ВЫПУСК 8 196

ЧИСЛОВАЯ ОБЛАСТЬ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРА И ЕГО СПЕКТР

Б. А. Мирман

Пусть T — вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, $\Omega(T)$ — его числовая область, т. е. множество точек λ комплексной плоскости, представимых в виде (Tx, x), где $\|x\| = 1$. Как известно [1, 2], $\Omega(T)$ есть ограниченное выпуклое подмножество комплексной плоскости. Кроме того, известно [3], что всякая угловая точка области $\Omega(T)$ есть точка спектра оператора T. В этой статье рассматривается, как характеризуют спектр вполне непрерывного оператора T неугловые крайние точки области $\Omega(T)$, т, е. «криволинейные» участки границы этой области (теорема 2). Предварительно устанавливается, как устроена граница области $\Omega(T)$ (теорема 1).

Обозначим

$$A = \operatorname{Re} T = \frac{1}{2}(T + T^*), \ B = \operatorname{Im} T = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Лемма 1. *Пусть $\zeta = \xi + i\eta$ — граничная точка $\Omega(T)$ и пусть опорная прямая, проведенная к $\Omega(T)$ через точку ζ, составляет с вещественной осью угол φ. Тогда $\lambda = \eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi$ есть нижняя грань спектра эрмитова оператора $B\cos\varphi - A\sin\varphi$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $T_1 = e^{-i\varphi}(T - \zeta I)$. Легко видеть, что $\Omega(T_1)$ целиком лежит в верхней полуплоскости, т. е. $(B_1x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in H$, где $B_1 = \operatorname{Im} T_1 = \frac{1}{2i}(T_1 - T_1^*)$. С другой стороны, 0 есть граничная точка области $\Omega(T_1)$. Поэтому существует последовательность нормированных векторов x_n, для которых $(B_1x_n, x_n) \to 0$. Следовательно, 0 есть нижняя грань спектра оператора B_1. Но $B_1 = B\cos\varphi - A\sin\varphi - (\eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi)I$, так что $\eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi$ — нижняя грань спектра оператора $B\cos\varphi - A\sin\varphi$,

Следствие 1. *Если $(Tx, x) = \zeta$, $\|x\| = 1$, то вектор x является собственным для оператора $B\cos\varphi - A\sin\varphi$, отвечающим собственному числу $\lambda = \eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi$.*

В самом деле, из $(Tx, x) = \zeta$ следует, что $(B_1x, x) = 0$ и, так как $B_1 > 0$, $B_1x = 0$. Поэтому $(B\cos\varphi - A\sin\varphi)x = \lambda x$.

Следствие 2. *Если $\lambda \neq 0$, то $\zeta \in \Omega(T)$.*

Действительно, пусть $(Tx_n, x_n) \to \zeta$, $\|x_n\| = 1$. Тогда $(B\cos\varphi - A\sin\varphi)x_n - \lambda x_n \to 0$. Так как оператор $B\cos\varphi - A\sin\varphi$ вполне непрерывен, то можно считать, что последовательность $(B\cos\varphi - A\sin\varphi)x_n$ сходится к некоторому вектору y. Следовательно, $x_n \to \frac{1}{\lambda}y = x$, $(Tx, x) = \zeta$, $\|x\| = 1$, т. е, $\zeta \in \Omega(T)$.

Следствие 3. *Если через точку ζ границы области $\Omega(T)$ можно провести опорную прямую, не проходящую через начало координат, то* $\lambda \neq 0$ и $\zeta \in \Omega(T)$.

В самом деле, как легко видеть, λ представляет (с точностью до ...а) расстояние от начала координат до рассматриваемой опорной пря... и, согласно следствию 2, $\zeta \in \Omega(T)$.

Пусть $\alpha \in \Omega(T)$. Множество, состоящее из всех таких $x \in H$, что $\frac{(Tx, x)}{\|x\|^2} = \alpha$ и нуля пространства H, будем обозначать через $L_\alpha(T)$. Это множество, очевидно, однородно, т. е. вместе с x $L_\alpha(T)$ содержит и целую прямую, проходящую через x и нуль. Однако, вообще говоря, $L_\alpha(T)$ не будет подпространством пространства H.

