Выпуск 8 1969

ОДНА ТЕОРЕМА МЕРСЕРОВА ТИПА

Л. Ф. Таргонский

1. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — фиксированные функции, определенные в промежутке $[0;\ \infty)$ и такие, что

$$\alpha(x)+\beta(x)\to\gamma>0 \quad (x\to\infty), \tag{1}$$

$$0<a\leqslant\alpha(x)\leqslant b<+\infty. \tag{2}$$

Пусть далее $\varphi(x)$ — неубывающая в промежутке $[0;\ \infty)$ функция, $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)\to+\infty$ $(x\to\infty)$. Рассмотрим интегральное преобразование вида

$$t(x)=\alpha(x)\cdot S(x)+\beta(x)\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x S(t)\,d\varphi(t), \tag{3}$$

где $S(x)$ — непрерывная функция в промежутке $[0,\ \infty)$. Легко видеть, что если

$$S(x)\to S \quad (x\to\infty), \tag{4}$$

то

$$t(x)\to\gamma S\,(x\to\infty). \tag{5}$$

В настоящей работе мы покажем, что из (5) следует (4).

2. Для этой цели нам понадобится ряд лемм. Сначала введем следующие определения:

$$\int_0^{x+0} S(t)\,d\varphi(t)=\int_0^x S(t)\,d\varphi(t)+S(x)[\varphi(x+0)-\varphi(x)], \tag{6}$$

$$\int_0^{x-0} S(t)\,d\varphi(t)=\int_0^x S(t)\,d\varphi(t)-S(x)[\varphi(x)-\varphi(x-0)]. \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x)$ — неубывающая и $S(x)$ — непрерывная функции в промежутке $[0;\ \infty)$. Если в точке $x\in(0;\ \infty)$*

$$\int_0^{x-0} S(t)\,d\varphi(t)\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{x+0} S(t)\,d\varphi(t)\geqslant 0,$$

то

$$\int_0^x S(t)\,d\varphi(t)\geqslant 0.$$

Если же в точке $x\in(0;\ \infty)$

$$\int_0^{x-0} S(t)\,d\varphi(t)\leqslant 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{x+0} S(t)\,d\varphi(t)\leqslant 0,$$

то

$$\int_0^x S(t)\,d\varphi(t)\leqslant 0.$$

Докажем первую часть леммы. Предположим, что в точке $x \in (0; \infty)$ $\int\limits_0^x S(t)\,d\varphi(t) < 0$. Из равенства (7) вытекает, что $\varphi(x) - \varphi(x-0) > 0$, и, значит, $S(x) < 0$. Из равенства (6) и неравенств $\int\limits_0^x S(t)\,d\varphi(t) < 0$, $S(x) < 0$ следует, что $\int\limits_0^{x+0} S(t)\,d\varphi(t) < 0$.

Это противоречит условию леммы. Вторая часть леммы доказывается аналогично.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(x)$ *— неубывающая и* $S(x$ *— непрерывная функции в промежутке* $[0; \infty)$. *Если в точке* $x_0 \in (0; \infty)$

$$\int\limits_0^{x_0} S(t)\,d\varphi(t) = 0,$$

то справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{x_0+0} S(t)\,d\varphi(t). \quad \int\limits_0^{x_0-0} S(t)\,d\varphi(t) \leqslant 0.$$

Доказательство. Предположим, что $\int\limits_0^{x_0+0} S(t)\,d\varphi(t) > 0$ и $\int\limits_0^{x_0-0} S(t)\,d\varphi(t) > 0$. Тогда из равенства (6) и условия леммы получим

$$S(x_0)[\varphi(x_0+0) - \varphi(x_0)] > 0.$$

Следовательно, $\varphi(x_0+0) - \varphi(x_0) > 0$, и значит, $S(x_0) > 0$. Из равенства (7) и условия леммы получим

$$-S(x_0)[\varphi(x_0) - \varphi(x_0-0)] > 0.$$

Отсюда $\varphi(x_0) - \varphi(x_0-0) > 0$, и значит, $S(x_0) < 0$.

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения. Случай, когда $\int\limits_0^{x_0+0} S(t)\,d\varphi(t) < 0$ и $\int\limits_0^{x_0-0} S(t)\,d\varphi(t) < 0$ рассматривается аналогично.

Лемма 3. *Если* $\varphi(x)$ *— неубывающая и* $S(x)$ *— непрерывная функции в промежутке* $[0; \infty)$, *то*

$$\lim_{x \to x_0-0} \int\limits_0^x S(t)\,d\varphi(t) = \int\limits_0^{x_0-0} S(t)\,d\varphi(t) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0+0} \int\limits_0^x S(t)\,d\varphi(t) = \int\limits_0^{x_0+0} S(t)\,d\varphi(t).$$

Доказательство. Если x_0 — точка непрерывности функции $\varphi(x)$, то лемма справедлива [2, стр. 118]. Пусть x_0 — точка разрыва I рода функции $\varphi(x)$. Взяв $\Delta x > 0$, получим

$$\left| \int\limits_0^{x_0-0} S(t)\,d\varphi(t) - \int\limits_0^{x_0-\Delta x} S(t)\,d\varphi(t) \right| = \left| \int\limits_0^{x_0} S(t)\,d\varphi(t) - S(x_0)[\varphi(x_0) - \right.$$

$$\left. - \varphi(x_0-0)] - \int\limits_0^{x_0-\Delta x} S(t)\,d\varphi(t) \right| = \left| \int\limits_{x_0-\Delta x}^{x_0} S(t)\,d\varphi(t) - S(x_0)[\varphi(x_0) - \right.$$

$$\left. - \varphi(x_0-0)] \right| = |S(x_0 - \theta \cdot \Delta x)[\varphi(x_0) - \varphi(x_0-\Delta x)] - S(x_0)[\varphi(x_0) -$$

$$- \varphi(x_0 - \Delta x] + S(x_0)[\varphi(x_0) - \varphi(x_0-\Delta x)] - S(x_0)[\varphi(x_0) - \varphi(x_0-0)]| \leqslant$$

$$\leqslant |S(x_0 - \theta \cdot \Delta x) - S(x_0)| \cdot |\varphi(x_0) - \varphi(x_0-\Delta x)| +$$

$$+ |S(x_0)| \cdot |\varphi(x_0-0) - \varphi(x_0-\Delta x)| \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, так как $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ [2, стр. 112] и $S(x_0 - \theta\Delta x) \to S(x_0)$, $\varphi(x_0 - \Delta x) \to \varphi(x_0 - 0)$.

