Выпуск 8 1969

О САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Ф. С. Рофе-Бекетов

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе устанавливается общий вид самосопряженных краевых задач на конечном интервале $[0, b]$ для дифференциальных уравнений $l[y] = \lambda y$ произвольного четного или нечетного порядка m с непрерывными операторными коэффициентами. Такие уравнения в матричной записи эквивалентны бесконечным системам дифференциальных уравнений порядка m.

Для случая одного скалярного квазидифференциального выражения четного порядка с вещественными коэффициентами полное описание всех самосопряженных расширений на конечном интервале содержится, как один из результатов, в фундаментальной работе М. Г. Крейна [1] и приводится в известных монографиях Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [2] и М. А. Наймарка [3].

Алгебраическое изучение линейных краевых задач для скалярного дифференциального уравнения (М. Бохер и др.) содержится в книге [4] (см. также [19]).

Наша задача заключается в описании с помощью краевых условий всех самосопряженных расширений симметрического дифференциального оператора, который в отличие от скалярного случая имеет бесконечные индексы дефекта и не является, вообще говоря, полуограниченным. Мы показываем, что если по произвольной вектор-функции $y(t)$, для которой имеет смысл дифференциальное выражение $l[y]$, построить определенным образом в некотором гильбертовом пространстве два постоянных вектора $\hat{y}$, $\hat{y}'$, выражающихся исключительно через значения $y(t)$ и ее первых $m-1$ производных на концах интервала $[0, b]$, то любые самосопряженные краевые условия для операции $l[y]$ могут быть записаны в виде

$$\cos A \cdot \hat{y}' - \sin A \cdot \hat{y} = 0, \tag{1}$$

где A — самосопряженный оператор, и обратно, каков бы ни был самосопряженный оператор A, условием (1) порождается самосопряженная краевая задача для уравнения $l[y] = \lambda y$. При этом может оказаться, что ни один из операторов $\cos A$, $\sin A$ не имеет обратного, и тогда, в отличие от случая, когда A — скаляр, уравнение (1) не будет однозначно разрешимым хотя бы относительно одного из векторов $\hat{y}$, $\hat{y}'$.

Важным классом самосопряженных краевых условий являются условия типа Штурма, т. е. распадающиеся краевые условия. Такие условия задаются двумя уравнениями типа (1):

$$\begin{aligned} \cos A \cdot \hat{y}_0' - \sin A \cdot \hat{y}_0 = 0, \\ \cos B \cdot \hat{y}_b' - \sin B \cdot \hat{y}_b = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где пары векторов $\hat{y}_0$, $\hat{y}_0'$ или $\hat{y}_b$, $\hat{y}_b'$ определяются значениями $y(t)$ и ее производных только при $t=0$ или соответственно при $t=b$. Операторы A и B — самосопряженные. Если для операции $l[y]$ четного порядка всегда существуют самосопряженные распадающиеся краевые условия, то для операции нечетного порядка такие краевые условия существуют не всегда. Мы устанавливаем необходимые и достаточные условия, при которых для операции $l\{y\}$ нечетного порядка существуют самосопряженные распадающиеся краевые условия.

Отметим, что для скалярного уравнения четного порядка краевые условия вида (2) содержатся в качестве самосопряженных в работе М. Г. Крейна [5]. Для уравнения Шредингера с операторным потенциалом

$$-y''+q(t)\,y=\lambda y \tag{3}$$

распадающиеся самосопряженные краевые условие вида $y'(0)-Ay(0)=0$ (аналогично при $t=b$) использовались автором в [6] (см., например, гл. III, § 7), где построено разложение по собственным функциям уравнения (3), а распадающиеся краевые условия общего вида (2) использованы в качестве самосопряженных в [7]. Общий вид распадающихся самосопряженных краевых условий для уравнения (3) иным, чем в настоящей работе, методом и в отличной от (2) форме (несколько более сложной) установил М. Л. Горбачук [8]. Ряд краевых задач специального вида для уравнения $y''-Ay+\lambda B(t)\,y=0$ подробно изучен в работе С. Г. Крейна и Г. И. Лаптева [9].

Применяемый нами метод основан на введенном в настоящей работе понятии эрмитова бинарного отношения θ в произвольном гильбертовом пространстве и на доказываемой в § 1 теореме об общем виде эрмитовых отношений, в силу которой каждое такое отношение эквивалентно уравнению (1). С другой стороны, с помощью тождества Лагранжа устанавливается, что задание самосопряженного расширения для операции $l[y]$ эквивалентно заданию некоторого эрмитова отношения. Это дает возможность немедленно получить общий вид самосопряженных расширений для операции $l[y]$ при помощи краевых условий вида (1). Нам не приходится при этом использовать известную теорему Неймана о строении области определения оператора, сопряженного к симметрическому, или другие теоремы подобного рода в отличие от большинства существующих методов описания всех самосопряженных расширений того или иного симметрического оператора, в том числе и от метода Кэлкина [10] (см. также [11]), с которым, возможно, наш подход имеет некоторые общие черты*.

Отметим, что известный общий вид самосопряженных краевых условий для эллиптических дифференциальных уравнений, установленный М. И. Вишиком [12], тоже допускает истолкование с точки зрения понятия эрмитовых отношений и может быть представлен в форме (1).

Изложенный метод демонстрируется в § 2 на уравнениях второго порядка, где все выводы и рассуждения проведены подробно Это дает возможность в § 3, посвященном уравнениям произвольного порядка, сосредоточить внимание на специфике этих уравнений и не повторять в более громоздкой форме тех рассмотрений, которые не имеют принципиального отличия от проведенных в § 2 применительно к простому случаю.

---

* Примечание при корректуре. Аппарат теории линейных бинарных отношений в конечномерных пространствах систематически развивается и используется в недавно вышедшей работе И. М. Гельфанда и В. А. Пономарева [20] в связи с изучаемыми там вопросами.

Нумерация формул и лемм в каждом параграфе своя, теорем — сквозная. При ссылках на номер формулы подразумевается формула данного параграфа. Отметим, наконец, что вместо знака нормы $\|\cdot\|$ мы используем знак модуля $|\cdot|$ для простоты записи и большей рельефности аналогий*.

§ 1. ЭРМИТОВЫ ОТНОШЕНИЯ

1. Каноническая форма эрмитовых отношений. Пусть H — произвольное гильбертово пространство, а M — произвольное подмножество в $H \oplus H$. Говорят, что упорядоченная пара элементов x, $x' \in H$ находится в бинарном отношении $\theta = \theta_M$ и пишут $x\theta x'$, если элемент $\{x, x'\} \in H \oplus H$ принадлежит M. Очевидно, разным множествам $M \subset H \oplus H$ отвечают разные отношения θ_M. Введем следующее

Определение. *Заданное в некотором гильбертовом пространстве H бинарное отношение θ называется эрмитовым, если оно обладает следующими двумя свойствами:*

1°. Если $x\theta x'$, $y\theta y'$, то

$$(x', y) - (x, y') = 0. \tag{1}$$

2°. Если для некоторых x, $x' \in H$ верно (1) при любых парах y, $y' \in H$, для которых $y\theta y'$, то и $x\theta x'$.

Существенным примером эрмитова отношения является отношение θ, порождаемое произвольным, ограниченным или неограниченным, самосопряженным оператором B:

$$x\theta x' \longleftrightarrow Bx = x'. \tag{2}$$

Ниже будет установлен общий вид эрмитовых отношений. Однако прежде всего отметим свойства этих отношений, непосредственно вытекающие из определения.

3°. Эрмитово отношение линейно, т. е. если $x\theta x'$ и $y\theta y'$, то и

$$(\alpha x + \beta y)\,\theta\,(\alpha x' + \beta y')$$

при любых комплексных α и β.

4°. Если θ и θ_1 — эрмитовы отношения и $\theta \subset \theta_1$ (т. е. из $x\theta x'$ следует $x\theta_1 x'$), то $\theta = \theta_1$. Другими словами, эрмитовы отношения не имеют нетривиальных эрмитовых расширений.

По аналогии с преобразованием Кэли U_B самосопряженных операторов B, назовем *преобразованием Кэли эрмитова отношения* θ оператор U_θ, определенный следующим образом. По каждой паре векторов x, $x' \in H$, $x\theta x'$, строим векторы

$$x^+ = x' + ix, \quad x^- = x' - ix,$$

и полагаем

$$U_\theta x^+ = x^-.$$

Таким образом, область определения оператора U_θ $D_U = \{x^+\}$ есть совокупность всех векторов вида x^+, а область значений $\Delta_U = \{x^-\}$. Это определение оператора U_θ корректно, так как соответствие $x^+ \to x^-$ однозначно, ибо каждая пара $x\theta x'$ восстанавливается по x^+ единственным образом. Действительно, если $x\theta x'$, $y\theta y'$ и $x^+ = y^+$, т. е. $x' + ix = y' + iy$, то полагая $v = x - y$, $v' = x' - y'$, имеем

$$v\theta v', \quad v' = -iv, \tag{3}$$

* Примечание при корректуре. Основные результаты настоящей работы приведены в заметке [21]. Некоторые из наших рассмотрений могли бы быть проведены на языке теории пространств с индефинитной метрикой.

откуда следует, что $(v', v)-(v, v')=0$, т.е. $-2i(v, v)=0$, или

$$v'=v=0, \tag{4}$$

а потому $x=y$, $x'=y'$.

