрее степенной функции.

В работах [1] и [2] предполагается, что $p(x) < c$. Это ограничение существенно связано с методом А. Г. Костюченко, основанным на использовании асимптотики спектральной функции. Наш метод, основанный на вариационных принципах, дал возможность получить асимптотические формулы при $p(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Костюченко. Асимптотическое распределение собственных значений эллиптических операторов. ДАН СССР, 158, № 1, 41, 1964.
2. А. Г. Костюченко. Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов. ДАН СССР, 168. № 1, 1966.
3. J. S. De Wet and F. Mandl. On the asymptotic distribution of eigenvalues, Pros. Roy. Soc. Ser A, 200, N 1063, 572—580.
4. E. C. Titchmarsh. Eigenfunction expansions associated with partial differential equations. Proc. London, Math. Soc. (3), 3, 153 (1953).
5. D. Ray. On spectra of second — order differential operators, Trans. Amer. Math. Soc., 77, 299—321.
6. Б. М. Левитан. Об асимптотическом поведении функции Грина и разложение по собственным функциям уравнения Шрендингера. Матем. сб., 41, (83), 439, (1957).
7. В. А. Ткаченко. Об условиях дискретности спектра одночленных дифференциальных операторов. Дифференциальные уравнения, II, № 5, 1966, 634—639.
8. Б. Я. Скачек. Об асимптотическом распределении собственных значений сингулярных дифференциальных операторов. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 3. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
9. М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.
10. Б. Я. Скачек. Асимптотика отрицательной части спектра одномерных сингулярных дифференциальных операторов. Сб. «Приближенные методы решения дифференциальных уравнений», 96, 109. Изд-во АН УССР, К., 1963.
11. Б. Я. Скачек. Про асимптотику негативної частини спектра багатовимірних сингулярних диференціальних операторів. Доп. АН УРСР, № 1, 1964.
12. Б. Я. Скачек. Про асимптотичний розподіл числа власних значень рівнянь вигляду $Ay = \lambda By$. Доп. АН УРСР, № 7, 1967.

Поступила 11 декабря 1967 г.