ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 8 1969

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ КЛАССОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Похилевич

§ 1. Обозначим через $\tilde{S}$ класс функций

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

голоморфных и однолистных в единичном круге $E\{z,\ |z| < 1\}$. Следуя В. Каплану [1], будем говорить, что функция $f(z)$, голоморфная в E, есть почти выпуклая в E, если существует однолистная функция $\varphi(z)$, *отображающая E на выпуклую область и такая, что*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right) > 0 \tag{1.1}$$

для всех точек $z \in E$. Через K будем обозначать класс всех функций голоморфных и почти выпуклых в E.

Класс почти выпуклых функций (соответственно областей) был впервые введен аналитическим путем японским математиком Оцаки в 1935 г. [2], было показано, что функции класса K однолистны в E.

В 1952 г. В. Каплан [1] указал геометрическую характеристику контура почти выпуклых областей. Очевидно, что $K \subset \tilde{S}$.

Односвязная однолистная область D называется линейно достижимой, если она не содержит точки $w = \infty$, и существует такое семейство попарно непересекающихся лучей, не имеющих общих точек с D, которые содержат все граничные и все внешние (если таковые есть) точки области D. Каждый луч этого семейства либо сплошь состоит из граничных точек области D, либо только начальная точка луча является граничной точкой области D, либо, наконец, оба конца луча являются граничными точками области D. Обозначим через L подкласс класса $\tilde{S}$ функций, которые отображают E на области линейно достижимые. Понятие линейно достижимых областей и подкласс L ввел М. Бернацкий [3].

З. Левандовский доказал [4], что классы L и K эквивалентны. Доказательство Левандовского было довольно громоздким и сложным. Позднее теорема о том, что почти выпуклая функция является линейно достижимой, была передоказана в статье Билецкого и Левандовского [5].

В настоящей заметке мы предлагаем другой метод доказательства эквивалентности классов K и L, пользуясь понятием линейно аппроксимируемой области [6], т. е. такой, которую можно сколь угодно точно (в смысле конформного отображения на круг) аппроксимировать областью с прямолинейными разрезами, и методом структурных формул. Таким образом, теорема Левандовского получает, как нам кажется, наиболее простое доказательство.

§ 2. **Теорема 1.** Если $f(z) \in L$, то $f(z) \in K$.

Доказательство. Условимся называть односвязную однолистную область w-плоскости областью класса B, если она содержит точку $w = 0$ и ее граница состоит из конечного числа попарно непересекающихся лучей. Любую область w-плоскости, которую можно рассматривать как ядро последовательностей областей класса B, условимся называть областью класса $\overline{B}$. Будем писать $f(z) \in \overline{B}$, если она отображает E на область $\overline{B}$, а совокупность всех таких функций будем называть классом $\overline{B}$.

Докажем, что класс $\overline{B}$ совпадает с классом K. Прежде всего докажем, что если $f(z) \in B$, то $f(z) \in K$. Пусть дана область $D_n \in B$, граница которой состоит из n попарно непересекающихся лучей, уходящих на ∞. Пусть $B_1, B_2, \ldots B_n$ — вершины лучей — концевые точки лучей в конечной части W-плоскости. Будем рассматривать область D_n как $2n$-угольник с n вершинами в конечной части плоскости B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ и n вершинами на ∞. Тогда, применяя формулу Шварца-Кристоффеля [7, стр. 166—167], легко получить следующую формулу для производной от функции $w = f_n(z)$, отображающую круг E на область D_n:

$$f_n'(z) = C_n \frac{\prod\limits_1^n (1 - ze^{-i\psi_k})}{\prod\limits_1^n (1 - ze^{-i\varphi_k})^{1+\mu_k}}, \tag{2.1}$$

где

$$\varphi_k < \psi_k < \varphi_{k+1}, \; k = 1, 2, \ldots, n, \; \varphi_1 \geqslant 0, \; \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi; \quad \mu_k \geqslant 0, \; \Sigma\mu_k = 2, \; C_n > 0. \tag{2.2}$$

Здесь точки $e^{i\psi_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ соответствуют вершинам B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, лежащим в конечной части плоскости, а точки $e^{i\varphi_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, являются прообразами точки $w = \infty$; $(-\mu_k\pi)$ — угол между двумя прямыми с вершиной в бесконечности, определяемый как угол в конечной точке их пересечения $\mu_k\pi$, взятый со знаком минус.