Лемма 2. *Если $\zeta = \xi + i\eta$ — крайняя точка $\Omega(T)$ и существует опорная к $\Omega(T)$ прямая, проходящая через ζ и не проходящая через начало координат, то $L_\zeta(T)$ — конечномерное подпространство пространства H.*

Доказательство. Пусть в обозначениях леммы 1 $A_1 = \frac{1}{2}(T_1 + T_1^*)$ и $E = \{x \in H : \cos\varphi Bx - \sin\varphi Ax = (\eta\cos\varphi - \zeta\sin\varphi)x\}$. Если $x \in L_\zeta(T) = L_0(T_1)$, то согласно следствию 1 из леммы 1 $x \in E$, $(B_1x, x) = 0$, $(T_1x, x) = (A_1x, x)$. Так как нуль — крайняя точка $\Omega(T_1)$, то (A_1x, x) не может менять знака на E. Поэтому (см., например, [4, стр. 284]

$$|(A_1x, y)|^2 \leqslant (A_1x, x)(A_1y, y) = (x, A_1y) = 0 \, (x, y \in E).$$

Отсюда, если $(T_1x, x) = 0$, $(A_1x, y) = (x, A_1y) = 0 \, (x, y \in E)$, т. е. x ортогонален к подпространству A_1E. Таким образом, мы показали, что $L_\zeta(T) \subset E \cap (A_1E)^\perp$, где $(A_1E)^\perp$ — ортогональное дополнение к A_1E. С другой стороны, если $x \in E \cap (A_1E)^\perp$, то $B_1x = 0$ и $(x, A_1y) = 0$ для любого $y \in E$, в частности, $(x, A_1x) = (A_1x, x) = 0$. Следовательно, $(T_1x, x) = (A_1x, x) + i(B_1x, x) = 0$ и $x \in L_0(T_1) = L_\zeta(T)$, т. е. $E \cap (A_1E)^\perp \subset L_\zeta(T)$. Тем самым доказано равенство $L_\zeta(T) = E \cap (A_1E)^\perp$, т. е. что $L_\zeta(T)$ — подпространство пространства H. Осталось заметить, что согласно следствию 3 $\lambda = \eta\cos\varphi - \xi\sin\varphi \neq 0$ и подпространство E конечномерно, тогда конечномерно и $L_\zeta(T)$. Лемма доказана.

Размерность подпространства $L_\zeta(T)$ будем называть кратностью точки ζ. Перейдем к рассмотрению структуры границы числовой области вполне непрерывного оператора. Всюду ниже будем считать, что пространство H бесконечномерно, и тогда начало координат, как точка спектра оператора T, принадлежит замыканию $\overline{\Omega(T)}$ [5].

Обозначим через $m(\varphi)$ размерность собственного подпространства оператора $B\cos\varphi - A\sin\varphi$, отвечающую нижней грани $\lambda(\varphi)$ спектра этого оператора. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda(-\pi) = \lambda(\pi) \neq 0$. Если начало координат лежит на границе области $\Omega(T)$, то существует $\varphi \in (-\pi, \pi)$ такое, что $\lambda(\varphi) = 0$. Из выпуклости $\Omega(T)$ следует, что множество $\{\varphi \in (-\pi, \pi) : \lambda(\varphi) = 0\}$ представляет некоторый отрезок $[\psi, \psi']$ (который может выродиться в точку, если $\psi = \psi'$). При $\varphi_0 \in [-\pi, \psi) \cup (\psi', \pi]$ $m(\varphi_0)$, очевидно, конечно (так как $B\cos\varphi_0 - A\sin\varphi_0$ — вполне непрерывный оператор и $\lambda(\varphi_0) \neq 0$). Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при $|\varphi - \varphi_0| < \delta$ $m(\varphi) \leqslant m(\varphi_0)$ [6, стр. 30]. Следовательно, целочисленная положительная функция $m(\varphi)$ на отрезке $[-\pi, \psi - \varepsilon]$ при достаточно малом произвольном $\varepsilon > 0$ полунепрерывна сверху (также и на отрезке $[\psi' + \varepsilon, \pi]$).