Мы доказали, что при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_0^{x_0 - \Delta x} S(t)\,d\varphi(t) = \int_0^{x_0 - 0} S(t)\,d\varphi(t).$$

Аналогично можно доказать, что при $\Delta x > 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_0^{x_0 + \Delta x} S(t)\,d\varphi(t) = \int_0^{x_0 + 0} S(t)\,d\varphi(t).$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\varphi(x)$ — неубывающая и $S(x)$ — непрерывная функции в промежутке $[0; \infty)$. Если существуют точки x и $y \in (0; \infty)$, $y < x$ такие, что $\varphi(y - 0) > 0$ и $Q(x) \cdot Q(y) < 0$, то найдется точка $z \in [y, x]$ такая, что*

$$Q(z+0) \cdot Q(z-0) \leqslant 0.$$

Здесь $Q(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)} \displaystyle\int_0^x S(t)\,d\varphi(t)$, $Q(z+0) = \dfrac{1}{\varphi(z+0)} \displaystyle\int_0^{z+0} S(t)\,d\varphi(t)$ и

$$Q(z-0) = \frac{1}{\varphi(z-0)} \int_0^{z-0} S(t)\,d\varphi(t).$$

Доказательство. Отрезок $[y; x]$ разделим пополам точкой z_1. Если $Q(z_1) = 0$, то по лемме 2 точка z_1 — искомая. Если $Q(z_1) \neq 0$, то из двух отрезков $[y; z_1]$ и $[z_1; x]$ возьмем тот, значения $Q(t)$ на концах которого противоположны по знаку. Разделим этот отрезок пополам и т. д. Возможны два случая:

1) На некотором шаге получим точку z_k такую, что $Q(z_k) = 0$. В этом случае по лемме 2 точка z_k искомая.

2) Или получим последовательность отрезков, вложенных друг в друга, длины которых стремятся к нулю и значения функции $Q(t)$ на концах которых противоположны по знаку.

Пусть γ — общая точка всех этих отрезков. Если $Q(\gamma) = 0$, то в силу леммы 2 γ — искомая точка. Пусть $Q(\gamma) \neq 0$. Обозначим $[a_n; b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ построенную систему отрезков, содержащих точку γ; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \gamma$. Если $a_n \neq \mathrm{const}$ $b_n \neq \mathrm{const}$ для достаточно больших n, то по лемме 3 $\lim\limits_{n\to\infty} Q(a_n) = Q(\gamma - 0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q(b_n) = Q(\gamma + 0)$. По построению $Q(a_n) \cdot Q(b_n) < 0$. Отсюда следует, что $Q(\gamma + 0)\,Q(\gamma - 0) = \lim\limits_{n\to\infty} [Q(a_n) \cdot Q(b_n)] \leqslant 0$ — и значит, γ — искомая точка.

Если для $n > N$ $a_n = \mathrm{const}$, $b_n \neq \mathrm{const}$, то для $n > N$ $a_n = \gamma$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Q(b_n) = Q(\gamma + 0)$. Так как $Q(a_n) \cdot Q(b_n) < 0$, то $Q(\gamma) \cdot Q(\gamma + 0) = \lim\limits_{n\to\infty} [Q(b_n) \cdot Q(a_n)] \leqslant 0$. Если $Q(\gamma + 0) = 0$, то $Q(\gamma - 0) \cdot Q(\gamma + 0) = 0$, и следовательно, γ — искомая точка.

Если $Q(\gamma + 0) \neq 0$, то $Q(\gamma)$ и $Q(\gamma + 0)$ противоположны по знаку, а тогда по лемме 1 $Q(\gamma - 0) = 0$ или совпадает по знаку с $Q(\gamma)$, т. е. $Q(\gamma - 0) \cdot Q(\gamma + 0) \leqslant 0$, и значит, γ — искомая точка.

Аналогично рассматривается случай, когда $a_n \neq \mathrm{const}$, $b_n = \mathrm{const}$ для $n > N$.

Лемма 5. *Пусть $\varphi(x)$ — неубывающая, $S(x)$ — непрерывная, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — произвольные действительные функции в промежутке $[0; \infty)$,*

$$\varphi(0) = 0, \quad \alpha(x) + \beta(x) \equiv \gamma(x) \to \gamma > 0 \quad (x \to \infty).$$

Если $\alpha(x) \geqslant 0$ для $x \in [0;\ \infty)$ и $\varphi(x) > 0$ для $x > X$, то из

$$t(x) \equiv \alpha(x) S(x) + \beta(x) \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^x S(t)\, d\varphi(t) = O(1)\ (x \to \infty)$$

следует, что

$$Q(x) \equiv \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^x S(t)\, d\varphi(t) = O(1) \quad (x \to \infty).$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $\varphi(x) > 0$ для $x > 0$. Предположим, что $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} Q(x) = +\infty$. Тогда для любого $p > 0$ найдется $x_0^{(p)} \in (0;\ \infty)$ такое, что $Q\left(x_0^{(p)}\right) > p$. По теореме о среднем для интеграла Стилтьеса

$$Q\left(x_0^{(o)}\right) \equiv \frac{1}{\varphi\left(x_0^{(p)}\right)} \int_0^{x_0^{(p)}} S(t)\, d\varphi(t) = S\left(x_1^{(p)}\right),$$

где $0 \leqslant x_1^{(p)} \leqslant x_0^{(p)}$.

Рассмотрим множество точек x таких, что

$$S(x) = Q\left(x_0^{(p)}\right).$$

Обозначим его через $E_0^{(p)}$. Так как $S(x)$ — непрерывная функция, то хорошо известно, что $E_0^{(p)}$ — замкнутое множество. Пересечение

$$E_{0,1}^{(p)} \equiv E_0^{(p)} \cap \left[0;\ x_0^{(p)}\right]$$

также замкнуто и так как $x_1^{(p)} \in \left[0;\ x_0^{(p)}\right] \cap E_0^{(p)}$, то $E_{0,1}^{(p)}$ — непустое множество. Найдем ближайшую слева от точки $x_0^{(p)}$ точку $y_1^{(p)} \in E_{0,1}^{(p)}$. В частности точка может совпасть с точкой $x_0^{(p)}$.

Пусть уже построена точка $y_{k-1}^{(p)}$. Найдем $Q\left(y_{k-1}^{(p)}\right)$. Множество точек x, для которых справедливо равенство $Q\left(y_{k-1}^{(p)}\right) = S(x)$, обозначим через $E_{k-1}^{(p)}$. Множество $E_{k-1}^{(p)}$ и пересечение $E_{k-1,1}^{(p)} \equiv \left[0;\ y_{k-1}^{(p)}\right] \cap E_{k-1}^{(p)}$ замкнуты. Покажем, что множество $E_{k-1,1}^{(p)}$ непустое. По теореме о среднем для интеграла Стилтьеса

$$Q\left(y_{k-1}^{(p)}\right) \equiv \frac{1}{\varphi\left(y_{k-1}^{(p)}\right)} \int_0^{y_{k-1}^{(p)}} S(t)\, d\varphi(t) = S\left(x_k^{(p)}\right),$$

где $0 \leqslant x_k^{(p)} \leqslant y_{k-1}^{(p)}$.

Точка $x_k^{(p)} \in E_{k-1}^{(p)}$ и $x_k^{(p)} \in \left[0;\ y_{k-1}^{(p)}\right]$, поэтому пересечение $E_{k-1}^{(p)} \cap \left[0;\ x_{k-1}^{(p)}\right] \equiv E_{k-1,1}^{(p)}$ — непустое множество. Найдем ближайшую слева от точки $y_{k-1}^{(p)}$ точку $y_k^{(p)} \in E_{k-1,1}^{(p)}$. В частности $y_k^{(p)}$ может совпасть с $y_{k-1}^{(p)}$.