Лемма 1. Преобразование Кэли U_θ любого эрмитова отношения θ является унитарным оператором.

Доказательство. Пусть $U=U_\theta$, тогда

$$|Ux^+|^2=|x^-|^2=(x'-ix, x'-ix)=|x'|^2+|x|^2+$$
$$+i\{(x', x)-(x, x')\}=|x'|^2+|x|^2,$$

ибо $(x', x)-(x, x')=0$ при $x\theta x'$. Аналогично

$$|x^+|^2=|x'|^2+|x|^2, \tag{5}$$

т.е. $|Ux^+|=|x^+|$, и оператор U — изометричен. Покажем, что он отображает все H на все H, иначе, что $D_U=\Delta_U=H$. Рассмотрим D_U.

Если некоторый вектор $v\perp D_U$, т.е. $(v, x^+)=0$ при любых x^+, то $(v, x')+(v, ix)=0$, или $(v', x)-(v, x')=0$, где $v'=iv$ при всех $x\theta x'$. Это означает, что $v\theta v'$ (по свойству 2° эрмитовых отношений). Итак, для пары v, v' справедливы* соотношения (3), а следовательно, и (4), т.е. $v=v'=0$. Значит, D_U плотно в H. Пусть $x_n^+\to\tilde{x}$, $x_n^+\in D_U$. Покажем, что $\tilde{x}\in D_U$. Имеем $x_n^+=x_n'+ix_n$, $x_n\theta x_n'$ и в силу (5)

$$|x_m'-x_n'|^2+|x_m-x_n|^2=|x_m^+-x_n^+|^2\xrightarrow[m,\,n\to\infty]{}0,$$

а потому сходятся последовательности x_n, x_n':

$x_n\to x$, $x_n'\to x'$ и $\tilde{x}=x'+ix$. Но так как при любых $y\theta y'$, $(x_n', y)-(x_n, y')=0$,

то и $(x', y)-(x, y')=0$, и значит, $x\theta x'$, т.е. $\tilde{x}\in D_U$. Итак, $D_U=\bar{D}_U=H$. Аналогично показывается, что и $\Delta_U=H$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Каковы бы ни были самосопряженный оператор A и унитарный U, отношение, определяемое любым из уравнений***

$$\cos A\cdot x'-\sin A\cdot x=0, \tag{6}$$

$$(U-I)x'+i(U+I)x=0, \tag{7}$$

эрмитово и, обратно, всякое эрмитово отношение $x\theta x'$ представимо в формах (6) *и* (7), *которые назовем каноническими. При этом операторы $-e^{2iA}$ и соответственно U в представлениях* (6), (7) *определяются отношением θ однозначно и являются его преобразованием Кэли U_θ.* (Очевидно, оператор A в (6) всегда можно выбрать так, что $|A|\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ не является собственным числом A. При такой нормировке оператор A определяется отношением θ *однозначно*).

Отношение θ тогда и только тогда порождается некоторым самосопряженным оператором B в смысле (2), *когда единица не является собственным числом для U_θ, и в этом случае $U_\theta=U_B\equiv(B-iI)(B+iI)^{-1}$.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму, справедливость которой проверяется непосредственно.

* С точностью до знака.

** I — единичный оператор в H.

Лемма 2. *Векторы x, $x' \in H$ удовлетворяют (6) тогда и только тогда, когда они представимы в виде**

$$x' = \sin A \cdot v, \quad x = \cos A \cdot v, \quad v \in H. \tag{8}$$

При этом $v \in H$ определяется однозначно в силу (8):

$$v = \sin A \cdot x' + \cos A \cdot x.$$

(*Лемма верна и для случая, когда x, x', v — операторы* в H).

Доказательство теоремы. Пусть отношение θ задано уравнением (6). Покажем, что θ — эрмитово. Свойство 1° вытекает непосредственно из представления вида (8) для элементов $x\theta x'$ и $y\theta y'$. Проверим свойство 2°. Пусть для некоторой пары x, x' выполняется (1) при любых $y\theta y'$. Используя для y, y' представление вида (8), получаем отсюда

$$(x', \cos A \cdot v) - (x, \sin A \cdot v) = 0,$$

т. е. $(\cos A \cdot x' - \sin A \cdot x, \ v) = 0$ при любых $v \in H$. Это означает, что $x\theta x'$, а потому θ обладает свойством 2°, и значит, эрмитово. Отношение (7) сводится к (6), если положить $U = -e^{2iA}$.

Найдем преобразование Кэли U_θ отношения θ (7). Имеем из (7) $U(x' + ix) = x' - ix$, если $x\theta x'$. Значит, $U_\theta = U$.

Теперь пусть дано, что отношение θ — эрмитово. Тогда для всех пар $x\theta x'$ будет $U_\theta(x' + ix) = x' - ix$, или $(U_\theta - I)x' + i(U_\theta + I)x = 0$, где U_θ — преобразование Кэли отношения θ. Последним уравнением по доказанному порождается некоторое эрмитово отношение θ_1, и, как видим, $\theta_1 \supset \theta$, а поэтому в силу свойства 4° $\theta_1 = \theta$. Теорема доказана.

2. Различные формы эрмитовых отношений. Любое эрмитово отношение θ может быть представлено в канонической форме (6), однако существует бесчисленное множество других представлений отношения θ, которые, конечно, эквивалентны между собой и сводятся к (6).

Отметим прежде всего следующую форму записи эрмитовых отношений, которую тоже можно причислить к каноническим (ср. [12]). Обозначим $H^\perp$ подпространство нулей оператора $\cos A$, тогда в подпространстве $H_1 = H \ominus H^\perp$ существует самосопряженный оператор $A_1 = \operatorname{tg} A$ (возможно, неограниченный) и (6) эквивалентно следующему условию:

$$x' = A_1 x + x^\perp, \quad x \in H_1, \quad x^\perp \in H^\perp. \tag{9}$$

Широкий класс уравнений, эквивалентных (6), может быть получен умножением (6) слева на произвольный ограниченный оператор K, обратимый на своей области значений.

Теорема 2. *Пусть B и C — произвольные ограниченные операторы во всем H. Для того чтобы отношение θ, определяемое условием*

$$x\theta x' \longleftrightarrow Cx' - Bx = 0, \tag{10}$$

было эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы

1. *Операторы $B \pm iC$ были обратимы на своих областях значений.*
2. *Оператор*

$$U = (B + iC)^{-1}(B - iC) \tag{11}$$

был бы унитарным (и, в частности, $\Delta_{B-iC} \subseteq \Delta_{B+iC}$).

При этих условиях U является преобразованием Кэли отношения θ, и с его помощью θ может быть представлено в форме (7).

* (8) является *параметрической формой* записи отношения (6).

Доказательство. Пусть отношение θ (10) эрмитово. Тогда в силу теоремы 1 существует такой самосопряженный оператор A, что (10) эквивалентно (6) и при любом $v \in H$

$$(\cos A \cdot v)\,\theta\,(\sin A \cdot v),$$

или в силу (10) $(C \sin A - B \cdot \cos A)\,v = 0,\ \ v \in H$, т. е.

$$C \cdot \sin A - B \cdot \cos A = 0.$$

Отсюда по лемме 2 следует, что существует некоторый ограниченный оператор K такой, что

$$C = K \cos A,\ \ B = K \sin A.$$

Оператор K должен быть обратим на своей области значений. Действительно, если бы при некотором $h \neq 0$ было $Kh = 0$, то (10) удовлетворялось бы любой парой векторов $x,\ x' \in H$, для которых

$$\cos A \cdot x' - \sin A \cdot x = h.$$

Например, можно взять $x' = \cos A \cdot h,\ \ x = -\sin A \cdot h$. Это противоречит (6), и обратимость K доказана. Отсюда немедленно вытекает необходимость условий теоремы, так как

$$B \pm iC = \pm iKe^{\mp iA},\ \ U = (B + iC)^{-1}(B - iC) = -e^{2iA}.$$

Проверим достаточность.

Пусть оператор U (11) определен во всем H, тогда уравнение $Cx' - Bx = 0$ эквивалентно уравнению

$$(U - I)\,x' + i\,(U + I)\,x = 0. \tag{12}$$

Действительно, подставляя в (12) выражение (11) для U и умножая слева на ограниченный обратимый оператор $B + iC$, устанавливаем эквивалентность уравнений (12) и (10). Но оператор U по условию унитарен, и поэтому отношение (12), а с ним и (10) — эрмитово. Теорема доказана.

Следствие. *В случае конечномерного H следующие два условия необходимы и достаточны для эрмитовости отношения* (10):

1. *Невырожденность уравнения* (10), т. е.

$$\det(BB^* + CC^*) \neq 0. \tag{13}$$

2. *Самосопряженность* (10), *т. е.*

$$BC^* = CB^*. \tag{14}$$

(Сравни (13) и (14) с общим видом самосопряженных краевых условий для скалярного уравнения порядка $2n$ в [1—3], а также с [9]).