Значит, на этих отрезках $m(\varphi)$ может иметь лишь конечное число разрывов. Перенумеруем все точки ψ_i разрыва функции $m(\varphi)$ на полуинтервалах $[-\pi, \psi)$ и $(\psi', \pi]$:

$$-\pi \leqslant \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi \leqslant \psi' < \ldots < \psi_{-2} < \psi_{-1} \leqslant \pi.$$

Заметим, что некоторые из точек ψ_j могут быть определены по внешнему виду числовой области. А именно, если граница числовой области содержит отрезок, составляющий угол $\varphi_0 \in [-\pi, \psi)$ (или $\in (\psi', \pi]$) с вещественной осью, то φ_0 совпадает с одним из ψ_j, $j = 1, 2 \ldots$ (или $j = -1, -2 \ldots$), т. е. φ_0 — точка разрыва $m(\varphi)$. Доказательство этого утверждения для случая вполне непрерывного оператора ничем не отличается от приведенного в [7] для конечномерного и здесь повторяться не будет.

Пусть $\varphi \in (\psi_j, \psi_{j+1})$, тогда опорная к $\Omega(T)$ прямая, составляющая с вещественной осью угол φ, имеет с $\Omega(T)$ ровно одну общую точку $\zeta = \zeta(\varphi)$. Эта точка, очевидно, крайняя для области $\Omega(T)$, и, как видно из доказательства леммы 2, кратность точки $\zeta(\varphi)$ совпадает с $m(\varphi)$. Может случиться, что при всех $\varphi \in (\psi_j, \psi_{j+1})$ $\zeta(\varphi)$ — константа, $\zeta(\varphi) \equiv \zeta_0$, и тогда ζ_0 — угловая точка области $\Omega(T)$. Этот случай подробно рассмотрен в [3] и других работах. Будем считать, что ни одна из точек $\zeta(\varphi)$ $(\psi_j < \varphi < \psi_{j+1})$ не является угловой.

Определение. *Связный участок ζ границы числовой области $\Omega(T)$ будем называть регулярной дугой этой границы, если ζ содержит более одной точки и все точки $\zeta \in s$ являются неугловыми крайними точками для $\Omega(T)$ одной и той же кратности. Если α и β — концы дуги, то обозначать ее будем $[\alpha, \beta]$ или (α, β) в зависимости от того, принадлежат или не принадлежат дуге ее концы.*

Так как $m(\varphi)$ постоянно при $\psi_j < \zeta < \psi_{j+1}$ и кратность точки $\zeta(\varphi)$ совпадает с $m(\varphi)$, то множество $\{\zeta = \zeta(\varphi) : \psi_j < \varphi < \psi_{j+1}\}$ есть регулярная дуга. Пусть α_j, β_j — ее концы. Если для какого-нибудь j_0 $\alpha_{j_0} = \beta_{j_0}$, то α_{j_0}, как уже отмечалось выше, есть угловая точка $\Omega(T)$. Если для некоторого j $\beta_j \neq \alpha_{j+1}$, то участок границы от точки β_j до точки α_{j+1} есть отрезок прямой. В самом деле, опорные прямые к $\Omega(T)$, проведенные через эти точки, составляют с вещественной осью один и тот же угол ψ_{j+1}, и потому должны сливаться, а из выпуклости $\Omega(T)$ следует, что отрезок этой опорной прямой, соединяющий точки β_j и α_{j+1} принадлежит границе $\Omega(T)$. Таким образом, участок границы от α_j до β_j или от β_j до α_{j+1} — либо регулярная дуга, либо отрезок прямой $(j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Если множество $\{\alpha_j, \beta_j\}$ бесконечно, например, если существует α_j, β_j при всех натуральных j, то существует $\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_j = \lim\limits_{j\to\infty} \beta_j$. В самом деле, пусть $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ j_k \to +\infty}} \beta_{j_k} = \beta$. Тогда β — крайняя точка области $\Omega(T)$, $\psi_{j_k} \to \psi$ и опорная прямая, проведенная через точку β, составляет с вещественной осью угол ψ. Отсюда следует единственность точки β. Так как точка α_j лежит между точками β_{j-1} и β_j, то и $\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_j = \beta$. Аналогично, если существует α_{-j}, β_{-j} при всех натуральных j, то существует $\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_{-j} = \lim\limits_{j\to\infty} \beta_{-j} = \alpha$, и опорная прямая, проведенная через α, составляет с вещественной осью угол ψ'. Так как $\lambda(\psi) = \lambda(\psi') = 0$, то эти опорные прямые проходят через начало координат. Если точка α (точка β) не совпадает с началом координат 0, то, очевидно, отрезок, соединяющий 0 с α (β), принадлежит границе области $\Omega(T)$. Если точек α_j, β_j конечное число*, то возможность разбиения всей границы области $\Omega(T)$ на конечное число регулярных дуг и отрезков очевидна. Итак доказана