Итак, пусть построена последовательность по следующему правилу:

$$y_0^{(p)} = x_0^{(p)} \text{ и } Q\left(y_0^{(p)}\right) = Q\left(x_0^{(p)}\right) > p > 0;$$

$S\left(y_1^{(p)}\right) = Q\left(y_0^{(p)}\right)$, где $y_1^{(p)} \in E_{0,1}^{(p)}$ — точка, ближайшая слева от точки $y_0^{(p)}$;
$S\left(y_2^{(p)}\right) = Q\left(y_1^{(p)}\right)$, где $y_2^{(p)} \in E_{1,1}^{(p)}$ — точка, ближайшая слева от точки $y_1^{(p)}$.

. . . .

. . . .

$S\left(y_n^{(p)}\right) = Q\left(y_{n-1}^{(p)}\right)$, где $y_n^{(p)} \in E_{n-1,1}^{(p)}$ — точка, ближайшая слева от точки $y_{n-1}^{(p)}$;

. . . .

Если при некотором $n = n_0$ $y_{n_0}^{(p)} = 0$, то мы будем иметь лишь конечное число точек:

$$y_0^{(p)},\ y_1^{(p)}, \ldots,\ y_{n_0}^{(p)}.$$

Для каждого n имеет место одно из двух неравенств:

$$\text{а) } S\left(y_n^{(p)}\right) < Q\left(y_n^{(p)}\right), \text{ или б) } S\left(y_n^{(p)}\right) \geqslant Q\left(y_n^{(p)}\right).$$

Если для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место а), то

$$p < Q\left(y_0^{(p)}\right) = S\left(y_1^{(p)}\right) < Q\left(y_1^{(p)}\right) = S\left(y_2^{(p)}\right) < Q\left(y_2^{(p)}\right) =$$
$$= \ldots = S\left(y_n^{(p)}\right) < Q\left(y_n^{(p)}\right) = \ldots$$

Отсюда и из правила построения последовательности $\left\{y_n^{(p)}\right\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ следует, что $0 < y_n^{(p)} < y_{n-1}^{(p)}$. Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} y_n^{(p)} = q^{(p)},$$

где $0 \leqslant q^{(p)} < y_n^{(p)}$ $(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$. Из непрерывности функции $S(x)$ в точке $q^{(p)}$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S\left(y_n^{(p)}\right) = S\left(q^{(p)}\right).$$

Так как $S\left(y_n^{(p)}\right) \geqslant p$, то справедливо неравенство

$$S(q^{(p)}) \geqslant p.$$

Если p пробегает некоторую последовательность, сходящуюся $+\infty$, то $S(q^{(p)}) \to +\infty$, и значит, $q^{(p)} \to +\infty$.

Фиксируем p_0 столь большим, чтобы $\gamma(q^{(p_0)}) > \frac{\gamma}{2}$, что следует из сходимости $\gamma(x) \to \gamma$ $(x \to \infty)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S\left(y_n^{(p_0)}\right) = S\left(q^{(p_0)}\right) \geqslant p_0.$$

По лемме 3

$$\lim_{n\to\infty} Q\left(y_n^{(p_0)}\right) = Q\left(q^{(p_0)} + 0\right).$$

Из равенства $Q\left(y_n^{(p_0)}\right) = S\left(y_{n+1}^{(p_0)}\right)$ следует

$$Q\left(q^{(p_0)} + 0\right) = S(q^{(p_0)}),$$

или

$$\frac{1}{\varphi\left(q^{(p_0)} + 0\right)} \int_0^{q^{(p_0)}+0} S(t)\, d\varphi(t) = \frac{1}{\varphi\left(q^{(p_0)} + 0\right)} \int_0^{q^{(p_0)}} S(t)\, d\varphi(t) +$$
$$+ S(q^{(p_0)}) \frac{\varphi\left(q^{(p_0)} + 0\right) - \varphi\left(q^{(p_0)}\right)}{\varphi\left(q^{(p_0)} + 0\right)} = S(q^{(p_0)}).$$

Отсюда

$$\frac{1}{\varphi\left(q^{(p_0)} + 0\right)} \int_0^{q^{(p_0)}} S(t)\, d\varphi(t) = S(q^{(p_0)}) \frac{\varphi\left(q^{(p_0)}\right)}{\varphi\left(q^{(p_0)} + 0\right)},$$

и следовательно,

$$Q(q^{(p_0)}) = \frac{1}{\varphi\left(q^{(p_0)}\right)} \int_0^{q^{(p_0)}} S(t)\, d\varphi(t) = S(q^{(p_0)}).$$

Но тогда

$$t(q^{(p_0)}) \equiv \alpha(q^{(p_0)})\,[S(q^{(p_0)}) - Q(q^{(p_0)})] + \gamma(q^{(p_0)})\,Q(q^{(p_0)}) > \frac{\gamma p_0}{2}.$$

Учитывая, что числа p_0 и $q^{(p_0)}$ могут быть сколь угодно большими, мы пришли к противоречию с условием леммы.

Пусть для всех $n < n_0$ справедливо неравенство а) и $y_{n_0}^{(p_0)} = 0$. Тогда

$$p_0 < Q(y_0^{(p_0)}) = S(y_1^{(p_0)}) < Q(y_1^{(p_0)}) = \ldots = S(y_{n_0-1}^{(p_0)}) < Q(y_{n_0-1}^{(p_0)}) = S(0).$$

Мы пришли к противоречию, так как p_0 может быть сколь угодно большим числом.

Итак, по крайней мере для одного из $y_n^{(p_0)}$ выполнено неравенство б).

Если б) выполнено для $y_0^{(p_0)}$, т. е. $S(y_0^{(p_0)}) \geqslant Q(y_0^{(p_0)})$, то

$$t(y_0^{(p_0)}) \equiv \alpha(y_0^{(p_0)})\,[S(y_0^{(p_0)}) - Q(y_0^{(p_0)})] + \gamma(y_0^{(p_0)})\,Q(y_0^{(p_0)}) > \frac{\gamma p_0}{2},$$

так как $y_0^{(p_0)}$ можно считать столь большим, что $\gamma(y_0^{(p_0)}) > \frac{\gamma}{2}$. Получили противоречие с условием леммы.