Можно также рассматривать отношения θ, порождаемые уравнением (10) с неограниченными операторами B и C. В этом случае естественно требовать, чтобы эрмитовым было не само отношение θ, а его замыкание $\tilde{\theta}$, которому в $H \oplus H$ отвечает множество $\tilde{M} = \overline{M}$, если M отвечает отношению θ. Примеры таких отношений θ можно получить, умножая (6) слева на неограниченный оператор K, обратимый на своей области значений и удовлетворяющий дополнительно условию, чтобы множество векторов $v \in H$, для которых $\sin 2A \cdot v \in D_K$, было бы плотно в H. Справедлива следующая теорема, доказательство которой мы опускаем*.

* *Эта теорема не понадобится нам в дальнейшем.*

Теорема 3. *Пусть* $\tilde{\theta}$ *есть замыкание отношения* θ, *определенного условием* (10), *где* B *и* C — *произвольно заданные операторы (возможно, неограниченные, незамкнутые и с неплотными в* H *областями определения* D_B *и* D_C). *Для того чтобы отношение* $\tilde{\theta}$ *было эрмитовым, необходимы следующие четыре условия*:

1. *Линейная оболочка* $D_B \bigcup D_C$ *плотна в* H (*т. е.* $D_B^{\perp} \bigcap D_C^{\perp} = \{0\}$).
2. *Операторы* $B \pm iC$ *обратимы на своих областях значений.*
3. *Замыкание* $\overline{U}_1$ *оператора* U_1,

$$U_1 = (B + iC)^{-1} (B - iC),$$

в подпространстве $H_1 = \overline{D_B \bigcap D_C}$ *существует и унитарно.*

4. $B \cdot \{D_C^{\perp} \bigcap D_B\} = \{0\}$,

$\quad C \cdot \{D_B^{\perp} \bigcap D_C\} = \{0\}$.

Перечисленные условия вместе с условием

5. $\overline{D_B \bigcap D_C} = \overline{D}_B \bigcap \overline{D}_C$

становятся достаточными для эрмитовости $\tilde{\theta}$. *В этом случае оператор*

$$U = \overline{U}_1 \oplus I_{D_B^{\perp}} \oplus \left(-I_{D_C^{\perp}}\right) \tag{15}$$

(*где* I_R — *единичный оператор на* $R \subset H$) *унитарен и является преобразованием Кэли отношения* $\tilde{\theta}$, *которое может быть представлено через* U (15) *в форме* (7).

§ 2. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l[y] \equiv -(p(t)\, y')' + i\,[r(t)\, y' + (r(t)\, y)'] + q(t)\, y = \lambda y, \tag{1}$$

коэффициенты которого $p(t)$, $r(t)$, $q(t)$ являются при $t \in [0, b]$ ограниченными самосопряженными операторами в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$p^*(t) = p(t), \; r^*(t) = r(t), \; q^*(t) = q(t),$$

причем $p(t)$, $r(t)$, $q(t)$, $p'(t)$, $r'(t)$ непрерывно (в сильном смысле) зависят от параметра t, и для $p(t)$ при всех $t \in [0, b]$ существует ограниченный обратный оператор $p^{-1}(t)$. (Условие непрерывности коэффициентов можно ослабить).

Решениями уравнения (1) могут быть операторные или векторные (со значениями в H) функции $y(t)$.

Каждой паре векторов y_0, $y_1 \in H$ отвечает решение $y(t, \lambda)$ уравнения (1), имеющее y_0, y_1 своими данными Коши: $y(0, \lambda) = y_0$, $y'(0, \lambda) = y_1$. Это решение дается формулой

$$y(t, \lambda) = Y_0(t, \lambda)\, y_0 + Y_1(t, \lambda)\, y_1, \tag{2}$$

где $Y_0(t, \lambda)$, $Y_1(t, \lambda)$ — операторные решения уравнения (1) при начальных данных

$$Y_0(0, \lambda) = I, \quad Y_0'(0, \lambda) = 0,$$

$$Y_1(0, \lambda) = 0, \quad Y_1'(0, \lambda) = I.$$

Обозначим $H(0, b)$ гильбертово пространство, которое образуют вектор-функции с суммируемым на $[0, b]$ квадратом нормы, если задать для них скалярное произведение формулой

$$<x, y> = \int_0^b (x(t), y(t))_H dt.$$

Лемма 1. *Соответствие между парами $\{y_0, y_1\} \in H \oplus H$ и решениями $y(t, \lambda) \in H(0, b)$ уравнения (1), определяемое формулой (2), взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Поэтому совокупность решений уравнения $l[y] = \lambda y$ образует подпространство в $H(0, b)$.* (Подпространство замкнуто).

Докажем, что

$$<y, y> = \int_0^b |y(t, \lambda)|^2 dt \geqslant C(\lambda)(|y_0|^2 + |y_1|^2), \quad C(\lambda) > 0, \tag{3}$$

Так как

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant b} \{|Y_0''(t, \lambda)| + |Y_1''(t, \lambda)|\} < \infty,$$

то

$$y(t, \lambda) = y_0 \cos t + y_1 \sin t + t^2 \cdot (|y_0|^2 + |y_1|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{O}(1),$$

где $\vec{O}(1)$ — векторная величина с ограниченной нормой (зависящей, очевидно, от λ). Поэтому

$$|y(t, \lambda)| \geqslant (|y_0|^2 + |y_1|^2)^{\frac{1}{2}} \{\sin(t - \gamma) + O(t^2)\},$$

откуда и получаем (3). Из (3) следует непрерывная зависимость начальных данных от решения, после чего легко проверяются остальные утверждения леммы.

Пусть $D \subset H(0, b)$ есть совокупность вектор-функций $y(t)$ таких, что $p(t)y'(t)$ абсолютно непрерывно (сильно) и $l[y] \in H(0, b)$. Выражение $l[y]$ (1) порождает в $H(0, b)$ дифференциальный оператор L с областью определения D: $Ly = l[y]$, $y \in D$. Обозначим L_0 сужение L на многообразие D_0 таких $y(t) \in D$, для которых $y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0$.

Оператор L_0 имеет, очевидно, плотную в $H(0, b)$ область определения и является симметрическим, что следует из формулы Лагранжа

$$< l[x], y > = [-(p(t)x'(t), y(t)) + (p(t)x(t), y'(t)) + \\ + 2i(r(t)x(t), y(t))]_0^b + < x, l[y] >. \tag{4}$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\overset{*}{L_0} = L. \tag{5}$$

Доказательство с учетом леммы 1 проводится аналогично известному в скалярном случае [1—3]. Так как в силу (4) $L \subset \overset{*}{L_0}$, то достаточно установить обратное включение. Пусть $x(t) \in D_{\overset{*}{L_0}}$ и $y(t)$ — одно из решений уравнения $l[y] = \overset{*}{L_0}x$. Тогда $< L_0 g, x - y > = 0$ при любых $g(t) \in D_0$. Отсюда следует, что $u(t) = x - y$ является решением уравнения $l[u] = 0$, так как по лемме 1 многообразие решений этого уравнения N_0 есть некоторое подпространство $N_0 \subset H(0, b)$, и, как мы сейчас покажем,

$$H(0, b) \ominus N_0 = \Delta_{L_0} \equiv L_0 D_0. \tag{6}$$

Действительно, пусть $h(t) \in N(0, b) \ominus H_0$ и $g(t)$ — решение уравнения $l[g] = h$ при начальных данных $g(b) = g'(b) = 0$. Тогда при любых $u \in N_0$ $l[u] = 0$, и по (4)

$$0 = < l[g], u > = (p(0)g'(0), u(0)) - (p(0)g(0), u'(0)) - \\ - 2i(r(0)g(0), u(0)),$$

откуда в силу произвольности выбора $u(0) \in H$ $u'(0) \in H$, и, так как $p(0)$ имеет обратный $p^{-1}(0)$, находим, что $g(0) = g'(0) = 0$, а потому $g(t) \in D_0$, и (6) доказано. Поэтому $x = y + u$, где $y \in D$, $u \in N_0$, т. е. $x \in D$ и $L \supset \overset{*}{L_0}$. Лемма доказана.

Установленный результат (5) означает, что любое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L_0 порождается на своей области определения $\tilde{D}$, $D_0 \subset \tilde{D} \subset D$, дифференциальным выражением l, (1):

$$\tilde{L}y = l[y], \quad y \in \tilde{D}. \tag{7}$$

В силу (4) произвольная вектор-функция $x(t) \in D$ тогда и только тогда принадлежит $\tilde{D}$, когда при всех $y \in \tilde{D}$

$$[-(p(t)x'(t), y(t)) + (p(t)x(t), y'(t)) + \\ + 2i(r(t)x(t), y(t))]_0^b = 0, \quad y \in \tilde{D}, \tag{8}$$

и любое многообразие $\tilde{D} \subset D$, обладающее этим свойством, является областью определения некоторого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L_0.

Обозначим $H^2 = H \oplus H$ и сопоставим каждому элементу $v(t) \in D$ пару векторов $\hat{v}$, $\hat{v}' \in H^2$:

$$\hat{v} = \{v(0), v(b)\},$$

$$\hat{v}' = \{p(0)v'(0) - ir(0)v(0) - p(b)v'(b) + ir(b)v(b)\}. \tag{9}$$

Так как $p^{-1}(0)$, $p^{-1}(b)$ определены во всем H, то любая пара векторов $\hat{v}$, $\hat{v}' \in H^2$ представима в виде (9), где $v(t) \in D$. При этом в силу (8), будет ли $v(t) \in \tilde{D}$, определяется исключительно значениями $\hat{v}$, $\hat{v}'$ и не зависит в остальном от выбора $v(t) \in D$.