---

* Так будет, например, в случае, если начало координат лежит внутри $\Omega(T)$, поскольку $\lambda(\varphi) \neq 0$ при всех $\varphi \in [-\pi, \pi]$, и имеется лишь конечное число значений φ, при которых $m(\varphi)$ разрывна. В этом случае $\Omega(T) = \overline{\Omega(T)}$. Если же 0 лежит на границе $\Omega(T)$, то как 0, так и точки отрезка, соединяющего 0 с α или с β, могут принадлежать, а могут и не принадлежать $\Omega(T)$. Других предельных точек $\Omega(T)$, не принадлежащих ей, очевидно, не существует.

Теорема 1. *Граница числовой области вполне непрерывного оператора представляет объединение конечного или счетного множества отрезков и регулярных дуг.*

В дальнейшем нам потребуется теорема Реллиха (см. например, [3, стр. 627]).

Теорема Реллиха. *Пусть $T(\mu)$ — операторнозначная целая функция параметра μ, λ_0 — изолированная точка спектра оператора $T(\mu_0)$ конечной алгебраической кратности m. Пусть в замкнутом круге U нет других точек спектра оператора $T(\mu_0)$, кроме λ_0. Тогда существует $\delta > 0$, целые числа $k \leqslant m$ и n такие, что при $|\mu - \mu_0| < \delta$ в круге U имеется ровно k собственных чисел $\lambda_1(\mu), \ldots, \lambda_k(\mu)$ оператора $T(\mu)$, каждая из которых разлагается в ряд по степеням главного значения $(\mu - \mu_0)^{\frac{1}{n}}$:*

$$\lambda_j(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^j (\mu - \mu_0)^{\frac{i}{n}} \quad (a_0^{(j)} = \lambda_0,\ j = 1, \ldots, k);$$

кратности m_j этих собственных чисел удовлетворяют соотношению $m_1 + \ldots + m_k = m$; если

$$\lambda_1(\mu) \equiv \lambda_2(\mu) \equiv \ldots \equiv \lambda_k(\mu), \textit{ то } n = 1.$$

Из этой теоремы, а именно из последнего ее утверждения следует, что если дуга $s = \{\zeta = \zeta(\varphi);\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$* регулярна, то $\lambda(\varphi)$ — аналитическая в некоторой окрестности интервала (φ_1, φ_2) функция. Более того, в этой окрестности будет аналитична и функция $\zeta(\varphi)$.

В самом деле, пусть $\xi(\varphi) = \operatorname{Re}\zeta(\varphi)$, $\eta(\varphi) = \operatorname{Im}\zeta(\varphi)$. Согласно лемме 1

$$\lambda(\varphi) = \eta(\varphi)\cos\varphi - \xi(\varphi)\sin\varphi. \tag{1}$$

Так как опорная прямая, проведенная через $\zeta = \zeta(\varphi)$, является касательной к s, то для всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$, для которых существуют $\xi'(\varphi)$, $\eta'(\varphi)$,

$$\eta'(\varphi)\cos\varphi - \xi'(\varphi)\sin\varphi = 0 \tag{2'}$$

и

$$\lambda'(\varphi) = -\eta(\varphi)\sin\varphi - \xi(\varphi)\cos\varphi. \tag{2}$$