Пусть $y_{n_0}^{(p_0)}$ такое, что для всех $n < n_0$

$$Q(y_n^{(p_0)}) > S(y_n^{(p_0)}), \text{ а } S(y_{n_0}^{(p_0)}) \geqslant Q(y_{n_0}^{(p_0)}).$$

Докажем, что

$$Q(y_{n_0}^{(p_0)}) \geqslant Q(y_{n_0-1}^{(p_0)}).$$

Если $y_{n_0}^{(p_0)} = y_{n_0-1}^{(p_0)}$, то неравенство справедливо. Пусть $y_{n_0}^{(p_0)} < y_{n_0-1}^{(p_0)}$. Рассмотрим выражения

$$Q(y_{n_0-1}^{(p_0)}) \cdot \varphi(y_{n_0-1}^{(p_0)}) = \int_0^{y_{n_0}^{(p_0)}} S(t)\,d\varphi(t) + \int_{y_{n_0}^{(p_0)}}^{y_{n_0-1}^{(p_0)}} S(t)\,d\varphi(t)$$

и

$$Q(y_{n_0}^{(p_0)}) \cdot \varphi(y_{n_0}^{(p_0)}) = \int_0^{y_{n_0}^{(p_0)}} S(t)\,d\varphi(t).$$

Их разность

$$Q(y_{n_0-1}^{(p_0)})\,\varphi(y_{n_0-1}^{(p_0)}) - Q(y_{n_0}^{(p_0)})\,\varphi(y_{n_0}^{(p_0)}) = S(t')\,[\varphi(y_{n_0-1}^{(p_0)}) - \varphi(y_{n_0}^{(p_0)})],$$

где

$$y_{n_0}^{(p_0)} \leqslant t' \leqslant y_{n_0-1}^{(p_0)}.$$

Если

$$\varphi(y_{n_0-1}^{(p_0)}) = \varphi(y_{n_0}^{(p_0)}),$$

то

$$Q(y_{n_0}^{(p_0)}) = Q(y_{n_0-1}^{(p_0)}).$$

Поэтому

$$\varphi(y_{n_0-1}^{(p_0)}) > \varphi(y_{n_0}^{(p_0)}).$$

Так как $S(y_{n_0}^{(p_0)}) = Q(y_{n_0-1}^{(p_0)})$ и $S(y_{n_0-1}^{(p_0)}) < Q(y_{n_0-1}^{(p_0)})$, то

$$S(y_{n_0}^{(p_0)}) > S(y_{n_0-1}^{(p_0)}).$$

Поскольку точка $y_{n_0}^{(p_0)}$ — ближайшая слева к $y_{n_0-1}^{(p_0)}$, где $S\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)=Q\left(y_{n_0-1}^{(p_0)}\right)$, то из непрерывности $S(x)$ на сегменте $\left[y_{n_0}^{(p_0)};\ y_{n_0-1}^{(p_0)}\right]$ следует, что $S(x)$ на нем имеет наибольшее значение в точке $y_{n_0}^{(p_0)}$. Тогда

$$S(t')\leqslant S\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)=Q\left(y_{n_0-1}^{(p_0)}\right).$$

Мы получили

$$Q\left(y_{n_0-1}^{(p_0)}\right)\varphi\left(y_{n_0-1}^{(p_0)}\right)-Q\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)\varphi\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)\leqslant Q\left(y_{n_0-1}^{(p_0)}\right)\left[\varphi\left(y_{n_0-1}^{(p_0)}\right)-\varphi\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)\right],$$

отсюда

$$Q\left(y_{n_0-1}^{(p_0)}\right)\leqslant Q\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right).$$

Так как $Q\left(y_{n_0-1}^{(p_0)}\right)>p_0$, то $Q\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)>p_0$.

Если с неограниченным ростом p_0 неограниченно растет и $y_{n_0}^{(p_0)}$, то

$$t\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)\equiv\alpha\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)\left[S\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)-Q\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)\right]+\gamma\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)Q\left(y_{n_0}^{(p_0)}\right)>\frac{\gamma p_0}{2}.$$

Получили противоречие с условием леммы.

Если же с неограниченным ростом p_0 существует подпоследовательность $\overset{*}{y}{}_{n_0}^{(p_0)}$ такова, что $\overset{*}{y}{}_{n_0}^{(p_0)}\leqslant L$, где L — постоянная независящая от p_0, то из равенства $S\left(\overset{*}{y}{}_{n_0+1}^{(p_0)}\right)=Q\left(\overset{*}{y}{}_{n_0}^{(p_0)}\right)$, где $0\leqslant \overset{*}{y}{}_{n_0+1}^{(p_0)}\leqslant \overset{*}{y}{}_{n_0}^{(p_0)}$, и неравенства $Q\left(\overset{*}{y}{}_{n_0}^{(p_0)}\right)>p_0$ следует, что $S\left(\overset{*}{y}{}_{n_0+1}^{(p_0)}\right)>p_0$, т. е. функция $S(x)$ — неограничена на отрезке $[0;\ L]$, чего не может быть.

Итак, $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\,Q(x)<+\infty$.

Если $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}}\,Q(x)=-\infty$, то, заменив $S(x)$ на $[-S(x)]$, получим

$$\alpha(x)[-S(x)]+\beta(x)\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x[-S(t)]\,d\varphi(t)=O(1)\quad(x\to\infty)$$

и

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,Q_1(x)\equiv\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x[-S(t)]\,d\varphi(t)=+\infty.$$

По доказанному это невозможно. Таким образом, лемма доказана.

3. **Теорема.** *Пусть* $\varphi(x)$ — *неубывающая функция в промежутке* $[0;\ \infty)$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)\to+\infty\ (x\to\infty)$, $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ — *произвольные действительные функции, определенные в промежутке* $[0;\ \infty)$ *и удовлетворяющие условиям* (1) *и* (2), $S(x)$ — *непрерывная функция на* $[0;\ \infty)$.

Если

$$t(x)\equiv\alpha(x)S(x)+\beta(x)\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x S(t)\,d\varphi(t)\to\gamma S\quad(x\to\infty),$$

то

$$S(x)\to S\quad(x\to\infty)\quad(S\neq\infty).$$

Доказательство. Так как $\gamma>0$, то

$$\frac{\alpha(x)}{\gamma}S(x)+\frac{\beta(x)}{\gamma}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x S(t)\,d\varphi(t)\to S\ (x\to\infty).$$

Заменив $S(x)$ на $S(x)-S$, получим, учитывая (1),

$$\frac{\alpha(x)}{\gamma}[S(x)-S]+\frac{\beta(x)}{\gamma}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^x[S(t)-S]\,d\varphi(t)\to 0\,(x\to\infty).$$

Итак, нам достаточно показать, что из равенства

$$\lim_{x\to\infty}\left[\alpha(x)S(x)+\beta(x)\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_0^x S(t)\,d\varphi(t)\right]=0 \tag{8}$$

следует равенство

$$\lim_{x\to\infty} S(x)=0,$$

где

$$\begin{gathered} 0<a\leqslant\alpha(x)\leqslant b<+\infty \\ \alpha(x)+\beta(x)\equiv\gamma(x)\to 1\ (x\to\infty). \end{gathered} \tag{9}$$

Обозначим

$$Q(x)\equiv\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_0^x S(t)\,d\varphi(t)$$

и равенство (8) запишем в следующем виде:

$$\alpha(x)[S(x)-Q(x)]+\gamma(x)Q(x)\to 0 \quad (x\to\infty). \tag{10}$$

Из леммы 5 следует, что функция $Q(x)=O(1)$ $(x\to\infty)$. Так как $\alpha(x)\geqslant a>0$, то из (10), учитывая (9), следует, что функция $S(x)$ ограничена в промежутке $[0;\ \infty)$.

