Вып. 6 1968

НЕЭФФЕКТИВНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Н. А. Давыдов

§ 1. Пусть дана матрица $A = \|a_{nk}\|$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Эта матрица задает линейное преобразование последовательности S_n:

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \cdot S_k. \tag{1.1}$$

Говорят, что преобразование (1.1) суммирует последовательность S_n к числу S, если ряды (1.1) сходятся для каждого $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и если

$$\lim_{n \to \infty} t_n = S. \tag{1.2}$$

Преобразование (1.1) называется регулярным, если оно суммирует каждую сходящуюся последовательность к ее пределу. Регулярное преобразование (1.1) называется неэффективным в классе ограниченных последовательностей, если оно не суммирует ни одной расходящейся ограниченной последовательности. Регулярное преобразование (1.1) называется вполне неэффективным, если оно не суммирует ни одной расходящейся последовательности.

Р. Агнью [1]; смотри также [2, стр. 379; 3, стр. 483] принадлежат следующие две теоремы:

1. Если регулярное преобразование

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \cdot S_k \tag{1.3}$$

удовлетворяет условию

$$\varliminf_{n \to \infty} \left(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|\right) > 0, \tag{1.4}$$

то оно вполне неэффективно.

2. Если регулярное преобразование (1.1) удовлетворяет условию

$$\varliminf_{n \to \infty} \left(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{\infty}{}^{*} |a_{nk}|\right) > 0 \tag{1.5}$$

(Σ^* показывает, что при суммировании член с индексом $k = n$ опускается), то оно неэффективно в классе ограниченных последовательностей.

Заметим, что условия (1.4) и (1.5) в теореме Агнью ослабить нельзя для всего класса регулярных преобразований. Это видно на примере преобразования, соответствующего матрице

$$A = \|a_{nk}\|, \text{ где } a_{nn-1} = a_{nn} = \frac{1}{2},\ a_{nk} = 0$$

для $k \neq n - 1$ и $k \neq n$, которое суммирует к числу $S = \frac{1}{2}$ расходящуюся последовательность $S_n = \frac{1}{2}[(-1)^n + 1]$.

В настоящей работе мы перенесем теоремы Агнью на интегральные преобразования вида

$$t(x)=\int_0^x S(t)\,dc(x,\,t)$$

и

$$t(x)=\int_0^\infty S(t)\,dc(x,\,t).$$

Теоремы Агнью при этом окажутся частными случаями наших теорем.

§ 2. Рассмотрим преобразование

$$t(x)=\int_0^x S(t)\,dc(x,\,t), \tag{2.1}$$

где $S(t)$ — непрерывная функция в промежутке $[0,\,\infty)$, $c(x,\,t)$ для каждого фиксированного $x>0$ есть функция с ограниченным изменением на отрезке $0\leqslant t\leqslant x$, причем

$$c(x,\,x)-c(x,\,0)\to 1\ (x\to\infty), \tag{2.2}$$

$$\bigvee_0^{x_0}(c(x,\,t))\to 0\quad (x\to\infty) \tag{2.3}$$

для каждого фиксированного x_0,

$$\bigvee_0^{x}(c(x,\,t))<H, \tag{2.4}$$

где H не зависит от x и где $\bigvee\limits_0^{y}(c(x,\,t))$ — полное изменение функции $c(x,\,t)$ на отрезке $0\leqslant t\leqslant Y$ $(Y\leqslant x)$.

Преобразование (2.1) при условиях (2.2—2.4), как нетрудно видеть, регулярно в классе непрерывных функций, т. е. из равенства

$$\lim_{x\to\infty}S(x)=S \tag{2.5}$$

следует равенство

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^x S(t)\,dc(x,\,t)=S \tag{2.6}$$

для каждой функции $S(t)$, непрерывной в промежутке $[0,\,\infty)$.

Теорема 1. *Если преобразование* (2.1), *удовлетворяющее условиям* (2.2—2.4), *удовлетворяет еще и условию*

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left|c(x,\,x)-\lim_{t\to x-0}c(x,\,t)\right|-\lim_{x'\to x-0}\bigvee_0^{x'}(c(x,\,t))\right]>0, \tag{2.7}$$

то оно неэффективно в классе непрерывных функций, т. е. из (2.6) *следует* (2.5) *для каждой функции* $S(t)$, *непрерывной в промежутке* $[0,\,\infty)$.