Но $\xi(\varphi)$ и $\eta(\varphi)$ кусочно-монотонны, так что (2′), а значит и (2), выполняется почти для всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$. Из непрерывности обеих частей равенства (2) следует выполнение (2) для всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$. Из (1) и (2)

$$\xi(\varphi) = -\lambda(\varphi)\sin\varphi - \lambda'(\varphi)\cos\varphi,$$

$$\eta(\varphi) = \lambda(\varphi)\cos\varphi - \lambda'(\varphi)\sin\varphi$$

или

$$\zeta(\varphi) = \xi(\varphi) + i\eta(\varphi) = e^{i\varphi}[i\lambda(\varphi) - \lambda'(\varphi)] \tag{3}$$

при всех φ из интервала (φ_1, φ_2). Отсюда следует аналитичность функции $\zeta(\varphi)$ в окрестности интервала (φ_1, φ_2), в которой аналитична $\lambda(\varphi)$.

Теорема 2. *Пусть $s = \{\zeta = \zeta(\varphi);\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ — регулярная дуга границы числовой области $\Omega(T)$ вполне непрерывного оператора T. И пусть $\tilde{g}(z)$ — какое-нибудь аналитическое продолжение функции $g(z) = \zeta(-i\ln z)$ $(z = e^{i\varphi},\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2)$ на область G, замыкание которой содержит нуль.*

---

* Таким обозначением мы уже пользовались; $\zeta = \zeta(\varphi)$ — это та крайняя точка области $\Omega(T)$, через которую можно провести опорную прямую, составляющую с вещественной осью угол φ; такая точка единственна, т. к. s регулярна и потому не может содержать отрезков.

Тогда $\tilde{g}(0)$ — точка спектра оператора T. Если 0 лежит на границе области G, $z_n \in G$ и z_n стремится к нулю по некасательному к границе области G пути, то под $\tilde{g}(0)$ понимается предел $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{g}(z_n)$, который существует.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $-\pi < \varphi_1 < \varphi_2 < 0$. Обозначим через $\mu(t)$ нижнюю грань спектра оператора $A + tB$ при $t = \operatorname{Re} t$ $(A = \operatorname{Re} T,\ B = \operatorname{Im} T)$. Очевидно, при $\varphi_1 < < \varphi < \varphi_2$

$$\mu(-\operatorname{ctg}\varphi) + (i + \operatorname{ctg}\varphi)\,\mu'(-\operatorname{ctg}\varphi) = e^{i\varphi}[i\lambda(\varphi) - \lambda'(\varphi)],$$

или согласно (3)

$$g(z) = \mu(t) + (i - t)\,\mu'(t), \tag{4}$$

где

$$z = e^{i\varphi},\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2,\ t = -\operatorname{ctg}\varphi = i\,\frac{1+z^2}{1-z^2}.$$

Пусть $t_1 = -\operatorname{ctg}\varphi_1$, $t_2 = -\operatorname{ctg}\varphi_2$ и F — область комплексной плоскости t, содержащая интервал (t_1, t_2), имеющая на своей границе точку i и отображаемая некоторой ветвью функции $z = \sqrt{\frac{t-i}{t+i}}$ в область G. Очевидно, область G можно считать ограниченной и тогда $-i \,\bar{\in}\, F$. Область F не содержит, таким образом, особых точек функции $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$ (точки $\pm i$), так что функция $\tilde{g}\left(\sqrt{\frac{t-i}{t+i}}\right)$ аналитична в F. Из (4) следует, что функция $\mu(t)$ допускает аналитическое продолжение $\tilde{\mu}(t)$ на область F, причем

$$\tilde{\mu}(t) = \mu(t_0) + (i - t)\int\limits_{t_0}^{t} g\left(\sqrt{\frac{\tau - i}{\tau + i}}\right)\frac{d\tau}{(i-\tau)^2}, \tag{5}$$

где $t_0 \in (t_1, t_2)$, а интеграл берется вдоль спрямляемой линии, целиком лежащей в F и соединяющей точки t_0 и t. Из теоремы Реллиха легко следует, что $\tilde{\mu}(t)$ есть точка спектра оператора $A + tB$ при всех $t \in F$.

Отметим некоторые свойства функции $\tilde{\mu}(t)$.