Поэтому всякое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L_0 определяет в H^2 некоторое бинарное отношение θ, а именно: $\hat{v}\theta\hat{v}'$ тогда и только тогда, когда паре $\hat{v}$, $\hat{v}'$ отвечают элементы $v(t) \in \tilde{D}$. Условие (8) означает, что если $\hat{x}\theta\hat{x}'$, $\hat{y}\theta\hat{y}'$ то

$$\left(\hat{x}', \hat{y}\right)_2 - \left(\hat{x}, \hat{y}'\right)_2 = 0, \tag{10}$$

где $(\cdot,\cdot)_2$ — скалярное произведение в H^2, и если для некоторой пары $\hat{x}$, $\hat{x}'$ выполняется (10) при любых $\hat{y}$, $\hat{y}' \in H^2$, $\hat{y}\theta\hat{y}'$, то и $\hat{x}\theta\hat{x}'$. Таким образом, отношение θ эрмитово (см. § 1). Иначе говоря, условием (8) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между всеми самосопряженными расширениями $\tilde{L}$ оператора L_0 и всеми эрмитовыми отношениями θ в $H^2 = H \oplus H$. Вспоминая теорему 1 об общем виде эрмитовых отношений, видим, что нами доказана следующая

Теорема 4. *Всякое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L_0, порожденного в пространстве вектор-функций $H\ (0,\ b)$ дифференциальным выражением $l[y]$ (1) с операторными коэффициентами, определяется этим выражением (7) и краевыми условиями любого из видов*

$$\cos\hat{A}\cdot\hat{y}' - \sin\hat{A}\cdot\hat{y} = 0, \tag{11}$$

или

$$\left(\hat{U}-\hat{I}\right)\hat{y}' + i\left(\hat{U}+\hat{I}\right)\hat{y} = 0, \tag{12}$$

где $\hat{A}$, $\hat{U}$ — самосопряженный, соответственно, унитарный оператор в $H^2 = H \oplus H$, а векторы $\hat{y}$, $\hat{y}' \in H^2$ определяются по $y(t)$ в соответствии с формулой (9). Обратно, любое из краевых условий (11) или (12) порождает самосопряженное расширение оператора L_0. Соответствие между унитарными операторами $\hat{U}$ или $-\exp\left\{2i\hat{A}\right\}$, с одной стороны, и самосопряженными расширениями $\tilde{L}$ — с другой, взаимно однозначное.

Примеры. 1) Распадающиеся краевые условия. (Условия типа Штурма). Их общий вид

$$\begin{cases}\cos A\cdot p(0)\,y'(0) - (\sin A + i\cos A\cdot r(0))\,y(0) = 0,\\ \cos B\cdot p(b)\,y'(b) + (\sin B - i\cos B\cdot r(b))\,y(b) = 0,\end{cases} \tag{13}$$

где A, B — произвольные самосопряженные операторы в H. Этим условиям отвечают в (11), (12) операторы

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix},\quad \hat{U} = -\begin{pmatrix}\exp 2iA & 0\\ 0 & \exp 2iB\end{pmatrix}.$$

Если, в частности, существует $(\cos A)^{-1}$, то первое из условий (13) принимает вид

$$p(0)\,y'(0) - (A_1 + ir(0))\,y(0) = 0, \tag{14}$$

где A_1 — произвольный самосопряженный оператор в H (возможно, неограниченный). Условия вида (13), если заранее предположить их распадающимися, можно получить и непосредственно из (8) по теореме 1 об общем виде эрмитовых отношений.

2) Обобщенные периодические условия имеют вид

$$y(b) = Uy(0),\quad p(b)\,y'(b) - ir(b)\,y(b) = U\,[p(0)\,y'(0) - ir(0)\,y(0)], \tag{15}$$

где U — произвольный унитарный оператор в H. Этим условиям отвечают в (12) и (11)

$$\hat{U} = -\begin{pmatrix}0 & U^*\\ U & 0\end{pmatrix},\quad \hat{A} = \frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} I & -U^*\\ -U & I\end{pmatrix}.$$

3) Смешанные штурмо-периодические условия. Для простоты записи положим $p(t)\equiv I$, $r(t)\equiv 0$. Пусть H_0, H_b — некоторые подпространства в H: $H_0 \subseteq H$, $H_b \subseteq H$, причем $\dim H_0 = \dim H_b \leqslant \infty$, P_0 и P_b — ортопроекторы на H_0 и H_b соответственно, $P_0^\perp$ и $P_b^\perp$ — ортопроекторы на $H_0^\perp = H \ominus H_0$ и на $H_b^\perp = H \ominus H_b$. Возможность $\dim H_0^\perp \neq \dim H_b^\perp$ в случае бесконечномерного H не исключается. Пусть, наконец, V — изометрический оператор, $VH_0 = H_b$, A и B — произвольные

самосопряженные операторы, действующие в $H_0^\perp$ и $H_b^\perp$. Тогда названные краевые условия запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered} P_b y'(b) = VP_0 y'(0), \quad P_b y(b) = VP_0 y(0) \\ \cos A \cdot P_0^\perp y'(0) - \sin A \cdot P_0^\perp y(0) = 0 \\ \cos B \cdot P_b^\perp y'(b) + \sin B \cdot P_b^\perp y(b) = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

В формулах (12), (11) им отвечают операторы $\hat{U}$ и $\hat{A}$ в пространстве $H \oplus H = H_0^\perp \oplus H_0 \oplus H_b \oplus H_b^\perp$:

$$\hat{U} = -\begin{pmatrix} \exp 2iA & & & \\ & 0 & V^* & \\ & V & 0 & \\ & & & \exp 2iB \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = \frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} A & & & \\ & I_0 & -V^* & \\ & -V & I_b & \\ & & & \frac{4}{\pi} B \end{pmatrix},$$

где все невыписанные элементы матриц — нули, I_0 и I_b — единичные операторы в H_0 и в H_b.

§ 3. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЛЮБОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим отдельно случаи дифференциальных выражений четного и нечетного порядков, определенных на достаточно гладких вектор-функциях $y(t) \in H(0, b)$.

1. Выражения четного порядка $2n$. Пусть

$$l[y] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \{(p_{n-k} y^{(k)})^{(k)} - i[(q_{n-k} y^{(k)})^{(k-1)} + (q_{n-k} y^{(k-1)})^{(k)}]\} + p_n y, \tag{1}$$

где все операторные коэффициенты самосопряжены,

$$p_k(t) = \overset{*}{p}_k(t), \quad q_k(t) = \overset{*}{q}_k(t), \quad (k = 0, 1, \ldots n-1), \quad p_n(t) = \overset{*}{p}_n(t),$$

и непрерывно зависят от t вместе со своими производными до порядка $n-k$ включительно, причем $p_0^{-1}(t)$ существует и ограничен при $t \in [0, b]$. (Эти требования можно ослабить, рассматривая l как квазидифференциальную операцию).

Нам понадобятся выражения для квазипроизводных $y^{[k]}$, отвечающих операции l. Определим их следующим образом*:

$$\begin{gathered} y^{[k]} = y^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \ldots n-1; \ y^{(0)} = y) \\ y^{[n]} = p_0 y^{(n)} - i q_0 y^{(n-1)} \\ y^{[n+k]} = -\frac{d}{dt} y^{[n+k-1]} + p_k y^{(n-k)} + i[q_{k-1} y^{(n-k+1)} - q_k y^{(n-k-1)}], \quad (k = 1, \ldots n; \ q_n \equiv 0). \end{gathered} \tag{2}$$

При этом

$$l[y] = y^{[2n]}. \tag{3}$$

---

* При $q_0 = q_1 = \ldots = q_{n-1} \equiv 0$ наше определение совпадает с принятым в [1—3].

Непосредственно проверяется, что

$$(l[x],\ y)_H = (x^{[2n]},\ y) = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(x^{[2n-k]},\ y^{(k-1)}) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(p_{n-k}x^{(k)},\ y^{(k)}) + i\sum_{k=1}^{n}[(q_{n-k}x^{(k)},\ y^{(k-1)}) - (q_{n-k}x^{(k-1)},\ y^{(k)})]. \qquad (4)$$

Вычитая отсюда аналогичное выражение для $(x,\ l[y])$ и интегрируя, получаем тождество Лагранжа

$$< l[x],\ y > - < x,\ l[y] > = \sum_{k=1}^{n}[(x^{(k-1)},\ y^{[2n-k]}) -$$

$$-(x^{[2n-k]},\ y^{(k-1)})]_{t=0}^{b}. \qquad (5)$$

Преобразуем правую часть этого тождества. Для этого каждой $2n-1$ раз непрерывно (квази)дифференцируемой вектор-функции $u(t) \in H(0,\ b)$ сопоставим пару векторов $\hat{u},\ \hat{u}'$ из пространства $H^{2n} = \underbrace{H \oplus H \oplus \ldots \oplus H}_{(2n)}$ по формулам

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \{u(0),\ u'(0), \ldots u^{(n-1)}(0),\ u(b),\ u'(b), \ldots u^{(n-1)}(b)\} \\ \hat{u}' &= \{u^{[2n-1]}(0),\ u^{[2n-2]}(0), \ldots u^{[n]}(0),\ -u^{[2n-1]}(b), \\ &\quad -u^{[2n-2]}(b), \ldots -u^{[n]}(b)\}. \end{aligned} \qquad (6)$$

С помощью этих обозначений (5) можно записать так:

$$< l[x], y > - < x,\ l[y] > = (\hat{x}',\ \hat{y})_{2n} - (\hat{x},\ \hat{y}')_{2n}, \qquad (7)$$

где $(\cdot,\cdot)_{2n}$ означает скалярное произведение в H^{2n}.