Для доказательства этой теоремы и теоремы 3 нам понадобится

Лемма. *Пусть* $S(x)$ — *непрерывная функция на отрезке* $[a,\,b]$, *а* $\varphi(x)$ — *функция с ограниченным изменением на этом отрезке, тогда*

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)\right|\geqslant|f(b)|\,\left|\varphi(b)-\lim_{x\to b-0}\varphi(x)\right|-\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\lim_{x\to b-0}\bigvee_a^x(\varphi(x)),$$

где $\bigvee\limits_0^x(\varphi(x))$ — *полное изменение функции* $\varphi(x)$ *на отрезке* $[a,\,x]$, $a<x<b$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a, b]$

$$(T) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и составим интегральную сумму

$$S(T) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\tau_\nu)\,\Delta\varphi(x_\nu),$$

где $x_\nu \leqslant \tau_\nu \leqslant x_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Легко видеть, что

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\tau_\nu)\,\Delta\varphi(x_\nu)\right| \geqslant |f(\tau_{n-1})|\,|\Delta\varphi(x_{n-1})| - \\ - \sum_{\nu=0}^{n-2}|f(\tau_\nu)|\,|\Delta\varphi(x_\nu)| \geqslant |f(\tau_{n-1})|\,|\varphi(b) - \varphi(x_{n-1})| - \\ - \max_{a \leqslant x \leqslant b}|f(x)| \bigvee_a^{x_{n-1}}(\varphi(x)).$$

Отсюда [4, стр. 100, 103, 114]

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)\right| = \lim_{\lambda\to 0}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\tau_\nu)\,\Delta\varphi(x_\nu)\right| \geqslant \\ \geqslant |f(b)|\,|\varphi(b) - \lim_{x\to b-0}\varphi(x)| - \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \lim_{x\to b-0}\bigvee_a^x(\varphi(x)),$$

где $\lambda = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1} - x_k)$, и лемма доказана.

Замечание. При условиях леммы справедливо неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)\right| \geqslant |f(a)|\,|\lim_{x\to a+0}\varphi(x) - \varphi(a)| - \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \lim_{x\to a+0}\bigvee_x^b(\varphi(x)).$$

Этим неравенством в настоящей работе мы не будем пользоваться.

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем, что при условии теоремы 1 из равенства

$$t(x) = \int_0^x S(t)\,dc(x, t) = O(1) \quad (x \to \infty) \tag{2.8}$$

следует равенство

$$S(x) = O(1) \quad (x \to \infty)$$

Доказывая методом от противного, допустим, что равенство (2.8) справедливо для некоторой неограниченной непрерывной в промежутке $[0, \infty)$ функции $S(x)$. Тогда найдется последовательность положительных чисел x_k, $x_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ такая, что

$$\max_{0\leqslant x\leqslant x_k}|S(x)| \leqslant |S(x_k)|, \tag{2.9}$$

$$|S(x_k)| \to \infty \quad (k \to \infty), \tag{2.10}$$

Учитывая (2.9), имеем для $0 < x' < x_k$ [4, стр. 138]:

$$|t(x_k)| \geqslant \left|\int_{x'}^{x_k} S(t)\,dc(x_k, t)\right| - \left|\int_0^{x'} S(t)\,dc(x_k, t)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\int_{x'}^{x_k} S(t)\,dc(x_k, t)\right| - |S(x_k)| \bigvee_0^{x'} (c(x_k, t)). \tag{2.11}$$

По лемме в силу (2.9) получим

$$\int_{x'}^{x_k} S(t)\,dc(x_k, t)\Big| \geqslant |S(x_k)|\,[|c(x_k, x_k) - \lim_{t\to x_k-0} c(x_k, t)| - \lim_{x''\to x_k-0} \bigvee_{x'}^{x''} (c(x_k, t))].$$

Отсюда и из (2.11) найдем

$$|t(x_k)| \geqslant |S(x_k)|\,[|c(x_k, x_k) - \lim_{t\to x_k-0} c(x_k, t)| - \lim_{x''\to x_k-0} \bigvee_{x'}^{x''} (c(x_k, t)) -$$

$$- \bigvee_0^{x'} (c(x_k, t))] = |S(x_k)|\,[|c(x_k, x_k) - \lim_{t\to x_k-0} c(x_k, t)| - \lim_{x'\to x_k-0} \bigvee_0^{x'} (c(x_k, t))].$$

А отсюда и из (2.7) и (2.10) имеем

$$\lim_{k\to\infty} |t(x_k)| = \infty,$$

что противоречит (2.8).

