Выпуск 8 1969

О МАКСИМАЛЬНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ φ-ОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА*

Б. А. Мирман

Замкнутый линейный оператор T с плотной областью определения D_T, действующий в гильбертовом пространстве H, будем называть φ-ограниченным, если множество $W(T)=\{(Tx,\ x): x\in D_T\}$ видно из начала координат под углом φ. Так как $W(T)$ выпукло и вместе с каждой точкой содержит весь луч, проходящий через нее из начала координат, то $W(T)$ есть либо вся комплексная плоскость, либо угол, равный $\varphi\in[0,\pi]$. Пусть $\lambda\,\overline{\in}\,W(T)$; если $(T-\lambda I)D_T=H$, то оператор T будем называть максимальным. Такое название можно оправдать тем, что максимальный φ-ограниченный оператор нельзя далее продолжить с сохранением φ-ограниченности. В самом деле, пусть $x\,\overline{\in}\,D_T$, $y\in H$; если мы положим $\tilde{T}(u+\alpha x)=Tu+\alpha y(u\in D_T)$, то оператор $\tilde{T}$ уже не будет φ-ограниченным: найдем $u\in D_T$ такой, что $-\lambda u+Tu=-\lambda x+y$; тогда $\tilde{T}(u-x)=$ $=\lambda(u-x)$ и $\lambda\in W(\tilde{T})$.

В этой заметке доказывается, что любой φ-ограниченный оператор можно продолжить до максимального φ-ограниченного. Доказательство опирается главным образом на лемму 1, которая является естественным обобщением известной теоремы о возможности расширения произвольного сжатия до изометрического оператора.

Лемма 1. *Пусть T — неотрицательный оператор, действующий в подпространстве L гильбертова пространства H, S — определенный на L оператор со значениями в H; и пусть $\|Sx\|^2\leqslant(Tx,\ x)$ для всех $x\in L$. Тогда существует гильбертово пространство $\boldsymbol{H}\supset H$ и оператор $\tilde{S}$, определенный на L со значениями в $\boldsymbol{H}$, такой, что*

$$\|\tilde{S}x\|^2=(Tx,\ x),\quad P\tilde{S}=S,$$

где P — ортогональный проектор из $\boldsymbol{H}$ на H.

Доказательство. При фиксированном $y\in H$ выражение $(Sx,\ y)$ есть линейный функционал, определенный для всех $x\in L$. Согласно теореме Ф. Рисса существует $h\in L$ такой, что $(Sx,\ y)=(x,\ h)$. Положим: $S^1y=h$. S^1 является, очевидно, линейным оператором, определенным на всем H со значениями в L, причем для всех $x\in L$ $(S^1Sx,\ x)=\|Sx\|^2$. Согласно условию действующий в L оператор $T-S^1S$ неотрицателен, так что существует неотрицательный оператор $(T-S^1S)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть V — изометрический оператор, действующий из L на некоторое гильбертово пространство H_1, и пусть $S_1=V(T-S^1S)^{\frac{1}{2}}$. Положим $\boldsymbol{H}=H\oplus H_1$, $\tilde{S}=S\oplus S_1$. Тогда, очевидно, $P\tilde{S}=S$. Кроме того, для любого $x\in L$

* Задача была поставлена проф. И. М. Глазманом.

$$\|\tilde{S}x\|^2 = \|Sx\|^2 + \|S_1x\|^2 = (S^1Sx, x) + (V(T - S^1S)^{\frac{1}{2}} x, V(T - S^1S)^{\frac{1}{2}} x) = (Tx, x).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть линейный оператор S, определенный на подпространстве $L \subset H$, удовлетворяет (для некоторого $0 < \varphi < \pi$) условиям*

$$\operatorname{Im}(x, Sx) \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\sin\varphi (\|x\|^2 - \|Sx\|^2) = 2\cos\varphi \cdot \operatorname{Im}(x, Sx). \tag{2}$$

Тогда оператор S можно продолжить на все H с сохранением условий (1), (2).