Рассмотрим функцию $S(x)-Q(x)$. Возможны три случая:

1) $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}[S(x)-Q(x)]\leqslant 0$; 2) $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}}[S(x)-Q(x)]\geqslant 0$; 3) $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}}[S(x)-Q(x)]<0<\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}[S(x)-Q(x)]$.

Мы докажем, что в первых двух случаях теорема верна, и что третий случай приводит к противоречию с условиями теоремы.

Случай 1. Пусть справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,[S(x)-Q(x)]\leqslant 0. \tag{11}$$

Возьмем последовательность $x_n\to\infty$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}S(x_n)=\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}S(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}Q(x_n)$ существует. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}Q(x_n)=\overline{\lim_{x\to\infty}}S(x). \tag{11'}$$

Зададим последовательность $\{\varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n>0\,(n=1,\ 2,\ldots)$, $\varepsilon_n\to 0$. Выберем из $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ следующим образом. Возьмем $n_1=1$, тогда $x_{n_1}=x_1$. Число x_{n_2} возьмем столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$x_{n_2}>x_{n_1},\quad \left|\frac{1}{\varphi(x_{n_2})}\int\limits_0^{x_{n_1}}S(t)\,d\varphi(t)\right|<\varepsilon_1,\quad \frac{L\varphi(x_{n_1})}{\varphi(x_{n_2})}<\varepsilon_1,$$

где об L известно, что $|S(x)|<L$ для $x\in[0;\ \infty)$. Это возможно вследствие того, что по условию теоремы $\varphi(x)\to+\infty$. Пусть уже выбрано $x_{n_{k-1}}$. Член x_{n_k} возьмем таким, чтобы имели место неравенства

$$x_{n_k}>x_{n_{k-1}},\quad \left|\frac{1}{\varphi(x_{n_k})}\int\limits_0^{x_{n_{k-1}}}S(t)\,d\varphi(t)\right|<\varepsilon_{k-1},\quad \frac{L\varphi(x_{n_{k-1}})}{\varphi(x_{n_k})}<\varepsilon_{k-1}.$$

Так как $x_n \to \infty$, то $x_{n_k} \to \infty$. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} Q(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\varphi(x_{n_k})} \int_0^{x_{n_k}} S(t)\,d\varphi(t) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{\varphi(x_{n_k})} \int_0^{x_{n_{k-1}}} S(t)\,d\varphi(t) + S\left(x'_{n_k}\right)\frac{\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x_{n_{k-1}})}{\varphi(x_{n_k})}\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} S\left(x'_{n_k}\right),$$

где $x_{n_{k-1}} \leqslant x'_{n_k} \leqslant x_{n_k}$. Отсюда и из (11) получим

$$\lim_{k\to\infty} S\left(x'_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} Q(x_{n_k}) \geqslant \lim_{k\to\infty} S(x_{n_k}).$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} S(x_{n_k}) = \varlimsup\limits_{x\to\infty} S(x)$, то $\lim\limits_{k\to\infty} S\left(x'_{n_k}\right) = \varlimsup\limits_{x\to\infty} S(x)$, и следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} Q(x_{n_k}) = \varlimsup\limits_{x\to\infty} S(x)$. По предположению $\lim\limits_{n\to\infty} Q(x_n)$ существует, и значит, справедливость равенства (11′) доказана.

Подставив в (10) вместо x точку x_n, получим

$$\varlimsup_{x\to\infty} S(x) = 0.$$

Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} S(x) = 0$. Пусть это не так. Тогда существует последовательность $z_n \to \infty$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} S(z_n) = \delta < 0$. Последовательности $\{\alpha(z_n)\}$, $\{Q(z_n)\}$ могут, вообще говоря, расходиться. Перейдем к подпоследовательностям $\{\alpha(z_{n_k})\}$, $\{Q(z_{n_k})\}$, $\{S(z_{n_k})\}$, которые сходятся. Выберем из последовательности $\{z_{n_k}\}$ подпоследовательность $\{z_{n_{k_i}}\}$ следующим образом.

Зададим последовательность $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\varepsilon_i \to 0$. Пусть $n_{k_1} = n_1$, тогда $z_{n_{k_1}} = z_{n_1}$. Число $z_{n_{k_2}}$ возьмем столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$z_{n_{k_2}} > z_{n_{k_1}}, \quad \left|\frac{1}{\varphi(z_{n_{k_2}})} \int_0^{z_{n_{k_1}}} S(t)\,d\varphi(t)\right| < \varepsilon_1,$$

$$\frac{L\cdot\varphi(z_{n_{k_1}})}{\varphi(z_{n_{k_2}})} < \varepsilon_1,$$

где об L известно, что $|S(x)| < L$ для $x \in [0;\ \infty)$. Это возможно вследствие того, что по условию теоремы $\varphi(x) \to +\infty$.

Пусть уже выбрано $z_{n_{k_{i-1}}}$. Число $z_{n_{k_i}}$ возьмем таким, чтобы имели место неравенства

$$z_{n_{k_i}} > z_{n_{k_{i-1}}}, \quad \left|\frac{1}{\varphi(z_{n_{k_i}})} \int_0^{z_{n_{k_{i-1}}}} S(t)\,d\varphi(t)\right| < \varepsilon_{i-1}, \quad \frac{L\cdot\varphi(z_{n_{k_{i-1}}})}{\varphi(z_{n_{k_i}})} < \varepsilon_{i-1}.$$

Так как $z_n \to \infty$, то $z_{n_k} \to \infty$, и значит, $z_{n_{k_i}} \to \infty$. Имеем

$$\lim_{i\to\infty} Q\left(z_{n_{k_i}}\right) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\varphi\left(z_{n_{k_i}}\right)} \int\limits_0^{z_{n_{k_i}}} S(t)\, d\varphi(t) =$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left[\frac{1}{\varphi\left(z_{n_{k_i}}\right)} \int\limits_0^{z_{n_{k_{i-1}}}} S(t)\, d\varphi(t) + S\left(z'_{n_{k_i}}\right) \frac{\varphi\left(z_{n_{k_i}}\right) - \varphi\left(z_{n_{k_{i-1}}}\right)}{\varphi\left(z_{n_{k_i}}\right)}\right] = \lim_{i\to\infty} S\left(z_{n_{k_i}}\right),$$

где $z_{n_{k_{i-1}}} \leqslant z_{n_{k_i}} \leqslant z_{n_{k_i}}$. Так как $\overline{\lim_{x\to\infty}} S(x) = 0$, то

$$\lim_{i\to\infty} Q\left(z_{n_{k_i}}\right) = \lim_{i\to\infty} S\left(z'_{n_{k_i}}\right) \leqslant 0.$$

Отсюда и из существования предела $\lim\limits_{k\to\infty} Q\left(z_{n_k}\right)$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} Q\left(z_{n_k}\right) \leqslant 0$. Но тогда, подставив в (10) вместо x точку z_{n_k}, получим, учитывая (11) и неравенство $\lim\limits_{k\to\infty} Q\left(z_{n_k}\right) \leqslant 0$, что $\lim\limits_{k\to\infty} S\left(z_{n_k}\right) = 0$. Это противоречит нашему предположению.

