ВЫРОЖДЕННЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ КОШИ ДЛЯ БИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ, II

В. А. Какичев

В данной статье используются обозначения и результаты работы [1]. В [2] изучено сингулярное уравнение

$$\alpha\varphi+\beta S_t\varphi+\gamma S_\omega\varphi+\delta S\varphi=h(t,\ \omega),\ h\in H \tag{1}$$

при следующих предположениях относительно коэффициентов α, β, γ и δ:

$$\alpha=\pm\delta\equiv a,\ \beta=\pm\gamma\equiv b;\ \alpha=\pm\gamma\equiv a,\ \beta=\pm\delta\equiv b;$$
$$\alpha=\pm\beta\equiv a,\ \gamma=\pm\delta\equiv b;\ a,\ b\in H,\ a^2\neq b^2.$$

Такие уравнения в работе [2] были названы нормальными вырожденными уравнениями, так как они приводятся к вырожденным задачам линейного сопряжения [1].

Здесь изучается другой тип вырожденных уравнений (1), приводящихся к элементарной задаче линейного сопряжения [1]. Характер вырожденности виден из следующих ограничений на коэффициенты α, β, γ и δ уравнения (1):

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \delta\end{matrix}\right\}=\lambda\pm u(t)\,\omega^{\rho}\pm v(\omega)\,t^n+u(t)\,v(\omega)\,t^p\omega^q,$$

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}=\lambda\pm u(t)\,\omega^{\rho}\mp v(\omega)\,t^n-u(t)\,v(\omega)\,t^p\omega^q, \tag{2}$$

где $\lambda\neq 0$ — произвольная постоянная, $u(t)$ и $v(\omega)$ — произвольные функции соответственно классов $H(C)$ и $H(\Gamma)$.

Положим

$$\Phi(z,\ w)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C\times\Gamma}\frac{\varphi(t,\ \omega)\,dtd\omega}{(t-z)(\omega-w)}\equiv K(\varphi), \tag{3}$$

где $\varphi\in H$ — искомое решение уравнений (1), (2). Используя формулы Сохоцкого для предельных значений интеграла (3), найдем, что уравнения (1), (2) равносильны [3] задаче линейного сопряжения

$$A(t,\ \omega)\,\Phi^{++}(t,\ \omega)-B(t,\ \omega)\,\Phi^{+-}(t,\ \omega)-C(t,\ \omega)\,\Phi^{-+}(t,\ \omega)+$$
$$+D(t,\ \omega)\,\Phi^{--}(t,\ \omega)=h(t,\ \omega), \tag{4}$$

где

$$A=\alpha+\beta+\gamma+\delta=4\lambda,\quad B=\alpha-\beta+\gamma-\delta=4t^n v(\omega),$$

$$C=\alpha+\beta-\gamma-\delta=4\omega^{\rho}u(t),\ D=\alpha-\beta-\gamma+\delta=4t^p\omega^q u(t)\,v(\omega), \tag{5}$$

если только отыскивать решения задачи (4), исчезающие в бесконечно удаленных точках.

Пусть $\operatorname{Ind} u(t) = r$, $\operatorname{Ind} v(\omega) = \nu$, тогда [4]

$$u(t) = t^r u^+(t) / u^-(t), \quad v(\omega) = \omega^\nu v^+(\omega) / v^-(\omega), \tag{6}$$

где $u^\pm(t) \in H^\pm(C)$ и $v^\pm(\omega) \in H^\pm(\Gamma)$ — предельные значения функций, аналитических соответственно в $D^\pm$ и $\Delta^\pm$ и не обращающихся в нуль в этих областях. Учитывая (6), условие (4) перепишем так:

$$\frac{\lambda\Phi^{++}(t, \omega)}{u^+(t)\, v^+(\omega)} - t^r\omega^\rho \frac{\Phi^{-+}(t, \omega)}{u^-(t)\, v^+(\omega)} - t^n\omega^\nu \frac{\Phi^{+-}(t, \omega)}{u^+(t)\, v^-(\omega)} +$$
$$+ t^{p+r}\omega^{q+\nu} \frac{\Phi^{--}(t, \omega)}{u^-(t)\, v^-(\omega)} = \frac{h(t, \omega)}{4u^+(t)\, v^+(\omega)}. \tag{7}$$

Полагая в (7) $p + r = m$, $q + \nu = \mu$, $h/4u^+v^+ = f(t, \omega)$ и

$$\frac{\lambda\Phi^{++}}{u^+v^+} = \Psi^{++}, \quad \frac{\Phi^{\mp\pm}}{u^\mp v^\pm} = \Psi^{\mp\pm}, \quad \frac{\Phi^{--}}{u^-v^-} = \Psi^{--}, \tag{8}$$