Определим теперь операторы L_0 и L, порождаемые выражением $l[y]$ (1) на многообразиях D_0 и D соответственно, где D — совокупность вектор-функций $y(t) \in H(0,\ b)$, имеющих абсолютно непрерывные (квази)-производные до $(2n-1)$ порядка включительно, для которых $l[y] \in H(0,\ b)$, а D_0 — совокупность тех $y(t) \in D$, для которых $y(0) = y^{[1]}(0) = \ldots = y^{[2n-1]}(0) = 0$ и $y(b) = y^{[1]}(b) = \ldots = y^{[2n-1]}(b) = 0$. Так же, как и в § 2, доказывается

Лемма 1. $\overset{*}{L_0} = L$.

Единственное, что здесь нужно проверить снова, это замкнутость в $H(0,\ b)$ многообразия решений однородного уравнения $l[y] = 0$. Это сделано в лемме 4 в конце настоящего параграфа. После этого доказательство леммы 1 проводится по известной для скалярного случая схеме (см. [1—3]).

Таким образом, в силу (7) всякое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L_0 порождается операцией $l[y]$ на некоторой области определения $\tilde{D}$, $D_0 \subset \tilde{D} \subset D$, обладающей тем свойством, что $x(t) \in D$ тогда и только тогда принадлежит $\tilde{D}$, когда

$$(\hat{x}',\ \hat{y})_{2n} - (\hat{x},\ \hat{y}')_{2n} = 0,\ y(t) \in \tilde{D}. \qquad (8)$$

Здесь векторы $\hat{x},\ \hat{x}',\ \hat{y},\ \hat{y}' \in H^{2n}$ определены по $x(t),\ y(t)$ в соответствии с формулой (6). И обратно, всякое многообразие $\tilde{D} \subset D$, обладающее сформулированным свойством, порождает некоторое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L_0. Как и в § 2, это означает, что справедлива следующая

Теорема 5. *Всяким самосопряженным расширением $\tilde{L}$ оператора L_0 порождается некоторое эрмитово отношение θ в H^{2n}, и наоборот, причем соответствие взаимно-однозначное. Иначе говоря, всякое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ определяется краевыми условиями любого из видов:*

$$\cos \hat{A} \cdot \hat{y}' - \sin \hat{A} \cdot \hat{y} = 0, \tag{9}$$

или

$$\left(\hat{U} - \hat{I}\right) \hat{y}' + i \left(\hat{U} + \hat{I}\right) \hat{y} = 0, \tag{10}$$

где $\hat{A}$, $\hat{U}$ — самосопряженный, соответственно унитарный оператор в H^{2n}, а векторы $\hat{y}$, $\hat{y}' \in H^{2n}$ определяются по $y(t) \in D$ формулой (6). Обратно, любым из краевых условий вида (9), (10) порождается некоторое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L_0.

Примеры. 1. Распадающиеся краевые условия при $t = 0$ (аналогично при $t = b$) приводятся к виду:

$$\cos \hat{A}_0 \cdot \hat{y}_0' - \sin \hat{A}_0 \cdot \hat{y}_0 = 0,$$

где

$$\hat{y}_0 = \{y(0),\ y'(0), \dots y^{(n-1)}(0)\} \in H^n,$$

$$\hat{y}_0' = \{y^{[2n-1]}(0),\ y^{[2n-2]}(0), \dots y^{[n]}(0)\} \in H^n,$$

$\hat{A}_0$ — произвольный самосопряженный оператор в H^n.

2. Обобщенные периодические условия:

$$y^{[2n-k]}(b) = U_k y^{[2n-k]}(0); \quad y^{(k-1)}(b) = U_k y^{(k-1)}(0),$$

где $k = 1, \dots n$, U_k — унитарные операторы в H.

2. Выражения нечетного порядка $2n+1$. Пусть

$$l_1[y] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \{ i [(q_{n-k} y^{(k)})^{(k+1)} + (q_{n-k} y^{(k+1)})^{(k)}] + \\ + (p_{n-k} y^{(k)})^{(k)} \}, \tag{11}$$

где все коэффициенты p, q самосопряжены и непрерывно зависят от t вместе со своими производными до порядков $n-k+1$ включительно — $q_k(t)$, и $n-k$ включительно — $p_k(t)$, и существует $q_0^{-1}(t)$, ограниченный при $t \in [0, b]$. Определим квазипроизводные $y^{[k]}$, отвечающие операции l_1, следующими формулами*:

$$y^{[k]} = y^{(k)},\ (k = 0,\ 1, \dots n-1),\ y^{[n]} = -i q_0 y^{(n)},$$

* Для операции нечетного порядка мы вводим квазипроизводные по другим формулам, чем для операции четного порядка. Это не создает неудобств, так как, независимо от способа введения квазипроизводных, рассмотрения в обоих случаях проводятся по-разному. Существует и другой способ введения квазипроизводных для операций любого порядка, предложенный Д. Шином [13, 14]. (Необходимо отметить, что, как показал И. М. Глазман [15, 16], основной результат работ [13, 14] — обобщение альтернативы Вейля — ошибочен).

$$y^{[n+k+1]} = -\frac{d}{dt} y^{[n+k]} + p_k y^{(n-k)} + i\,[q_k y^{(n-k+1)} - \tag{12}$$
$$- q_{k+1} y^{(n-k-1)}] \quad (k = 0,\ 1, \ldots n;\ q_{n+1} \equiv 0).$$

При этом

$$l_1[y] = y^{[2n+1]}. \tag{13}$$

Вместо (4) имеем теперь

$$(l_1[x],\ y)_H = (x^{[2n+1]},\ y) = -\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n} (x^{[2n-k]},\ y^{(k)}) + \sum_{k=0}^{n} (p_{n-k}x^{(k)},\ y^{(k)}) +$$
$$+ i \sum_{k=0}^{n} [(q_{n-k}x^{(k+1)},\ y^{(k)}) - (q_{n-k}x^{(k)},\ y^{(k+1)})],$$

и тождество Лагранжа принимает вид

$$< l_1[x],\ y > - < x,\ l_1[y] > = \sum_{k=0}^{n} [(x^{(k)},\ y^{[2n-k]}) - (x^{[2n-k]},\ y^{(k)})]_{t=0}^{b} =$$
$$= 2i\,(q_0(t)\,x^{(n)},\ y^{(n)})\big|_0^b + \sum_{k=0}^{n-1} [(x^{(k)},\ y^{[2n-k]}) - (x^{[2n-k]},\ y^{(k)})]_{t=0}^{b}. \tag{14}$$

Наличие здесь в правой части слагаемого, содержащего производные $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ одного и того же порядка, делает переход к записи тождества Лагранжа в нужной нам форме (7) более сложным, требующим следующих рассмотрений. Так как оператор $q_0(t)$ самосопряжен и имеет ограниченный обратный, то

$$H = H_t^+ \oplus H_t^-,$$

где H_t^+, H_t^- — инвариантные подпространства оператора $q_0(t)$, на первом из которых $q_0(t)$, а на втором $-q_0(t)$ являются положительно определенными (т. е. имеют положительную нижнюю грань). Обозначим P_t^+, P_t^- ортопроекторы на H_t^+, H_t^- соответственно и положим

$$q_+(t) = q_0(t)\,P_t^+,\quad q_-(t) = -q_0(t)\,P_t^-. \tag{15}$$

Очевидно, операторы $q_+(t)$, $q_-(t)$ неотрицательны, и

$$q_0(t) = q_+(t) - q_-(t).$$

Положим далее

$$Q_t^+ = q_+^{\frac{1}{2}}(t) + q_-^{\frac{1}{2}}(t),\quad Q_t^- = q_+^{\frac{1}{2}}(t - q_-^{\frac{1}{2}}(t), \tag{16}$$

где $q_\pm^{\frac{1}{2}}(t) \geqslant 0$. Операторы $Q_t^\pm$ самосопряженны, перестановочны и имеют ограниченные обратные, причем легко проверяется, что

$$Q_t^+ Q_t^- = Q_t^- Q_t^+ = q_0(t), \tag{17}$$

а также

$$Q_t^-\,(Q_t^+)^{-1} = Q_t^+\,(Q_t^-)^{-1} = P_t^+ - P_t^-. \tag{18}$$

(Эта последняя формула понадобится нам лишь при доказательстве теоремы 7).

Заметим, наконец, что

$$\dim H_b^+ = \dim H_0^+ = \dim H_t^+,\ \dim H_b^- = \dim H_0^- = \dim H_t^-,\ t \in [0,\ b]. \tag{19}$$

Это равенство размерностей (конечных или бесконечных) следует из непрерывной зависимости от $t \in [0, b]$ оператора $q_0(t)$ и из ограниченности при тех же t оператора $q_0^{-1}(t)$, означающей, что 0 не принадлежит спектру $q_0(t)$ ни при каком $t \in [0, b]$. В этом случае проекторы $P_t^- = E_{0t}$, $P_t^+ = I - E_{0t}$, где $E_{\lambda t}$ — разложение единицы оператора $q_0(t)$ непрерывно (равномерно) зависят от t*, а это и означает справедливость (19).