Случай II. Пусть имеет место неравенство

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} [S(x) - Q(x)] \geqslant 0. \tag{12}$$

Возьмем последовательность $x_n \to \infty$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n) = \lim\limits_{x\to\infty} S(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Q(x_n)$ существует. Как и в первом случае, покажем последовательно, что $\lim\limits_{n\to\infty} Q(x_n) = \underline{\lim}_{x\to\infty} S(x)$, $\underline{\lim}_{x\to\infty} S(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} S(x) = 0$.

Случай III. Покажем, что неравенства

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} [S(x) - Q(x)] < 0 < \overline{\lim_{x\to\infty}} [S(x) - Q(x)] \tag{13}$$

противоречивы.

Предположим, что они верны. Тогда из (10) и (13) следует, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} Q(x) > 0 > \underline{\lim_{x\to\infty}} Q(x),$$

и значит, существуют последовательности $x_i \to \infty$ и $l_i \to \infty$ такие, что $l_i < x_i < l_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и

$$\lim_{i\to\infty} Q(x_i) = A_1 > 0, \tag{14}$$

$$\lim_{i\to\infty} Q(l_i) = A_2 < 0. \tag{15}$$

Без ограничения общности можно считать, что $Q(x_i) > 0$ и $Q(l_i) < 0$ для $i = 1, 2, \ldots$

По лемме 4 для каждого отрезка $[l_i; x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$ существует точка $\bar{z}_i \in [l_i; x_i]$ такая, что $Q(\bar{z}_i + 0) \cdot Q(\bar{z}_i - 0) \leqslant 0$. Обозначим множество точек z, для которых $Q(z+0) \cdot Q(z-0) \leqslant 0$, через E. Докажем замкнутость множества E.

Пусть $z_x \to z_0$ $(n \to \infty)$, $z_n \in E$. Предположим, что $Q(z_0+0)\, Q(z_0 - 0) > 0$. В противном случае $z_0 \in E$. Для определенности положим $Q(z_0 - 0) > 0$ и $Q(z_0 + 0) > 0$. Тогда существует окрестность $(z_0 - \delta;$

$z_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ такая, что для $x \in (z_0 - \delta;\ z_0 + \delta)$ $(x \neq z_0)$ справедливо неравенство

$$Q(x) > \frac{1}{2}\min\{Q(z_0 - 0),\ Q(z_0 + 0)\} = r > 0. \tag{16}$$

Так как $z_n \to z_0\ (n \to \infty)$, то для $n > N$

$$z_n \in (z_0 - \delta;\ z_0 + \delta).$$

Точки $z_n \in E$, и потому

$$Q(z_n - 0) \geqslant 0 \ \text{ и } \ Q(z_n + 0) \leqslant 0 \tag{17}$$

или

$$Q(z_n - 0) \leqslant 0 \ \text{ и } \ Q(z_n + 0) \geqslant 0. \tag{18}$$

Пусть, например, имеет место (17). Тогда существует окрестность $(z_n - \delta_n;\ z_n + \delta_n)$ $(\delta_n > 0)$ точки z_n, содержащаяся в окрестности $(z_0 - \delta;\ z_0 + \delta)$ и такая, что $Q(x) < \frac{1}{2}r$ для $x \in (z_n;\ z_n + \delta_n)$. Это противоречит неравенству (16). Если имеет место (18), то существует окрестность $(z_n - \delta_n;\ z_n + \delta_n)$ $(\delta_n > 0)$ точки z_n, содержащаяся в окрестности $(z_0 - \delta;\ z_0 + \delta)$ и такая, что $Q(x) < \frac{1}{2}r$ для $x \in (z_n - \delta_n;\ z_n)$. Мы снова пришли к противоречию с (16). Случай, когда $Q(z_0 - 0) < 0$ и $Q(z_0 + 0) < 0$, рассматривается аналогично. Следовательно, не может быть $Q(z_0 + 0) \times Q(z_0 - 0) > 0$, и потому $z_0 \in E$, E — замкнутое множество.

Точка $\bar{z}_i \in [l_i;\ x_i]$ $(i = 1,\ 2, \ldots)$ и $\bar{z}_i \in E$, то пересечение $[0;\ x_i] \cap E = E_i$ есть замкнутое непустое множество при $i = 1,\ 2, \ldots$.

Для каждой точки $x_i\ (i = 1,\ 2, \ldots)$ найдем ближайшую слева к ней точку $z_i \in E_i$. Ясно, что $z_i \in [l_i;\ x_i]$, и потому $z_i \to \infty\ (i \to \infty)$.

Возможны два случая:

а) $z_i = x_i$, б) $z_i \neq x_i$.

Без ограничения общности можем считать, что случаи а) и б) имеют место для $i = 1,\ 2, \ldots$. В противном случае мы рассматривали бы подпоследовательности последовательности $\{z_i\}$.

В случае а) имеем два подслучая:

$$Q(z_i - 0) \leqslant 0 \ \text{ и } \ Q(z_i - 0) > 0,$$

каждый из которых можно считать имеющим место для $i = 1,\ 2, \ldots$

Пусть $Q(z_i - 0) \leqslant 0$ $(i = 1,\ 2, \ldots)$. Тогда

$$Q(z_i) = \frac{1}{\varphi(z_i)}\int_0^{z_i} S(t)\,d\varphi(t) = \frac{1}{\varphi(z_i)}\int_0^{z_i - 0} S(t)\,d\varphi(t) +$$
$$+ S(z_i)\,\frac{\varphi(z_i) - \varphi(z_i - 0)}{\varphi(z_i)} \leqslant S(z_i)\,\frac{\varphi(z_i) - \varphi(z_i - 0)}{\varphi(z_i)}.$$

Так как $Q(z_i) > 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$, то $\varphi(z_i) - \varphi(z_i - 0) > 0$, и значит, $S(z_i) > 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$. Из неравенства $Q(z_i) \leqslant S(z_i)\,\frac{\varphi(z_i) - \varphi(z_i - 0)}{\varphi(z_i)}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ следует, что $Q(z_i) \leqslant S(z_i)$. Подставив в (10) вместо x точку z_i, получим $Q(z_i) \to 0$ $(i \to \infty)$. Это невозможно, так как

$$Q(z_i) = Q(x_i) \to A_1 > 0 \ (i \to \infty).$$

Пусть $Q(z_i - 0) > 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$. Существует такой интервал $(z_i - \delta_i;\ z_i)$ $(\delta_i > 0)$, что $Q(x) > 0$, если $x \in (z_i - \delta_i;\ z_i]$. Фиксируем из этого интервала некоторую точку $x_i' \neq z_i$. По лемме 4 на отрезке $[l_i;\ x_i']$

($i=1,\ 2,\ \ldots$) существует точка, принадлежащая множеству E_i. Отсюда следует, что пересечение $[0;\ x_i'] \cap E_i = E_{i,\,1}$ — непустое замкнутое множество. Для каждой точки $z_i = x_i$ ($i=1,\ 2,\ \ldots$) найдем ближайшую слева к ней точку $z_i' \in E_{i,\,1}$. Ясно, что $z_i' \leqslant x_i'$, $z_i' \to \infty$ ($i \to \infty$).