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $x \in L$, $x \neq 0$ $(1 + e^{-i\varphi})x + (1 - e^{-i\varphi})Sx \neq 0$. В самом деле, иначе при некотором $x \in L$, $x \neq 0$

$$(1 - e^{i\varphi})(x, Sx) + (1 + e^{i\varphi})\|x\|^2 = 0,$$

откуда $(x, Sx) = \dfrac{-2i\sin\varphi}{|e^{i\varphi} - 1|^2}\|x\|^2$, что противоречит (1). Теперь можно определить следующий оператор A с

$$D_A = [(1 + e^{-i\varphi})I + (1 - e^{-i\varphi})S]\, L;$$

$$y = (1 + e^{-i\varphi})x + (1 - e^{-i\varphi})Sx; \quad (x \in L)$$

$$Ay = (1 - e^{-i\varphi})x + (1 + e^{-i\varphi})Sx.$$

Так как

$$\|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|Sx\|^2) + 2\cos\varphi(\|x\|^2 - \|Sx\|^2) + 4\sin\varphi \operatorname{Im}(x, Sx),$$

$$\|Ay\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|Sx\|^2) - 2\cos\varphi(\|x\|^2 - \|Sx\|^2) - 4\sin\varphi \operatorname{Im}(x, Sx),$$

то

$$\|y\|^2 - \|Ay\|^2 = \frac{8}{\sin\varphi}\operatorname{Im}(x, Sx) \geqslant 0,$$

значит $\|A\| \leqslant 1$.

Кроме того,

$$(Ay, y) = 2i[\sin\varphi(\|x\|^2 - \|Sx\|^2) - 2\cos\varphi \operatorname{Im}(x, Sx)] + 4\operatorname{Re}(Sx, x) = \operatorname{Re}(Ay, y).$$

Поэтому

$$(Au, v) = (u, Av) \qquad (u, v \in D_A).$$

Следовательно, A — ограниченный симметрический оператор. Как известно (см., например, [1]), существует самосопряженное продолжение $\tilde{A}$ оператора A, сохраняющее норму. Положим

$$u = (1 + e^{i\varphi})y + (1 - e^{i\varphi})\tilde{A}y,$$

$$\tilde{S}u = (1 - e^{i\varphi})y + (1 + e^{i\varphi})\tilde{A}y.$$

Когда y пробегает все H, u также пробегает все H, так как $\dfrac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = i\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$ и $\tilde{A} = \tilde{A}^*$.

Кроме того, очевидно, при $u \in L$ $\tilde{S}u = Su$. Наконец,

$$(u, \tilde{S}u) = 4(\tilde{A}y, y) + 2i\sin\varphi(\|y\|^2 - \|\tilde{A}y\|)^2;$$

$$\|u\|^2 = 2(\|y\|^2 + \|\tilde{A}y\|^2) + 2\cos\varphi(\|y\|^2 - \|\tilde{A}y\|^2);$$

$$\|\tilde{S}u\|^2 = 2(\|y\|^2 + \|\tilde{A}y\|^2 - 2\cos\varphi(\|y\|^2 - \|\tilde{A}y\|^2);$$

следовательно, $\operatorname{Im}(u, \tilde{S}u) \geqslant 0$,

$$\sin\varphi(\|u\|^2 - \|\tilde{S}u\|^2) = 2\cos\varphi \cdot \operatorname{Im}(u, \tilde{S}u).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть линейный оператор S, определенный на подпространстве $L \subset H$, удовлетворяет для некоторого $0 < \varphi < \pi$ условиям*

$$\operatorname{Im}(x, Sx) \geqslant 0,$$

$$\sin\varphi(\|x\|^2 - \|Sx\|^2) \geqslant 2\cos\varphi \operatorname{Im}(x, Sx).$$

Тогда оператор S можно продолжить на все H с сохранением этих условий.

Доказательство. Так же как при доказательстве леммы 1, определим на H оператор S^1 со значениями в L, такой, что $(Sx, y) = (x, S^1y)(x \in L, \ y \in H)$. И пусть P_1 — ортопроектор на L, $T = I - i\operatorname{ctg}\varphi(S - S')P_1$. Тогда $(Tx, x) = \|x\|^2 + 2\operatorname{ctg}\varphi \operatorname{Im}(Sx, \ x) \geqslant \|Sx\|^2$, так что операторы T и S удовлетворяют условиям леммы 1. Применяя эту лемму, получим оператор $\tilde{S}$, определенный на L со значениями в $\mathbf{H} \supset H$ такой, что $\|\tilde{S}x\|^2 = (Tx, x)$ и $P\tilde{S} = S$, где P — ортопроектор из $\mathbf{H}$ на H. Так как при $x \in L$ $(x, Sx) = (x, Sx)$, то для оператора $\tilde{S}$ выполняются условия

$$\operatorname{Im}(x, \tilde{S}x) \geqslant 0, \tag{1'}$$

$$\sin\varphi(\|x\|^2 - \|\tilde{S}x\|^2) = 2\cos\varphi \operatorname{Im}(x, \tilde{S}x). \tag{2'}$$