В силу (19) существует бесчисленное множество унитарных операторов в H, переводящих H_b^- в H_0^- и H_b^+ в H_0^+. Пусть U_q — один из них, выбранный произвольно, но фиксированный. (В частности, если $\dim H_0^+ = 0$, или $\dim H_0^- = 0$, или $H_0^+ = H_b^+$, то можно считать $U_q = I$). Очевидно,

$$P_0^- U_q = U_q P_b^-, \quad P_0^+ U_q = U_q P_b^+. \tag{20}$$

Покажем, что справедливо равенство

$$Q_0^+ U_q Q_b^- = Q_0^- U_q Q_b^+. \tag{21}$$

Для этого заметим, что $Q_t^{\pm} P_t^+ = q_+^{\frac{1}{2}}(t)$, $Q_t^{\pm} P_t^- = \pm\, q_-^{\frac{1}{2}}(t)$, а потому, учитывая также (20), имеем

$$Q_0^+ U_q Q_b^- P_b^+ = Q_0^+ P_0^+ U_q q_+^{\frac{1}{2}}(b) = q_+^{\frac{1}{2}}(0)\, U_q q_+^{\frac{1}{2}}(b),$$

$$Q_0^- U_q Q_b^+ P_b^+ = Q_0^- P_0^+ U_q q_+^{\frac{1}{2}}(b) = q_+^{\frac{1}{2}}(0) U_q q_+^{\frac{1}{2}}(b),$$

т. е.

$$Q_0^+ U_q Q_b^- P_b^+ = Q_0^- U_q Q_b^+ P_b^+.$$

Аналогично

$$Q_0^+ U_q Q_b^- P_b^- = Q_0^- U_q Q_b^+ P_b^-,$$

и, так как $P_b^+ + P_b^- = I$, (21) доказано.

Заметим теперь, что если произвольной паре векторов f_0, $f_b \in H$ сопоставить два других вектора f, $f' \in H$ по формулам

$$f = Q_0^+ f_0 + U_q Q_b^+ f_b, \quad f' = -i Q_0^- f_0 + i U_q Q_b^- f_b, \tag{22}$$

и векторы g, $g' \in H$ построить до g_0, $g_b \in H$ по таким же формулам, то

$$(f', g) - (f, g') = 2i\,[(q(b) f_b, g_b) - (q(0) f_0, g_0)] \tag{23}$$

в силу (22), (21) и (17). После этого остается отнести каждой $2n$ раз непрерывно (квази)дифференцируемой вектор-функции $v(t) \in H(0, b)$ пару векторов $\hat{v}$, $\hat{v}' \in H^{2n+1} = H \oplus H^{2n}$ по формулам

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \left\{ Q_0^+ v_0^{(n)} + U_q Q_b^+ v_b^{(n)},\ v_0,\ v_0', \dots v_0^{(n-1)},\ v_b,\ v_b', \dots v_b^{(n-1)} \right\}, \\ \hat{v}' &= \left\{ i U_q Q_b^- v_b^{(n)} - i Q_0^- v_0^{(n)},\ v_0^{[2n]},\ v_0^{[2n-1]}, \dots v_0^{[n+1]}, \right. \\ &\qquad \left. -v_b^{[2n]},\ -v_b^{[2n-1]}, \dots -v_b^{[n+1]} \right\}, \end{aligned} \tag{24}$$

где $v_0 = v(0)$, $v_b = v(b)$ и т. д., и тождество Лагранжа (14) можно теперь записать в нужной нам форме:

$$< l_1[x], y > - < x, l_1[y] > = \left(\hat{x}', \hat{y}\right)_{2n+1} - \left(\hat{x}, \hat{y}'\right)_{2n+1}. \tag{25}$$

* См. [17], стр. 400.

Здесь $(\cdot,\ \cdot)_{2n+1}$ — скалярное произведение в H^{2n+1}, а векторы $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ построены по формулам (24).

Обозначим L_0 оператор, порожденный выражением $l_1[y]$ на функциях, подчиненных условиям $y(0) = y^{[1]}(0) = \ldots = y^{[2n]}(0) = y(b) = \ldots = y^{[2n]}(b) = 0$. Рассуждая как прежде, приходим к следующей теореме.

Теорема 6. *Для самосопряженных расширений $\tilde{L}$ оператора L_0, порожденного в $H(0, b)$ дифференциальным выражением $l_1[y]$ (11) порядка $2n+1$ справедлива теорема 5 с заменой в ее формулировке пространства H^{2n} на H^{2n+1} и формул (6) формулами (24), по которым теперь определяются векторы $\hat{y}$, $\hat{y}' \in H^{2n+1}$, входящие в краевые условия (9), (10).*

Если для операции $l[y]$ (1) четного порядка всегда существуют распадающиеся самосопряженные краевые условия, то для операции нечетного порядка это будет не всегда.

Теорема 7. *Чтобы для операции $l_1[y]$ нечетного порядка $2n+1$ существовали распадающиеся самосопряженные краевые условия в случаях, когда пространство H конечномерно или когда H бесконечномерно, но $n = 0$ (т. е. операция l_1 — первого порядка), необходимо и достаточно условие:*

$$\dim H_0^+ = \dim H_0^- \ (\leqslant \infty), \ \dim H_b^+ = \dim H_b^- \tag{26}$$

(любое из равенств влечет за собой другое в силу (19)). *Если это требование 26) выполнено, то все такие краевые условия (например, при $t = 0$) представимы, как и всякое эрмитово отношение, в следующем виде:*

$$\cos \hat{A} \cdot \hat{y}_0' - \sin \hat{A} \cdot \hat{y}_0 = 0, \tag{27}$$

где $\hat{A}$ — произвольный самосопряженный оператор в $H^{n+} = H_0^+ \oplus H^n$, *а векторы $\hat{y}_0$, $\hat{y}_0' \in H^{n+}$ определяются по $y(t) \in D$ формулами*

$$\begin{gathered}\hat{y}_0 = \left\{\left(q_+^{\frac{1}{2}}(0) + V_0 q_-^{\frac{1}{2}}(0)\right) y_0^{(n)},\ y_0,\ y_0',\ \ldots\ y_0^{(n-1)}\right\},\\ \hat{y}_0' = \left\{i\left(V_0 q_-^{\frac{1}{2}}(0) - q_+^{\frac{1}{2}}(0)\right) y_0^{(n)},\ y_0^{[2n]},\ y_0^{[2n-1]},\ \ldots y_0^{[n+1]}\right\},\end{gathered} \tag{28}$$

в которых V_0 — произвольный, но фиксированный для всех краевых условий (при $t = 0$) изометрический оператор, отображающий H_0^- на H_0^+: $V_0 H_0^- = H_0^+$.

Если же пространство H бесконечномерно и $n \geqslant 1$ (т. е. операция l_1 не ниже третьего порядка), то самосопряженные распадающиеся краевые условия для операции l_1 существуют всегда и имеют при $t = 0$ тот же общий вид (27), но теперь в качестве векторов $\hat{y}_0$, $\hat{y}_0' \in H^{n+}$ следует, вообще говоря, взять

$$\begin{gathered}\hat{y}_0 = \left\{y_0^+ + V_1 y_0^-,\ y_0,\ y_0',\ \ldots\ y_0^{(n-2)}\right\},\\ \hat{y}_0' = \left\{iV_1 y_0^- - iy_0^+,\ y_0^{[2n]},\ y_0^{[2n-1]},\ \ldots\ y_0^{[n+2]}\right\},\end{gathered} \tag{29}$$

где

$$y_0^+ = \left\{ q_+^{\frac{1}{2}}(0)\, y_0^{(n)},\ \frac{1}{2}\left(y_0^{[n+1]} - i y_0^{(n-1)}\right)\right\} \in H_0^+ \oplus H,$$

$$y_0^- = \left\{ q_-^{\frac{1}{2}}(0)\, y_0^{(n)},\ \frac{1}{2}\left(y_0^{[n+1]} + i y_0^{(n-1)}\right)\right\} \in H_0^- \oplus H, \tag{30}$$

а V_1 — *произвольный фиксированный изометрический оператор, отображающий* $H_0^- \oplus H$ *на* $H_0^+ \oplus H$:

$$V_1 \{H_0^- \oplus H\} = H_0^+ \oplus H. \tag{31}$$

Если, в частности, окажется выполненным (26), *то и теперь можно вместо* (29) *воспользоваться формулами* (28).