Обратно, если функция $f_n(z)$ определяется формулой (2.1), где параметры подчинены условиям (2.2), то она принадлежит классу K и отображает круг E на некоторую область класса B.

Чтобы убедиться в последнем, достаточно проверить, что каждая функция $f_n(z)$, определяемая формулой (2.1) при условиях (2.2), однолистно отображает E на область, граница которой состоит из n-лучей. Однолистность функции $f_n(z)$, определяемой формулой (2.1), очевидна. Покажем, что функция $f_n(z)$, определяемая формулой (2.1) при условиях (2.2), принадлежит классу K.

Чтобы убедиться, что граница области D_n, на которую функция (2.1) отображает E, состоит из n-лучей, достаточно проверить, что $\arg(df_n) = \text{const}$ на каждом интервале (φ_k, ψ_k) и на каждом интервале (ψ_k, φ_{k+1}), причем при переходе из первого интервала во второй $\arg(df_n)$ получает приращение, равное $-\pi$. Этот факт проверяется элементарно, и мы его опускаем.

Для доказательства первого утверждения покажем, что формулу (2.1) можно переписать в виде

$$f_n'(z) = \varphi_n'(z) \cdot P_n(z), \tag{2.3}$$

где

$$\varphi_n'(z) = C_n e^{i\Delta_n} \prod_{k=1}^n (1 - ze^{-i\varphi_k})^{-\mu_k}, \tag{2.4}$$

а

$$p_n(z) = -i \sin\Delta_n + \cos\Delta_n \sum_{k=1}^n \gamma_k \frac{1 + ze^{-i\varphi_k}}{1 - ze^{-i\varphi_k}}. \tag{2.5}$$

Здесь

$$\Delta_n = \frac{1}{2}\left(\pi + \sum_1^n \varphi_k - \sum_1^n \psi_k\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.6}$$

$$\cos \Delta_n \cdot \gamma_k = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \sin \frac{\psi_j - \varphi_k}{2}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{n} \sin \frac{\varphi_j - \varphi_k}{2}}; \quad \gamma_k > 0; \quad \sum_1^n \gamma_k = 1. \tag{2.7}$$

Действительно, разложим следующее выражение на простейшие дроби:

$$I = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - ze^{-i\psi_k})}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - ze^{-i\varphi_k})} = C + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{1 - ze^{-i\varphi_k}}. \tag{2.8}$$

Очевидно, $C = e^{i\Delta}$, где $\Delta = \sum\limits_1^n \varphi_k - \sum\limits_1^n \psi_k$, а

$$A_k = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} (1 - e^{i(\varphi_k - \psi_j)})}{\prod\limits_{j \neq k}^{n} (1 - e^{i(\varphi_k - \varphi_j)})} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} e^{-i\chi_j}(e^{i\chi_j} - e^{-i\chi_j})}{\prod\limits_{j=1}^{n} e^{-i\Phi_j}(e^{i\Phi_j} - e^{-i\Phi_j})} =$$

$$= 2ie^{i\sum \frac{\varphi_i - \psi_j}{2}} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \sin \chi_j}{\prod\limits_{j=1 (j \neq k)}^{n} \sin \Phi_j}, \tag{2.9}$$

где положено

$$\chi_j = \frac{\psi_j - \varphi_k}{2}, \quad \Phi_j = \frac{\varphi_j - \varphi_k}{2}.$$

Перепишем тождество (2.8) в виде

$$I = e^{i\Delta} + \frac{1}{2}\sum A_k + \frac{1}{2}\sum A_k \frac{1 + ze^{-i\varphi_k}}{1 - ze^{-i\varphi_k}}.$$

Отсюда уже легко получить (2.5), принимая во внимание выражение (2.9) для A_k и $I(0) = 1$. Поскольку $\varphi_n'(z)$ производная от однолистной выпуклой в E функции, а $p_n(z)$ — регулярная с положительной вещественной частью в E функция, то $f_n(z) \in K$, что и требовалось доказать.