1) Для любой точки t' границы области F существует

$$\lim_{\substack{t\to t'\\ t\in F}} \tilde{\mu}(t).$$

В самом деле, пусть $t_n \to t'$, $t_n \in F$. Так как

$$|\tilde{\mu}(t_n)| \leqslant \|A\| + |t_n|\cdot\|B\|, \tag{6}$$

то числа $\{\tilde{\mu}(t_n)\}$ ограничены в совокупности и можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\tilde{\mu}(t_{n_k}) \to \tilde{\mu}$. Операторы $A + t_{n_k}B - \tilde{\mu}(t_{n_k})\,I$ не имеют обратных, так что $A + t'B - \tilde{\mu}I$ тоже не имеет обратного, т. е. $\tilde{\mu}$ — точка спектра оператора $A + t'B$. Если $\tilde{\mu} \neq 0$, то $\tilde{\mu}$ есть собственное значение оператора $A + t'B$ конечной алгебраической кратности и по теореме Реллиха t' — либо регулярная точка функции $\tilde{\mu}(t)$, либо алгебраическая точка ветвления функции $\tilde{\mu}(t)$; в обоих случаях существует

$\lim\limits_{t\in F}\tilde{\mu}(t)$. Отсюда, кроме того, получаем, что если $\tilde{\mu}=0$, то и для любой другой подпоследовательности t'_{n_k}, для которой $\tilde{\mu}(t'_{n_k})$ сходится, $\lim\limits_{k}\tilde{\mu}(t'_{n_k}) = 0$. Но это и означает, что $\lim\limits_{t\in F,\ t\to t'}\tilde{\mu}(t)=0$. Итак, $\lim\limits_{t\in F,\ t\to t'}\tilde{\mu}(t)$ существует.

2) Если последовательность точек t_n из F стремится к точке t границы области F по некасательному к этой границе пути, то $\lim\limits_{n\to\infty}[(t_n - t)\tilde{\mu}'(t_n)] = 0$. Действительно, пусть ряд $f(W)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k W^k$ сходится при $|W|<1$ и $\sup\limits_{|W|<1}|f(W)|<\infty$. Тогда последовательность $\{na_n\}_1^{\infty}$ сходится к нулю по Чезаро [9]. Но из сходимости по Чезаро следует сходимость по Абелю, так что при $W\to 1$ по некасательному к единичной окружности пути

$$\lim_{\substack{W\to 1\\ |W|<1}}\left[(1-W)\sum_{n=1}^{\infty} na_n W^n\right]=\lim_{\substack{W\to 1\\ |W|<1}}\left[(1-W)\sum_{n=1}^{\infty} na_n W^{n-1}\right]=$$

$$=\lim_{\substack{W\to 1\\ |W|<1}}[(1-W)f'(W)]=0.$$

Теперь отобразим конформно какую-нибудь область $F_1\subset F$ такую, что $t_n\in F_1$, $t_n\to t$ по некасательному к границе области F_1 пути на единичный круг так, чтобы точка t перешла в $1: t=t(W)$, $W=W(t)$. Тогда $f(W)=\tilde{\mu}(t(W))$ регулярна в единичном круге, $\sup\limits_{|W|<1}|f(W)|<\infty$ согласно (6), так что

$$\lim_{n\to\infty}[(t_n-t)\tilde{\mu}'(t_n)]=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{t-t_n}{1-W(t_n)}\,\frac{1}{t'(W(t_n))}\,[1-\right.$$

$$\left.-W(t_n)]\,f'(W(t_n))\right\}=0.$$

Из (4) и из свойств 1), 2) функции $\tilde{\mu}(t)$ следует, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{g}(z_n)=\tilde{g}(0)=\tilde{\mu}(i),$$

и что $\tilde{g}(0)$ — точка спектра оператора $A+iB=T$. Теорема доказана.

Замечание 1. Как видно из доказательства теоремы (соотношения (4), (5), функция $g(z)$, определенная на дуге единичной окружности $\{z=e^{i\varphi},\ \varphi_1<\varphi<\varphi_2\}$, допускает аналитическое продолжение $\tilde{g}(z)$ на какую-нибудь область G, замыкание которой содержит 0, тогда и только тогда, когда функция $\mu(t)$, определенная на интервале (t_1, t_2), допускает аналитическое продолжение на некоторую область F, замыкание которой содержит i. Существование такой области вытекает из следующего утверждения, которое по-видимому справедливо, однако доказать его автору не удалось.