Итак, в случае а) мы пришли к существованию точки $z_i' \in E_{i,\,1}$ — ближайшей слева к точке x_i, причем $z_i' \neq x_i$ и $Q(x) \geqslant 0$ при $x \in [x_i';\ x_i]$ ($i=1,\ 2,\ \ldots$). Отсюда, используя лемму 4, легко видеть, что $Q(x) \geqslant 0$ при $x \in (z_i';\ x_i]$.

В случае б) точка $z_i \in E_i$ — ближайшая слева к точке x_i, причем $z_i \neq x_i$. Используя лемму 4, легко показать, что $Q(x) \geqslant 0$, если $x \in (z_i;\ x_i]$ ($i=1,\ 2,\ \ldots$).

Таким образом, мы свели случаи а) и б) к одному случаю: $Q(x) \geqslant 0$ при $x \in (z_i;\ x_i]$, $Q(z_i+0)\cdot Q(z_i-0) \leqslant 0$ ($i=1,\ 2,\ \ldots$). Существуют две возможности:

1) $Q(z_i-0) \leqslant 0$, $Q(z_i+0) \geqslant 0$; 2) $Q(z_i-0) > 0$, $Q(z_i+0) \leqslant 0$, каждую из которых можно считать имеющей место для $i=1,\ 2,\ \ldots$.

Рассмотрим первую возможность. На каждом отрезке $[z_i;\ x_i]$ ($i = 1, 2, \ldots$) найдем $\max\limits_{[z_i;\ x_i]} S(x) = S(y_i)$. Так как $z_i \leqslant y_i \leqslant x_i$, то $y_i \to \infty$. Докажем, что $S(y_i) > 0$ ($i=1,\ 2,\ \ldots$). Заметим, что

$$Q(x_i) = \frac{1}{\varphi(x_i)}\int\limits_0^{x_i} S(t)\,d\varphi(t) = \frac{1}{\varphi(x_i)}\int\limits_0^{z_i-0} S(t)\,d\varphi(t) + S(z_i)\frac{\varphi(z_i)-\varphi(z_i-0)}{\varphi(x_i)} +$$

$$+\frac{1}{\varphi(x_i)}\int\limits_{z_i}^{x_i} S(t)\,d\varphi(t) \leqslant S(z_i)\frac{\varphi(z_i)-\varphi(z_i-0)}{\varphi(x_i)} + S(x_i'')\frac{\varphi(x_i)-\varphi(z_i)}{\varphi(x_i)} \leqslant$$

$$\leqslant S(y_i)\,\frac{\varphi(x_i)-\varphi(z_i-0)}{\varphi(x_i)},$$

так как $Q(z_i-0) \leqslant 0$, $\varphi(z_i)-\varphi(z_i-0) \geqslant 0$, $\varphi(x_i)-\varphi(z_i) \geqslant 0$ и $z_i \leqslant x_i'' \leqslant x_i$. Отсюда и из неравенства $Q(x_i) > 0$ следует, что $\varphi(x_i) - \varphi(z_i-0) > 0$, и значит, $S(y_i) > 0$ ($i=1,\ 2,\ \ldots$).

Из неравенства $Q(x_i) \leqslant S(y_i)\dfrac{\varphi(x_i)-\varphi(z_i-0)}{\varphi(x_i)}$ получаем при $i=1,\ 2,\ \ldots$ $Q(x_i) \leqslant S(y_i)$. Докажем, что $Q(y_i) \leqslant S(y_i)$ ($i=1, 2, \ldots$). При $z_i < y_i$

$$Q(y_i) = \frac{1}{\varphi(y_i)}\int\limits_0^{y_i} S(t)\,d\varphi(t) = \frac{1}{\varphi(y_i)}\int\limits_0^{z_i-0} S(t)\,d\varphi(t) + S(z_i)\,\frac{\varphi(z_i)-\varphi(z_i-0)}{\varphi(y_i)} +$$

$$+S(y_i')\frac{\varphi(y_i)-\varphi(z_i)}{\varphi(y_i)} \leqslant S(y_i)\,\frac{\varphi(y_i)-\varphi(z_i-0)}{\varphi(y_i)} \leqslant S(y_i),$$

так как $Q(z_i-0) \leqslant 0$, $\varphi(z_i)-\varphi(z_i-0) \geqslant 0$, $\varphi(y_i)-\varphi(z_i) \geqslant 0$, $z_i \leqslant y_i' \leqslant y_i$. Если $z_i = y_i$, то неравенство $Q(y_i) \leqslant S(y_i)$ также справедливо.

При рассмотрении случаев, описанных ниже, можно считать, не уменьшая общности, что $i=1,\ 2,\ \ldots$

1.1. Если $y_i \in (z_i;\ x_i]$, то $Q(y_i) \geqslant 0$. Подставив в (10) вместо x точку y_i, получим $S(y_i) \to 0$ ($i \to \infty$). Это невозможно, так как

$$S(y_i) \geqslant Q(x_i) \to A_1 > 0 \ (i \to \infty).$$

1.2. Пусть $y_i = z_i$ и $Q(z_i) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Так как $Q(z_i) \leqslant S(z_i)$, то, подставив в (10) вместо x точку z_i, получим $S(z_i) \to 0$ $(i \to \infty)$. Это противоречит тому, что

$$S(z_i) = S(y_i) \geqslant Q(x_i) \to A_1 > 0 \ (i \to \infty).$$

1.3. Пусть $y_i = z_i$ и $Q(z_i) < 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Фиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ найдем число $\delta_i > 0$ такое, чтобы из неравенства $|z_i - t_i| < \delta_i$ $(z_i < t_i < x_i)$ следовали неравенства $|S(t_i) - S(z_i)| < \varepsilon$ и $|Q(t_i) - Q(z_i + 0)| < \varepsilon$. Это возможно, так как $S(x)$ — непрерывна в точке z_i и верна лемма 3. Очевидно, что $t_i \to \infty$. Легко видеть, что $Q(z_i + 0) \leqslant S(z_i)$. Из всех этих неравенств следует, что

$$Q(t_i) < Q(z_i + 0) + \varepsilon \leqslant S(z_i) + \varepsilon < S(t_i) + 2\varepsilon,$$

т.е.

$$S(t_i) - Q(t_i) > -2\varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots).$$

1.3.1. Пусть $S(t_i) - Q(t_i) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Так как $t_i \in (z_i; x_i)$, то $Q(t_i) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Подставив в (10) вместо x точку t_i, получим $S(t_i) \to 0$ $(i \to \infty)$. Это невозможно, так как

$$S(t_i) \geqslant S(z_i) - \varepsilon \geqslant Q(x_i) - \varepsilon \to A_1 - \varepsilon > 0$$

при $0 < \varepsilon < A_1$.