Итак, если $f(z) \in B$, то $f(z) \in K$. Поэтому вместо формулы (2.1) мы можем писать формулу (2.3), где

$$\varphi_n'(z) = C_n e^{i\Delta_n} \exp\left(-2\int_0^{2\pi} \ln(1 - ze^{-i\varphi})\, d\alpha_n(\varphi)\right), \tag{2.10}$$

$$p_n(z) = -i \sin \Delta_n + \cos \Delta_n \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\varphi}}{1 - ze^{-i\varphi}} d\beta_n(\varphi). \tag{2.11}$$

Здесь функции $\alpha_n(\varphi)$ и $\beta_n(\varphi)$, неубывающие на $(0,\ 2\pi)$ с точками р… $\varphi=\varphi_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, причем скачки первой из них в этих точ… $\frac{1}{2}\mu_k$, а второй $-\gamma_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Кроме того, $C_n>0$,

$$\Delta_n=\frac{1}{2}\left(\pi+\sum_1^n\varphi_k-\sum_1^n\psi_k\right)\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),$$

где ψ_k — корни функции $p(z)$ на единичной окружности $|z|=1$, приче… $\varphi_k<\psi_k<\varphi_{k+1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, $\varphi_{n+1}=\varphi_1+2\pi$.

Если область D — ядро последовательностей областей $\{D_n\}$ класса …, то функция $f(z)$, отображающая круг E на D, есть предел последовательности $\{f_n(z)\}$ функций, отображающих E соответственно на области D_n, а $f'(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(z)$. Докажем тогда, что существует предел $\varphi_n'(z)\,p_n(z)$ при $n\to\infty$. Действительно, поскольку семейства функций соответственно $\alpha_n(\varphi)$ и $\beta_n(\varphi)$ очевидно равномерно ограничены вместе со своими полными вариациями на $[0,\ 2\pi]$, то в силу принципа выбора Хелли заключаем, что из последовательностей $\alpha_n(\varphi)$ и $\beta_n(\varphi)$ можно выбрать соответственно всюду сходящиеся подпоследовательности $\alpha_{n_k}(\varphi)\to\alpha(\varphi)$ и $\beta_{n_k}(\varphi)\to\beta(\varphi)$, где обе функции $\alpha(\varphi)$ и $\beta(\varphi)$, неубывающие на $[0;\ 2\pi]$, нормированные условиями $\beta(0)=\alpha(0)=0$, $\alpha(2\pi)=\beta(2\pi)=1$ и непрерывно справа на $[0;\ 2\pi]$. Ввиду ограниченности чисел $\Delta_n\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, можно из $\{n_k\}$ выбрать такую подпоследовательность $\{n_{k_j}\}$, что и $\Delta_{n_{k_j}}\to\Delta\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ при $k_j\to\infty$.

Но тогда, очевидно, и $C_{n_{k_j}}\to C>0$, $k_j\to\infty$. Поэтому

$$\varphi_n'(z)\to\varphi'(z)\in S^\circ,\quad p_n(z)\to p(z)\in P,$$

так что

$$f_n'(z)=\varphi_n'(z)\cdot p_n(z)\to\varphi'(z)\,p(z).$$

§ 3. **Теорема 2.** *Если $f(z)\in K$, то $f(z)\in\overline{B}$.*

Доказательство. Если $f(z)\in K$, то

$$f'(z)=\varphi'(z)\cdot p(z), \tag{3.1}$$

$$\varphi'(z)=Ce^{i\Delta}\exp\left(-2\int_0^{2\pi}\ln\left(1-ze^{-i\varphi}\right)d\alpha(\varphi)\right), \tag{3.2}$$

где $\varphi(z)\in S^\circ$ — класс регулярных однолистных выпуклых в E функций;

$$p(z)=-i\sin\Delta+\cos\Delta\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-i\varphi}}{1-ze^{-i\varphi}}\,d\beta(\varphi)\in P, \tag{3.3}$$

P — класс функций, регулярных с положительной вещественной частью в E;

$\alpha(\varphi)$ и $\beta(\varphi)$ — неубывающие на $[0,\ 2\pi]$, нормированные условиями $\int_0^{2\pi}d\alpha(\varphi)=\int_0^{2\pi}d\beta(\varphi)=1.$