Пусть $f(z)$ — регулярная в области D функция, и пусть для любого аналитического продолжения $\tilde{f}(z)$ на область $D_1 \supseteq D$ выполняются условия:

1) $|f(z)| < a + b|z|$, где a и b — некоторые положительные константы;

2 существует $\lim\limits_{z \in D_1,\ z \to z_0} \tilde{f}(z)$ для любой точки $z_0 \in \overline{D}_1$; и так доопределенная функция $\tilde{f}(z)$ непрерывна на $\overline{D}_1$;

3) если точка z_0 лежит на границе области D_1 и $\tilde{f}(z_0) \neq 0$, то либо z_0 — регулярная точка функции $\tilde{f}(z)$, либо z_0 — ее изолированная особая точка (именно — алгебраическая точка ветвления); тогда какова бы ни была точка z_1, существует область D_2, замыкание которой содержит z_1 и на которую можно аналитически продолжить функцию $f(z)$.

Если пространство H конечномерно, то вопрос о существовании аналитического продолжения $\mu(t)$ отпадает, так как в этом случае $\mu(t)$ находится из уравнения

$$\det(A + tB - \mu I) = 0$$

и является алгебраической функцией (у нее конечное число особых точек, так что естественной границы аналитичности у нее быть не может).

Следствие 1. *Пусть S — конечномерный оператор, а T — вполне непрерывный, и пусть границы областей $\Omega(T)$ и $\Omega(S)$ имеют общую дугу l. Тогда пересечение спектров операторов T и S не пусто**.

Доказательство очевидным образом следует из того факта, что если две функции совпадают на множество с точкой сгущения и одна из них имеет некоторое аналитическое продолжение, то вторая тоже допускает аналитическое продолжение на ту же область, и их аналитические продолжения совпадают.

Следствие 2. *Если граница числовой области вполне непрерывного оператора T содержит дугу эллипса, то фокусы этого эллипса — точки спектра оператора T.*

В самом деле, пусть дуга эллипса с фокусами в точках 1—1 и малой полуосью b принадлежит границе области $\Omega(T)$. По теореме 1 эта дуга содержит регулярную часть и для этой регулярной дуги определенная в теореме 2 функция $q(z)$ имеет вид

$$q(z) = \frac{z^2(1+2b^2) - 1}{\sqrt{z^4 - 2z^2(1+2b^2) + 1}};$$

очевидно, $\tilde{q}(0) = \pm 1$.

Замечание 2. Теорема Реллиха справедлива для произвольных линейных непрерывных операторов (не обязательно вполне непрерывных). Определение регулярной дуги границы числовой области также можно распространить и для непрерывных операторов. Поэтому теорема 2 верна и для произвольных линейных непрерывных операторов. Однако произвольный линейный непрерывный оператор может иметь числовую область, граница которой вообще не содержит регулярных дуг. Пусть, например, U — унитарный оператор, числовая область которого есть единичный круг. Если бы единичная окружность содержала регулярную дугу, то, согласно следствию 2, нуль был бы точкой спектра оператора U, что, конечно, не верно.

* Оператор S рассматривается только на соответствующем конечномерном пространстве; точка O может и не быть точкой спектра оператора S.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Toeplitz. Das algebraische Anologon zu einem Satze von Fejer. Math. Z. 1918.

2. F. Hausdorff. Der Wertvorrat einer Bilinearform. Math. Z. 3, 1919.

3. S. Hildebrandt. Uber den numerischen Wertebereich eines Operators. Math. ...n., B 163, H. 3, 1966.

4. Ф. Рисс, Б. С. Надь. Лекции по функциональному анализу. ИЛ, 1954.

5. M. H. Stone. Linear Transformations in Hilbert space and their applications ... analysis, Amer. Math. Soc. Colloguium Publications, 15 (1932).

6. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосо... женных операторов. «Наука», М., 1965.

7. Б. А. Мирман. О числовой области конечномерного оператора. «Зинатне», ...тв. матем. ежегодник, 2, 1966.

8. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы, I. ИЛ, 1962.

9. Г. Харди. Расходящиеся ряды. ИЛ, 1951.

Поступила 1 декабря 1967 г.