По лемме 2 существует определенный на $\mathbf{H}$ оператор $\tilde{\tilde{S}}$, для которого также выполняются (1′), (2′). Очевидно, оператор $R = P\tilde{\tilde{S}}P$ и есть искомый. В самом деле, для любого $x \in H$ $(Rx, x) = (\tilde{\tilde{S}}x, x)$, так что $\operatorname{Im}(x, Rx) \geqslant 0$. Кроме того,

$$\sin\varphi(\|x\|^2 - \|Rx\|^2) = \sin\varphi(\|x\|^2 - \|P\tilde{\tilde{S}}x\|^2) \geqslant \sin\varphi(\|x\|^2 - \|\tilde{\tilde{S}}x\|^2) =$$

$$= 2\cos\varphi \operatorname{Im}(x, \tilde{\tilde{S}}x) = 2\cos\varphi \operatorname{Im}(x, Rx).$$

Теорема. *Всякий φ-ограниченный оператор T $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ можно продолжить до максимального φ-ограниченного.*

Доказательство. Если $\varphi = 0$, то без ограничения общности можно считать, что T — полуограниченный симметрический оператор с плотной областью определения. Этот случай подробно рассмотрен рядом авторов (см., например, [1]), мы не будем на нем останавливаться.

Легко решается вопрос в случае $\varphi = \pi$. Пусть $\operatorname{Re}(Tx, x) \geqslant 0$. На линейном множестве $(I + T)D_T$ определим оператор S:

$$q = f + Tf, \tag{3}$$

$$Sq = f - Tf. \tag{4}$$

Тогда

$$4(Tf, f) = \|g\|^2 - \|Sg\|^2 + 2i \operatorname{Im}(g, Sg), \tag{5}$$

так что $\|g\|^2 - \|Sg\|^2 \geqslant 0$ или $\|S\| \leqslant 1$. Любое продолжение $\tilde{S}$ оператора S на все H без изменения нормы дает искомое максимальное продолжение $\tilde{T}$ оператора T по формулам

$$u = g + \tilde{S}g, \tag{6}$$

$$\tilde{T}u = g - \tilde{S}g. \tag{7}$$

Показать здесь надо, что при любом $g \in H$ $g \neq 0$ $g + \tilde{S}g \neq 0$. Предположим противное. Пусть -1 есть собственное значение оператора $\tilde{S}$. Тогда $\|\tilde{S}\| = |-1|$, так что [2] $g + \tilde{S}^*g = 0$. Следовательно, при любом $h \in H$

$$(h + \tilde{S}h,\ g) = (h,\ g + \tilde{S}^*g) = 0.$$

В частности, при любом $h \in D_S$

$$(h + \tilde{S}h,\ g) = (h + Sh,\ g) = 0.$$

Но множество $(I + S)D_S = D_T$ плотно в H, так что $g = 0$. Получили противоречие. Итак, (6), (7) задают искомый оператор.

Пусть теперь $0 < \varphi < \pi$, т. е. пусть T таков, что при $x \in D_T$

$$\operatorname{Im}(Tx,\ x) \geqslant 0, \tag{8}$$

$$\sin\varphi \operatorname{Re}(Tx,\ x) \geqslant \cos\varphi \operatorname{Im}(Tx,\ x). \tag{9}$$

Опять рассмотрим оператор S, задаваемый (3), (4), (так как $-1 \bar{\in} W(T)$, то при $f \in D_T f + Tf \neq 0$). Из (5), (8), (9) следует, что оператор S удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Im}(g,\ Sg) \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\sin\varphi(\|g\|^2 - \|Sg\|^2) \geqslant 2\cos\varphi \operatorname{Im}(g,\ Sg). \tag{11}$$

Из (11) следует, что $\|S\| \leqslant \max\left(1,\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$, т. е. S — ограниченный оператор, и потому его область определения $D_S = (I + T)D_T$ без ограничения общности можно считать подпространством. По лемме 3 благодаря (10), (11) оператор S можно продолжить до оператора $\tilde{S}$, определенного на всем H, для которого также выполняются условия (10), (11).