Доказательство. Ограничимся установлением необходимости условия (26) в указанных случаях. Допустим, что для операции l_1 (11) существуют самосопряженные распадающиеся краевые условия. Они порождают самосопряженное расширение оператора L_0, и потому им отвечает эрмитово отношение θ в пространстве H^{2n+1}, такое, что если некоторая вектор-функция $v(t)$ удовлетворяет этим краевым условиям, то $\hat{v}\ \theta\ \hat{v}'$, и наоборот. Здесь $\hat{v}, \hat{v}' \in H^{2n+1}$ определены формулами (24). Так как условия распадающиеся, то наряду с $\hat{v}\ \theta\ \hat{v}'$ будет также $\hat{v}_0\ \theta\ \hat{v}'_0$, где векторы $\hat{v}_0, \hat{v}'_0 \in H^{2n+1}$ получаются, если в (24) положить $v_b = v'_b = \ldots = v_b^{[2n]} = 0$,* т. е.

$$\hat{v}_0 = \left\{\tilde{v},\ v,\ 0\right\} \in H^{2n+1},\quad \hat{v}'_0 = \left\{\tilde{v}',\ v',\ 0\right\} \in H^{2n+1}, \tag{32}$$

где

$$\tilde{v} = Q_0^+ v_0^{(n)} \in H,\quad v = \left\{v_0,\ v'_0,\ \ldots\ v_0^{(n-1)}\right\} \in H^n,$$

$$\tilde{v}' = -iQ_0^- v_0^{(n)} \in H,\quad v' = \left\{v_0^{[2n]},\ v_0^{[2n-1]},\ \ldots\ v_0^{[n+1]}\right\} \in H^n, \tag{33}$$

а 0 в фигурных скобках есть нулевой вектор из H^n. Отношение $\hat{v}_0\ \theta\ \hat{v}'_0$ означает, что функция $v(t)$ удовлетворяет краевым условиям при $t = 0$.

Отметим, что векторы $\tilde{v}, \tilde{v}' \in H$ связаны в силу построения (33) соотношением $\tilde{v}' = -iQ_0^-(Q_0^+)^{-1}\tilde{v}$, или, учитывая (18),

$$\tilde{v}' = i\left(P_0^- - P_0^+\right)\tilde{v}. \tag{34}$$

* Это свойство может быть положено в основу определения понятия распадающихся краевых условий аналогично тому, как это делается для операторов в частных производных (см. [18, стр. 85]). Это приводит к следующему утверждению. *Эрмитово отношение* θ *в* H^{2n+1} *тогда и только тогда отвечает распадающимся краевым условиям в соответствии с* (24), *когда из* $\{w,\ v,\ u\}\ \theta\ \{w'\ v',\ u'\}$ *следует*

$$\left\{\frac{1}{2}\left[w + i\left(P_0^+ - P_0^-\right) w'\ \right],\ v,\ 0\right\} \theta \left\{\frac{1}{2}\left[w' - i\left(P_0^+ - P_0^-\right) w,\ v',\ 0\right\}\right.,$$

где

$$w,\ w' \in H,\ v,\ v',\ u,\ u' \in H^n.$$

Пусть теперь для некоторой вектор-функции $u(t)$ построены векторы $\hat{u}_0$, $\hat{u}_0' \in H^{2n+1}$ в соответствии с формулами (32), (33). Самосопряженность рассматриваемых распадающихся краевых условий означает, что если

$$\left(\hat{u}_0', \hat{v}_0\right)_{2n+1} - \left(\hat{u}_0, \hat{v}_0'\right)_{2n+1} \equiv 2i\left(\left(P_0^- - P_0^+\right)\tilde{u}, \tilde{v}\right) + (u', v)_n - (u, v')_n = \\ = 0 \tag{35}$$

для всех $v(t)$, удовлетворяющих краевым условиям в нуле: $\hat{v}_0 \,\theta\, \hat{v}_0'$, то и $u(t)$ удовлетворяет при $t=0$ тем же краевым условиям, т. е. $\hat{u}_0 \,\theta\, \hat{u}_0'$.

Обозначим через M многообразие векторов $X = \left\{\tilde{x}, x_1, x_2\right\} \in H^{2n+1}$, где $\tilde{x} \in H$, x_1, $x_2 \in H^n$, таких, что если положить

$$\begin{gathered} \hat{X} = \left\{\tilde{x}, x_1 + ix_2, 0\right\} \in H^{2n+1}, \\ \hat{X}' = \left\{i\left(P_0^- - P_0^+\right)\tilde{x}, ix_1 + x_2, 0\right\} \in H^{2n+1}, \end{gathered} \tag{36}$$

то $\hat{X} \,\theta\, \hat{X}'$. Из свойств эрмитовых отношений вытекает, что M линейно и замкнуто, т. е. является подпространством в H^{2n+1}, а также, что если $X \in M$ и $Y = \left\{\tilde{y}, y_1, y_2\right\} \in M$, то

$$\left(\hat{X}', \hat{Y}\right)_{2n+1} - \left(\hat{X}, \hat{Y}'\right)_{2n+1} \equiv 2i\left[\left(\left(P_0^- - P_0^+\right)\tilde{x}, \tilde{y}\right) + (x_1, y_1)_n - \\ - (x_2, y_2)_n\right] = 0. \tag{37}$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$(TX, Y)_{2n+1} = 0, \tag{38}$$

где T — оператор в H^{2n+1}, заданный матрицей

$$T = \begin{pmatrix} P_0^- - P_0^+ & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & -I_n \end{pmatrix}, \tag{39}$$

I_n — единичный оператор в H^n.

Сформулированное в связи с (35) свойство самосопряженных распадающихся краевых условий и отвечающих им эрмитовых отношений θ означает теперь, что если для некоторого $X \in H^{2n+1}$ выполняется (37) или, что то же, (38) при всех $Y \in M$, то и $X \in M$. Иначе говоря, оператор T отображает M на его ортогональное дополнение в H^{2n+1}:

$$H^{2n+1} = M \oplus TM. \tag{40}$$

Так как оператор T (39), очевидно, унитарен, то

$$\dim M = \dim TM. \tag{41}$$

С другой стороны, $T = P_1 - P_2$, где

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_0^- & & O \\ & I_n & \\ O & & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} P_0^+ & & O \\ & 0 & \\ O & & I_n \end{pmatrix}$$

ортопроекторы в H^{2n+1}, проектирующие на взаимно-ортогональные подпространства H_1 и соответственно H_2:

$$H_1 = H_0^- \oplus H^n, \ H_2 = H_0^+ \oplus H^n, \tag{42}$$

причем

$$H^{2n+1} = H_1 \oplus H_2. \tag{43}$$

Поэтому, если $X \in M$ и, значит, $(TX, X)_{2n+1} = 0$, то

$$((P_1 - P_2) X, X)_{2n+1} = 0,$$

или

$$|P_1 X| = |P_2 X|, \ X \in M. \tag{44}$$

Это означает, что

$$\dim M \leqslant \min \{\dim H_1, \dim H_2\}. \tag{45}$$

Действительно, пусть, например, $\dim H_2 \geqslant \dim H_1 = m$. Тогда для любых $m+1$ векторов $f_k \in M$ $(k = 1, \ldots m+1)$ найдется такая нетривиальная линейная комбинация $f = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k f_k$, что $P_1 f = 0$, ибо векторы $P_1 f_k (k = 1, \ldots m+1)$ линейно зависимы. Но тогда и $P_2 f = 0$ в силу (44), и, значит, $f = 0$, так как $P_1 + P_2 = I_{2n+1}$, а потому $\dim M \leqslant m$*.

Сопоставляя (43), (45), (41) и (40), видим, что это возможно только при условии

$$\dim H_1 = \dim H_2 = \dim M,$$

т. е. в силу (42) необходимо, чтобы

$$\dim \{H_0^- \oplus H^n\} = \dim \{H_0^+ \oplus H^n\}. \tag{46}$$

Это последнее равенство возможно только в следующих случаях: 1) $\dim H_0^- = \dim H_0^+$, размерность H — произвольная (точнее, четная или бесконечная), или 2) $\dim H^n = \infty$, т. е. $\dim H = \infty$ и $n \geqslant 1$ (ибо в случае $n = 0$ H^n — нульмерно). Таким образом, необходимость условий теоремы доказана. Проверка остальных утверждений теоремы предоставляется читателю.

Следствие. *В случае конечномерного H нечетной размерности для дифференциальной операции $l_1[y]$ нечетного порядка не существует распадающихся самосопряженных краевых условий.*

Примеры. 1. Распадающиеся самосопряженные краевые условия для операции

$$i(P - P^{\perp}) \frac{d}{dt} y,$$

где P и $P^{\perp}$ — ортопроекторы на $H_1 \subset H$ и на $H_1^{\perp} = H \ominus H_1$, существуют, если $\dim H_1 = \dim H^{\perp}$, и приводятся в этом случае к следующему виду:

$$Py(0) = V_1 P^{\perp} y(0), \ Py(b) = V_2 P^{\perp} y(b),$$

где V_1, V_2 — произвольные изометрические операторы, отображающие $H^{\perp}$ на H_1.

2. Обобщенные периодические условия для операции l_1 порядка $2n+1$:

$$y^{[2n-k]}(b) = U_k y^{[2n-k]}(0), \ y^{(k)}(b) = U_k y^{(k)}(0),$$

$$q_{\pm}^{\frac{1}{2}}(b) y^{(n)}(b) = V^{\pm} q_{\pm}^{\frac{1}{2}}(0) y^{(n)}(0),$$

*Здесь $m < \infty$. При $m = \infty$ (45) травиально. (H—сепарабельно!).

где $k = 0, 1, \ldots n-1$, U_k — унитарные операторы в H, $V^{\pm}$ изометрически отображают $H_0^{\pm}$ на $H_b^{\pm}$. (Всюду берется или только $+$, или только $-$).

3. Непрерывная зависимость начальных данных от решения дифференциального уравнения. Прежде чем доказывать основной результат настоящего пункта, содержащийся в лемме 4*, сформулируем следующее простое предложение.