получим элементарную задачу линейного сопряжения [1]

$$\Psi^{++} - t^r\omega^\rho\Psi^{-+} - t^n\omega^\nu\Psi^{--} + t^m\omega^\mu\Psi^{--} = f(t, \omega). \tag{9}$$

Если найдено общее решение и условия разрешимости задачи (9), то, используя формулу Сохоцкого

$$\varphi(t, \omega) = \Phi^{++} - \Phi^{+-} - \Phi^{-+} + \Phi^{--}$$

и обозначения (8), уравнения (1), (2) можно решить по формуле

$$\varphi(t, \omega) = \frac{1}{\lambda} u^+(t)\, v^+(\omega)\, \Psi^{++}(t, \omega) - u^-(t)\, v^+(\omega)\, \Psi^{-+}(t, \omega) -$$
$$- u^+(t)\, v^-(\omega)\, \Psi^{+-}(t, \omega) + u^-(t)\, v^-(\omega)\, \Psi^{--}(t, \omega). \tag{10}$$

Из результатов [1] следует, что общее решение задачи (9), исчезающее в бесконечно удаленных точках при $\rho \leqslant 0$, $n \leqslant 0$, $m \geqslant r > 0$ и $\mu \geqslant \nu > 0$, находим по формулам

$$\Psi^{++}(z, w) = F^{++}(z, w) + \sum_{k=0}^{r} z^k \varphi_k^+(w) + \sum_{l=0}^{\nu-1} w^l \psi_l^+(z) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1} c_{ij} z^i w^j,$$

$$z^r w^\rho \Psi^{-+}(z, w) = F^{-+}(z, w) + \sum_{k=0}^{r-1} z^k \varphi_k^+(w) + \sum_{j=0}^{\mu-1} w^j a_j^-(z),$$

$$z^n w^\nu \Psi^{+-}(z, w) = F^{+-}(z, w) + \sum_{l=0}^{\nu-1} w^l \psi_l^+(z) + \sum_{i=0}^{m-1} z^i b_i^-(w), \tag{11}$$

$$z^m w^\mu \Psi^{--}(z, w) = F^{--}(z, w) + \sum_{i=0}^{m-1} z^i b_i^-(w) + \sum_{j=0}^{\mu-1} w^j a_j^-(z) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\mu-1} c_{ij} z^i w^j,$$

где $b_k^\pm(w)$, $\varphi_l^\pm(w)$ и $a_j^\pm(z)$, $\psi_i^\pm(z)$ — произвольные функции соответственно классов $H_0^\pm(\Gamma)$ и $H_0^\pm(C)$, c_{ij} — произвольные постоянные, $F(z, w) = K(f)$. Следовательно, эта задача имеет бесконечно много линейно независимых решений.

Те же формулы (11) дают решение задачи (9) и при $r \geqslant m > 0$ $\mu \geqslant \nu > 0$ $(m \geqslant r > 0,\ \nu \geqslant \mu > 0)$ и $r \geqslant m > 0$, $\nu \geqslant \mu > 0$, если только $\rho \leqslant 0$ и $n \leqslant 0$.

Таким образом, при $r>0$, $m>0$, $\mu>0$, $\nu>0$ и $\rho\leqslant 0$, $n\leqslant 0$ уравнения (1), (2) имеют бесконечно много линейно независимых решений, определяемых по формуле (10), в которой $\Psi^{\pm\pm}(t, \omega)$ и $\Psi^{\pm\mp}(t, \omega)$ — предельные значения функций, входящих в формулы (11).

Если $\rho>0$, а $n\geqslant 0$ ($\rho\leqslant 0$, а $n>0$), то в формулах (11) надо потребовать, чтобы $\Psi^{-+}\in H_0^{-+}$ ($\Psi^{+-}\in H_0^{+-}$). Последнее будет иметь место, если произвольные функции, входящие в (11), удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &w^{-\rho}\varphi_k^+(w)\in H^+(\Gamma), \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1,\\ &a_j^-(z)\equiv 0, \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ \min(\rho,\ \mu-1), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\left(\begin{aligned} &z^{-n}\psi_l^+(z)\in H^+(C), \quad l=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1,\\ &b_i^-(w)\equiv 0, \quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ \min(n,\ m-1) \end{aligned}\right), \tag{13}$$

а функция f удовлетворяет необходимым и достаточным условиям разрешимости

$$z^{-\rho}F^{-+}(z,\ w)\in H_0^{-+}, \tag{14}$$

$$\left(z^{-n}F^{+-}(z,\ w)\in H_0^{+-}\right). \tag{15}$$

Если же $\rho>0$ и $n>0$, то условия (12), (13) и (14), (15) должны выполняться одновременно. Например, условие (14) равносильно тому, что функция $F^{-+}(z, w)$ в окрестности точки $(0, \infty)$ допускает разложение в ряд Гартогса

$$F^{-+}(z,\ w)=\sum_{\sigma=-\rho+1}^{\infty}\frac{f_\sigma^+(w)}{z^\sigma}, \quad f_\sigma^+(w)\in H_0^+(\Gamma).$$