Можно считать $\alpha(0)=\beta(0)=\alpha(+0)=\beta(+0)=0$. Если предположить, что $\alpha(\varphi)$, $\beta(\varphi)$ строго возрастающие на $[0,2\pi]$, т. е. $\alpha(\varphi')\neq\alpha(\varphi'')$ при $\varphi'\neq\varphi''$ и $\beta(\varphi')\neq\beta(\varphi'')$, то заменим в формулах (3.2) и (3.3) $\alpha(\varphi)$ и $\beta(\varphi)$ на $\alpha_n(\varphi)$ и $\beta_n(\varphi)$, где $\alpha_n\left(\frac{2\pi}{n}k\right)=\alpha\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$, $\beta_n\left(\frac{2\pi}{n}k\right)=\beta\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$,

$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, а на интервале $\left(\frac{2\pi}{n}k;\ \frac{2\pi}{n}(k+1)\right)$ положим $\alpha_n(\varphi)=$ $=\alpha_n\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$ и $\beta_n(\varphi)=\beta_n\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$. Тогда точками роста функций $\alpha_n(\varphi)$ и $\beta_n(\varphi)$ будут точки $\varphi=\frac{2\pi}{n}k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и скачки в данных точках у этих функций будут соответственно

$$\frac{1}{2}\mu_k^{(n)}=\alpha\left(\frac{2\pi}{n}k\right)-\alpha\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right),$$

где

$$\gamma_k^{(n)}=\beta\left(\frac{2\pi}{n}k\right)-\beta\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right),$$

$$\sum_1^n\mu_k^{(n)}=2;\ \sum\gamma_k^{(n)}=1.$$

В этом случае формула (3.1) примет вид

$$f_n'(z)=\varphi_n'(z)\cdot p_n(z), \tag{3.4}$$

где

$$\varphi_n'(z)=Ce^{i\Delta}\prod_1^n(1-ze^{-i\varphi})^{-\mu_k}; \tag{3.5}$$

$$\varphi_k=\frac{2\pi}{n}k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$\Delta=\frac{1}{2}\left(\pi+\sum_1^n\varphi_k-\sum_1^n\psi_k\right)\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right);$$

$$p_n(z)=e^{-i\Delta}\prod_{k=1}^n\frac{1-ze^{-i\psi_k}}{1-ze^{-i\varphi_k}}; \tag{3.6}$$

$$\varphi_k<\psi_k<\varphi_{k+1},\ \varphi_{n+1}=\varphi_1+2\pi.$$

Формула (3.6) следует из теоремы, доказанной в первой части. Но тогда, как видно из (3.4), (3.5), (3.6), $f_n(z)\in B$. Поскольку $f_n(z)\to f(z)$ при $n\to\infty$, то $f(z)\in B$. Следовательно, в этом случае обратная теорема верна.

Пусть теперь $\alpha(\varphi)$ и $\beta(\varphi)$ не являются строго возрастающими на $[0,\ 2\pi]$. Тогда их можно рассматривать как пределы строго возрастающих на $[0,\ 2\pi]$ функций $\alpha(\varphi;\ m)$, $\beta(\varphi;\ m)$ при $m\to\infty$. Отсюда следует, что функция $f(z)\in K$ либо принадлежит классу B, либо является пределом последовательности функций класса $\overline{B}$.

Остается доказать замкнутость класса $\overline{B}$. Последнее доказывается известным диагональным процессом. Что касается установления тождества классов B и $\overline{B}$, то оно не представляет затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Kaplan. Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math. Journal, V. 1 (1952), 169—185.

2. S. Ozaki. On the theory of multivalent functions, Sci, Rap. of the Tokyo, Bunrica Daig., sec. A 2, № 40, 1935.

3. M. Biernacki. Sur la representation conforme des domains lineairement accessibles. Prace Matematyczno-Fizyczne, 44, Warszawa, 1936, 22.

4. Z. Lewandowski. Sur l'identite de certaines clases de fonctions univalentes, 1. Annales Univ. Mariae Curie-Sklodowska, 12 (1958), 131—136; 2, ibidem, 14 (1960), 19—46.

5. A. Bielecki, Z. Lewandowski. Sur un theoreme concernant les fonctions univalentes linearement accessibles de M. Biernacki, Ann. polon. math., 12, № 1 (1962) 61—63.

6. В. А. Зморович. Об обобщении формулы Шварца — Кристоффеля на области, ограниченные кусочно-гладкими кривыми. 50 лет Киевского ордена Ленина политехнического института. Юбилейный сб., Киев, 1948, 643—653.

7. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.

Поступила 30 июня 1967 г.