1.3.2. Пусть $0 > S(t_i) - Q(t_i) > -2\varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$Q(t_i) > S(t_i) > S(z_i) - \varepsilon \geqslant Q(x_i) - \varepsilon \to A_1 - \varepsilon > 0 \ (i \to \infty)$$

при $0 < \varepsilon < A_1$. Отсюда следует, что

$$\alpha(t_i)[S(t_i) - Q(t_i)] + \gamma(t_i) \cdot Q(t_i) \not\to 0 \ (i \to \infty),$$

так как $0 > \alpha(t_i)[S(t_i) - Q(t_i)] > -2\varepsilon b$ и $\varepsilon > 0$ можно выбрать таким, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \varepsilon < \min\left\{A_1; \frac{A_1}{1 + 2b}\right\}.$$

Рассмотрим вторую возможность:

$$Q(z_i - 0) > 0, \ Q(z_i + 0) \leqslant 0 \ (i = 1, 2, \ldots).$$

Так как $Q(x) \geqslant 0$ при $x \in (z_i; x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то неравенство $Q(z_i + 0) < 0$ невозможно и, следовательно, $Q(z_i + 0) = 0$. Отсюда следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует интервал $(z_i; z_i + \delta_i)$ $(\delta_i > 0)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ такой, что $0 \leqslant Q(x) < \varepsilon$ при $x \in (z_i; z_i + \delta_i)$. Фиксируем из этого интервала некоторую точку z_i'', $0 \leqslant Q(z_i'') < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Так как $z_i'' > z_i$, то $z_i'' \to \infty$ и $Q(x) \geqslant 0$ при $x \in [z_i''; x_i]$.

На каждом отрезке $[z_i''; x_i]$ выберем $\max\limits_{[z_i'', x_i]} S(x) = S(y_i)$.

Так как $z_i'' \leqslant y_i \leqslant x_i$, то $y_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Покажем, что $S(y_i) > 0$ для достаточно больших y_i. Заметим, что

$$Q(x_i) = \frac{1}{\varphi(x_i)} \int_0^{x_i} S(t)\, d\varphi(t) = \frac{1}{\varphi(x_i)} \int_0^{z_i''} S(t)\, d\varphi(t) + S(x_i'') \frac{\varphi(x_i) - \varphi(z_i'')}{\varphi(x_i)} <$$

$$< \varepsilon + S(x_i'') \frac{\varphi(x_i) - \varphi(z_i'')}{\varphi(x_i)} \ (i = 1, 2, \ldots),$$

так как $0 \leqslant Q(z_i'') < \varepsilon$ и $\varphi(x_i) \geqslant \varphi(z_i'')$; $z_i'' \leqslant x_i'' \leqslant x_i$.

Так как $Q(x_i) \to A_1 > 0$, следует, что для $i > I$ справедливо неравенство $Q(x_i) > \frac{3}{4} A_1$. Если $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} A_1$, то $Q(x_i) - \varepsilon > \frac{1}{2} A_1$ при $i > I$. Отсюда и из неравенства $Q(x_i) - \varepsilon < S(x_i'') \frac{\varphi(x_i) - \varphi(z_i'')}{\varphi(x_i)}$ следует, что $0 < \frac{1}{2} A_1 < S(x_i'') \frac{\varphi(x_i) - \varphi(z_i'')}{\varphi(x_i)}$ при $i > I$, а потому $\varphi(x_i) - \varphi(z_i'') > 0$, и значит, $S(x_i'') > 0$ $(i > I)$.
Так как $S(y_i) \geqslant S(x_i'')$, то $S(y_i) > 0$ при $i > I$.
Учитывая это, имеем

$$Q(x_i) - \varepsilon < S(y_i) \frac{\varphi(x_i) - \varphi(z_i'')}{\varphi(x_i)} \leqslant S(y_i),$$

т. е. $S(y_i) > Q(x_i) - \varepsilon$ для $i > I$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} A_1$.

Докажем, что $S(y_i) > Q(y_i) - \varepsilon$ для достаточно больших y_i, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} A_1$. Если $y_i > z_i''$, $i > I$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} A_1$, то

$$Q(y_i) = \frac{1}{\varphi(y_i)} \int_0^{y_i} S(t)\, d\varphi(t) \leqslant \frac{1}{\varphi(y_i)} \int_0^{z_i''} S(t)\, d\varphi(t) +$$

$$+ S(y_i) \frac{\varphi(y_i) - \varphi(z_i'')}{\varphi(y_i)} < \varepsilon + S(y_i),$$

так как $0 \leqslant Q(z_i'') < \varepsilon$ и $\varphi(y_i) \geqslant \varphi(z_i'')$.

Если же $y_i = z_i''$, $i > I$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} A_1$, то

$$Q(y_i) = Q(z_i'') < \varepsilon < \varepsilon + S(y_i).$$

Мы доказали, что при $i > I$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} A_1$ справедливо неравенство $S(y_i) - Q(y_i) > -\varepsilon$. Не уменьшая общности, можно считать в рассматриваемых ниже случаях, что $i = I + 1, I + 2, \ldots$

2.1. Пусть $S(y_i) - Q(y_i) \geqslant 0$. Подставив в (10) вместо x точку y_i, получим $S(y_i) \to 0$ $(i \to \infty)$. Это невозможно, так как

$$S(y_i) > Q(x_i) - \varepsilon \to A_1 - \varepsilon > 0 \ (i \to \infty) \text{ при } 0 < \varepsilon < \frac{1}{4} A_1.$$

2.2. Пусть $0 > S(y_i) - Q(y_i) > -\varepsilon$ при $i > I$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} A_1$.
Тогда

$$Q(y_i) > S(y_i) > Q(x_i) - \varepsilon \to A_1 - \varepsilon > 0 \ (i \to \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\alpha(y_i)[S(y_i) - Q(y_i)] + \gamma(y_i) Q(y_i) \nrightarrow 0 \ (i \to \infty),$$

так как $0 > \alpha(y_i)[S(y_i) - Q(y_i)] > -b\varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ можно взять таким, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{4} A_1;\ \frac{A_1}{1 + b}\right\}.$$

Теорема доказана.

Данная теорема для случая, когда $\varphi(x)=x$, принадлежит Н. А. Давыдову, но нигде не публиковалась.

Из нашей теоремы следует также теорема Н. А. Давыдова [4], обобщающая мерсерову теорему Кноппа — Белинфанте [5].

Нетрудно показать на примерах, что для справедливости нашей теоремы существенны все ее условия.

В заключение выражаю благодарность своему научному руководителю Н. А. Давыдову за помощь и постоянное внимание, оказанное им при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Харди. Расходящиеся ряды. Перев. с англ. ИЛ, М., 1951.

2. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. Физматгиз, 1960.

3. Н. А. Давыдов. Обобщение теоремы Мерсера. УМН, 20, вып. 6 (126), 1965.

4. Н. А. Давыдов. Обобщение марсеровой теоремы Кноппа — Белинфанте. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. № 3. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

5. M. J. Belinfante. Über einen Grenzwertsatz aus der unendlichen Folgen. Math. Ann., 101, 1929.

Поступила 14 сентября 1967 г.