Лемма 2. *Пусть в конечномерном пространстве E_m задана эрмитова квадратичная форма*

$$A(x) = \sum_{j,\,k=1}^{m} a_{jk} x_j \bar{x}_k, \quad a_{jk} = \bar{a}_{kj},$$

где $x = (x_1, \ldots x_m) \in E_m$, и пусть μ — ее нижняя грань, т. е. $A(x) \geqslant \mu |x|^2$. Тогда квадратичная форма $\hat{A}\left(\hat{y}\right)$ в гильбертовом пространстве $H^m = H \oplus \ldots \oplus H$ (m слагаемых), определенная равенством

$$\hat{A}\left(\hat{y}\right) = \sum_{j,\,k=1}^{m} a_{jk} (y_j, y_k),$$

где $\hat{y} = \{y_1, \ldots y_m\} \in H^m$, $y_k \in H$, $(k = 1, \ldots m)$, имеет ту же самую нижнюю грань, или

$$\hat{A}\left(\hat{y}\right) \geqslant \mu \cdot \left|\hat{y}\right|^2 = \mu \sum_{k=1}^{m} (y_k, y_k).$$

Эта лемма есть очевидное следствие следующего утверждения, которое проверяется непосредственно.

Лемма 3. *Пусть в конечномерном пространстве E_m задано эрмитово преобразование $A = \| a_{jk} \|_{j,\,k=1}^{m}$, $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$, имеющее собственные числа $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$. Тогда оператор $\hat{A}$ в H^m*

$$\hat{A} = \| a_{jk} \cdot I \|_{j,\,k=1}^{m}$$

I — единичный оператор в H) *самосопряжен и имеет спектр, состоящий из тех же собственных чисел λ_r $(r = 1, \ldots m)$. При этом кратность каждого из них увеличивается теперь в* $\dim H \leqslant \infty$ *раз, и если собственному числу λ_r преобразования A отвечает собственный вектор $h = (h_1, h_2, \ldots h_m) \in E_m$, то тому же λ_r отвечает в H^m собственное подпространство оператора $\hat{A}$, состоящее из всевозможных векторов вида*

$$\hat{h} = \{h_1 x, h_2 x, \ldots h_m x\} \in H^m, \quad x \in H.$$

Лемма 4. *Многообразие векторных решений $y = y(t)$ однородного уравнения произвольного порядка m*

$$l[y] \equiv y^{(m)} + g_1(t)\, y^{(m-1)} + \ldots + g_m(t)\, y = 0, \tag{47}$$

с произвольными операторными непрерывными коэффициентами $g_k(t)$ образует подпространство в $H(0, b)$ (следовательно, замкнуто в $H(0, b)$). Это вытекает из взаимно-однозначной и взаимно-непрерывной зависимости между решениями $y(t) \in H(0, b)$ и их данными Коши $\hat{y}$:

$$\hat{y} = \{y_0, y_1, \ldots y_{m-1}\} \in H^m, \quad y_k = y^{(k)}(0).$$

* Эта лемма использовалась при доказательстве леммы 1.

Доказательство непрерывной зависимости решения от начальных данных производится по известной схеме, и мы его опускаем. Докажем непрерывность обратной зависимости. Обозначим $Y_k(t)$ операторные решения уравнения (47) при начальных условиях:

$$Y_k^{(j)}(0) = \delta_{jk} \cdot I, \quad (j,\ k = 0,\ 1,\ \ldots\ m-1).$$

Тогда любое векторное решение $y(t)$, $y^{(k)}(0) = y_k$ запишется в виде

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Y_k(t)\, y_k,$$

откуда, замечая, что

$$Y_k(t) = \frac{1}{k!} t^k \cdot I + O(t^m) \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots\ m-1),$$

где для операторной величины $O(t^m)$ при всех k справедлива равномерная оценка

$$|O(t^m)| \leqslant Ct^m,$$

находим

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k \cdot \frac{t^k}{k!} + \left|\hat{y}\right| \cdot t^m \cdot \vec{O}(1).$$

Поэтому при $0 < \varepsilon < b$ имеем в силу неравенства треугольника

$$\left(\int_0^b |y(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\int_0^\varepsilon |y(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int_0^\varepsilon \left|\sum_{k=0}^{m-1} y_k \frac{t^k}{k!}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} - \left|\hat{y}\right| \cdot O\left(\varepsilon^{m+\frac{1}{2}}\right). \tag{48}$$

Рассмотрим квадрат первого слагаемого в правой части:

$$\hat{A}_\varepsilon\left(\hat{y}\right) \equiv \int_0^\varepsilon \left|\sum_{k=0}^{m-1} y_k \frac{t^k}{k!}\right|^2 dt = \sum_{j,\,k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon^{j+k+1}}{j!\,k!\,(j+k+1)} (y_j,\ y_k).$$

По лемме 2 $\hat{A}_\varepsilon\left(\hat{y}\right) \geqslant \mu(\varepsilon) \left|\hat{y}\right|^2$, где $\mu(\varepsilon)$ — точная нижняя грань квадратичной формы $A_\varepsilon(x)$,

$$A_\varepsilon(x) \equiv \sum_{j,\,k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon^{j+k+1}}{j!\,k!\,(j+k+1)} x_j \bar{x}_k = \varepsilon A_1(x_\varepsilon),$$

где

$$x = (x_0,\ x_1,\ \ldots\ x_{m-1}) \in E_m,\quad x_\varepsilon = (x_0;\ \varepsilon x_1,\ \ldots\ \varepsilon^{m-1} x_{m-1}) \in E_m.$$

Очевидно, $\mu(\varepsilon) > 0$. Оценим снизу $\mu(\varepsilon)$ более точно. Имеем при $0 < \varepsilon < 1$

$$\mu(\varepsilon) = \inf_{x \in E_m} \frac{A_\varepsilon(x)}{|x|^2} \geqslant \varepsilon \cdot \inf_{x_\varepsilon \in E_m} \frac{A_1(x_\varepsilon)}{|x_\varepsilon|^2} \cdot \inf_{x \in E_m} \frac{|x_\varepsilon|^2}{|x|^2} = \varepsilon^{2m-1} \cdot \mu(1).$$

Значит,

$$\hat{A}_\varepsilon\left(\hat{y}\right) \geqslant \mu(1) \cdot \varepsilon^{2m-1} \cdot \left|\hat{y}\right|^2.$$

Поэтому при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем из (48)

$$\left(\int_0^b |y(t)^2|\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left|\hat{y}\right| \varepsilon^{m-\frac{1}{2}} [\mu^{\frac{1}{2}}(1) - O(\varepsilon)] > C\left|\hat{y}\right|,$$

где $C > 0$ и не зависит от $\hat{y}$. Отсюда вытекает непрерывная зависимость $\hat{y} \in H^m$ от решения $y(t) \in H(0,\ b)$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, I, II. «Матем. сб.», 20 (62) : 3 (1947), 431—495; 21(63) : 3 (1947), 365—404.

2. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, изд. 2. «Наука», М., 1966.

3. М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. ГИТТЛ. М., 1954.

4. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений (перев. с англ.), ИЛ., М., 1958.

5. М. Г. Крейн. Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале (0, ∞). ДАН СССР, **74**, № 1 (1950), 9—12.

6. Ф. С. Рофе-Бекетов. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях. «Матем. сб.»,**51**(93) : 3 (1960), 293—342.

7. Ф. С. Рофе-Бекетов. О разложении по собственным функциям систем с суммируемым потенциалом. ДАН СССР, **156**, № 5 (1964), 1029—1032.

8. М. Л. Горбачук. О спектральных функциях дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами. «Укр. математ. ж.», **18**, № 2 (1966), 3—21.

9. С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев. Граничные задачи для уравнения в гильбертовом пространстве. ДАН СССР, **146**, № 3 (1962), 535—538.

10. J. W. Calkin. Abstract symmetric boundary conditions, Trans, Amer. Math. Soc., **45**, № 3, (1939), 369—442.

11. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц. Линейные операторы, т. II., Спектральная теория (перев. с англ.), «Мир», М., 1966.

12. М. И. Вишик. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений. Труды Моск. матем. об-ва, **1**(1952), 187—246.

13. Д. Шин. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка. «Матем. сб», 7 (59) : 1 (1940), 479—532.

14. Д. Шин. О решениях системы квазидифференциальных уравнений. ДАН СССР, **28**, № 5 (1940), 392—396.

15. И. М. Глазман. Об индексе дефекта дифференциальных операторов. ДАН СССР, **64**, № 2 (1949), 151—154.

16. И. М. Глазман. К теории сингулярных дифференциальных операторов. «Усп. матем. наук». **5**, № 6 (1950), 102—135.

17. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу (перев. с франц.) ИЛ, М., 1954.

18. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа. Физматгиз, М., 1963.

19. А. А. Графф. К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения I, II. «Матем. сб.», 18, (60) : 2 (1946), 305—328; 21(63) : 1 (1947), 143—159.

20. И. М. Гельфанд и В. А. Пономарев. Неразложимые представления группы Лоренца. «Усп. матем. наук», **23**, № 2 (1968), 3—60.

21. Ф. С. Рофе-Бекетов. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. ДАН СССР, **184**, № 5 (1969), 1034—1037.

Поступила 28 декабря 1967 г.