Отсюда при $r>0$, $m>0$, $\mu>0$, $\nu>0$ и $\rho>0$, $n\leqslant 0$ ($\rho\geqslant 0$, $n<0$) уравнения (1), (2) при выполнении необходимых и достаточных ограничений (14) ((15)) на функцию $F(z,\ w)=K(f)=K\left(\frac{h}{4v^+v^+}\right)$ имеет счетное множество линейно независимых решений, определяемых по формулам (10), (11), (12), ((10), (11), (13)).

Теперь, когда выяснено влияние знака показателей ρ и n на общий вид решения и условия разрешимости уравнений (1), (2), для простоты будем считать, что $\rho\leqslant 0$ и $n\leqslant 0$, и выясним, как надо изменить общее решение и условия разрешимости, если хотя бы один из показателей r, m, ν, μ будет отрицательным.

Пусть $r\leqslant 0$ ($\nu\leqslant 0$), тогда необходимо в (11) опустить слагаемые

$$\sum_{k=0}^{r-1} z^k\varphi_k^+(w)\left(\sum_{l=0}^{\nu-1} w^l\psi_l^+(z)\right),$$

потребовать, чтобы

$$z^{-r}a_j^-(z)\in H_0^-(C), \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ \mu-1 \ \left(w^{-\rho}b_i^-(w)\in H_0^-(\Gamma),\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1\right)$$

и выполнялись необходимые и достаточные условия разрешимости

$$z^{-r}F^{-+}(z,\ w)\in H_0^{-+}\ \left(w^{-\nu}F^{+-}(z,\ w)\in H_0^{+-}\right).$$

Если же $m\leqslant 0$ ($\mu\leqslant 0$), то в формулах (11) надо опустить слагаемые

$$\sum_{i=0}^{m-1} z^i b_i^-(w) \quad \left(\sum_{j=0}^{\mu-1} w^j a_j^-(z)\right),$$

положить $c_{ij}=0$, $0\leqslant i\leqslant m-1$, $0\leqslant j\leqslant \mu-1$, потребовать, чтобы

$$z^{-m}a_j^-(z)\in H_0^-(C), \ j=0,\ 1,\ \ldots,\ \mu-1\ \left(w^{-\mu}b_i^-(w)\in H_0^-(\Gamma),\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1\right)$$

и чтобы выполнялись необходимые и достаточные условия разрешимости

$$z^{-m}F^{--}(z,\ w) \in H_0^{--}\ \left(w^{-\mu}F^{--}(z,\ w) \in H_0^{--}\right).$$

Комбинируя всевозможные знаки у показателей r, ρ, n, ν и m, μ и используя сказанное, нетрудно описать необходимые и достаточные условия разрешимости и общее решение уравнений (1), (2) в любом из возможных случаев.

Наиболее общее утверждение заключается в следующем: уравнения (1), (2) имеют не более чем счетное множество линейно независимых решений при выполнении не более чем счетного множества условий разрешимости.

Замечание 1. В работе [1] (конец пункта 2.2°, случай B) допущена неточность. Утверждение $\Phi^{--} \equiv 0$ при $m \leqslant r \leqslant 0$ неверно.

Замечание 2. В работе [5] рассмотрено многомерное сингулярное уравнение типа (1) (2), приводящееся при $n = 2$ к элементарной задаче (9) с $\rho = n = 0$, $m = r$, $\mu = \nu$. Как следует из сказанного выше утверждения этой работы: а) при $r > 0$ и $\nu \leqslant 0$ ($r \leqslant 0$ и $\nu > 0$) задача (9) с $\rho = n = 0$, $m = r$, $\mu = \nu$ и соответствующее ему уравнение неразрешимы; б) при $r > 0$ и $\nu > 0$ та же задача и соответствующее ему уравнение имеют конечное число решений — неверны.

Замечание 3. Результаты этой статьи не сложными рассуждениями могут быть распространены на случай $n > 2$ переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Какичев. Краевые задачи линейного сопряжения для функций голоморфных в бицилиндрических областях. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 5. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

2. В. А. Какичев. Вырожденные двумерные сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши для бицилиндрических областей, I. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 7. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.

3. В. А. Какичев. О регуляризации сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши для бицилиндрических областей. «Изв. вузов, Матем.», № 7 (62), 1967.

4. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.

5. А. И. Сербин. Об одной краевой задаче аналитических функций многих комплексных переменных и ее применении. «Уч. зап. Карагандинск. пединта, т. 4, 1965, 297—308.

Поступила 18 сентября 1967 г.