Теперь покажем, что оператор $\tilde{T}$, определяемый формулами (6), (7), и будет искомый. Для этого, как и в случае $\varphi = \pi$, сперва убедимся, что при $g \in H$ $g \neq 0$ $g + \tilde{S}g \neq 0$. В самом деле, согласно (10) точка -1 не лежит внутри числовой области $\Omega(\tilde{S}) = \{(\tilde{S}x,\ x) : \|x\| = 1\}$ оператора $\tilde{S}$. Поэтому [2] из $g + \tilde{S}g = 0$ следует $g + \tilde{S}^*g = 0$. Но тогда при любом $h \in H$

$$(h + \tilde{S}h,\ g) = (h,\ g + \tilde{S}^*g) = 0.$$

В частности, при любом $h \in D_S$

$$(h + \tilde{S}h,\ g) = (h + Sh,\ g) = 0.$$

Из плотности в H множества $(I + S)D_S = D_T$ следует, что $g = 0$. При $u \in D_T$, очевидно, $\tilde{T}u = Tu$. Так как $(I + \tilde{T})D_{\tilde{T}} = D_{\tilde{S}} = H$, то $\tilde{T}$ — максимальный. Остается убедиться, что $\tilde{T}$ — φ — ограниченный, $(\tilde{T}u, u) = \|g\|^2 - \|\tilde{S}g\|^2 + 2i \operatorname{Im}(g, \tilde{S}g)$, так что из (10), (11) следует

$$\operatorname{Im}(\tilde{T}u, u) \geqslant 0,$$

$$\sin\varphi \operatorname{Re}(\tilde{T}u, u) \geqslant \cos\varphi \operatorname{Im}(\tilde{T}u, u).$$

Теорема доказана.

Замечание. Проведенные рассуждения могут показаться более естественными, если применить язык графика.

1°. Пусть $\boldsymbol{H} = H \oplus H$, $U\{u, v\} = \{v, u\}$, $V\{u, v\} = \{v, -u\}$, $U(\varphi) = U\cos\varphi + iV\sin\varphi$, $P\{u, v\} = u$. Можно показать, что если L — подпространство в $\boldsymbol{H}$, PL плотно в H и для всех $z \in L$

$$(Uz, z) \geqslant 0, \tag{I}$$

$$(U(\varphi)z, z) \geqslant 0 \qquad (0 < \varphi \leqslant \pi), \tag{II}$$

то L есть график некоторого φ-ограниченного оператора. Такое подпространство будем называть максимальным, если оно является графиком максимального φ-ограниченного оператора.

2°. Если в предыдущем предложении (II) заменить на

$$(U(\varphi)z, z) = 0, \tag{II$'$}$$

то без ограничения общности можно считать L графиком полуограниченного симметрического оператора; такой оператор, как известно, можно продолжить до самосопряженного полуограниченного, т. е. существует подпространство $\tilde{L} \supset L$, на котором выполняются I и II$'$ и которое максимально.

3°. Оператор $U(\varphi)$ является, очевидно, самосопряженным унитарным оператором, а множество $K = \{z \in \boldsymbol{H} : (U(\varphi)z, z) \geqslant 0\}$ — своего рода «конус» (точнее, K — объединение двух конусов, являющихся продолжением друг друга; если $z_1, z_2 \in K$, $z_1 + z_2 \overline{\in} K$, то $z_1 - z_2 \in K$). Из п. 2° следует, что если L лежит на «границе» конуса, то его можно расширить до максимального. Доказательство теоремы проведено на самом деле таким образом: пространство $\boldsymbol{H}$ расширено до $\boldsymbol{H}_1 = H_1 \oplus H_2 (H_1 \supset H_2)$ так, что некоторое подпространство L_1 лежит на границе соответствующего «конуса» и $QL_1 = L$ (Q — ортопроектор из $\boldsymbol{H}_1$ на $\boldsymbol{H}$), затем L_1 расширяется до максимального $\tilde{L}_1$ и показывается, что подпространство $Q\tilde{L}_1$ — искомое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. «Наука», М., 1966.

2. W. F. Donoghue. On the numerical range of a bounded operator. Michigan mathematical journal, vol. 4, № 3, 1957.

Поступила 30 декабря 1967 г.