Итак, из равенства (2.8) следует равенство $S(x) = O(1)\ (x \to \infty)$. Пусть при условиях теоремы справедливо равенство (2.6). Так как преобразование (2.1) регулярно, то в равенстве (2.6) число S можно считать равным нулю. Нам надо доказать, что из равенства

$$t(x) = \int_0^x S(t)\,dc(x, t) \to 0 \quad (x \to \infty) \tag{2.12}$$

следует

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = 0.$$

По доказанному $S(x) = O(1)\quad (x \to \infty)$.

Обозначим через

$$Q(x) = \sup_{t\geqslant x} |S(t)|.$$

Из (2.12) имеем

$$\int_{x'}^{x} S(t)\,dc(x, t) = t(x) - \int_0^{x_0^*} S(t)\,dc(x, t) - \int_{x_0^*}^{x'} S(t)\,dc(x, t). \tag{2.13}$$

По лемме

$$\left|\int_{x'}^{x} S(t)\,dc(x, t)\right| \geqslant |S(x)|\left|c(x, x) - \lim_{t\to x-0} c(x,t)\right| -$$

$$- \max_{x'\leqslant t\leqslant x} |S(t)| \lim_{x''\to x-0} \bigvee_{x'}^{x''} (c(x, t)). \tag{2.14}$$

Обозначим через

$$\alpha = \varliminf_{x\to\infty} [|c(x, x) - \lim_{t\to x-0} c(x,t)| - \lim_{x'\to x-0} \bigvee_0^{x'} (c(x, t)).$$

В силу (2.7) число $\alpha > 0$. Для достаточно больших $x\,(x \geqslant x_0)$

$$|c(x, x) - \lim_{t\to x-0} c(x, t)| > \lim_{x'\to x-0} \bigvee_0^{x'} (c(x, t)) + \frac{\alpha}{2}. \tag{2.15}$$

Возьмем в качестве числа γ любое число, меньше единицы, но больше

$$\gamma' = \varlimsup_{x\to\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{2\,|c(x, x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x, t)|}\right).$$

Выбор такого числа γ возможен, так как в силу (2.15) число γ' удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \gamma' < 1$. Тогда для $x \geqslant x_1 \geqslant x_0$ имеем

$$\frac{\lim\limits_{x'\to x-0} \bigvee\limits_0^{x'} (c(x, t))}{|c(x,x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x, t)|} \leqslant \gamma. \tag{2.16}$$

Зафиксируем произвольное число $x_0^* \geqslant x_1$. Для достаточно больших $x\,(x > X(x_0^*) \geqslant x_1)$ из (2.3), (2,7), (2.12), (2.13), (2,14), (2.16) найдем

$$|S(x)| \leqslant \frac{|t(x)|}{|c(x, x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x, t)|} + \frac{\left|\int\limits_0^{x_0^*} S(t)\,dc(x,t)\right|}{|c(x, x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x, t)|} +$$

$$+ \frac{1}{|c(x,x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x,t)|}\left(\left|\int\limits_{x_0^*}^{x'} S(t)\,dc(x, t)\right| + \max_{x'\leqslant t\leqslant x} |S(t)| \lim_{x''\to x-0} \bigvee_0^{x''} (c(x, t))\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-\gamma}{4} Q(x_0^*) + \frac{1-\gamma}{4} Q(x_0^*) + Q(x_0^*) \frac{\bigvee\limits_{x_0^*}^{x'} (c(x_1 t)) + \lim\limits_{x''\to x-0} \bigvee\limits_{x'}^{x''} (c(x,t))}{|c(x, x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x, t)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-\gamma}{4} Q(x_0^*) + \frac{1-\gamma}{4} Q(x_0^*) + \gamma Q(x_0^*) = \frac{1+\gamma}{2} Q(x_0^*).$$

Здесь мы предполагали $Q(x_0^*) > 0$. Если же $Q(x_0^*) = 0$, то $Q(x) = 0$ для $x \geqslant x_0^*$ и, следовательно, $S(x) = 0$ для $x \geqslant x_0^*$. В этом случае теорема доказана.

Таким образом, для $x > X(x_0^*)$ справедливо неравенство

$$Q(x) \leqslant \frac{1+\gamma}{2} Q(x_0^*).$$

Так как $Q(x)$ — невозрастающая функция и $\frac{1+\gamma}{2} < 1$, где γ не зависит от x, то $Q(x) \to 0\,(x \to \infty)$ и, следовательно, $S(x) \to 0\ (x \to \infty)$. Теорема 1 доказана.

Покажем, что сформулированная в § 1 первая теорема Агнью является частным случаем теоремы 1. Действительно, пусть дано преобразование (1.3). Возьмем функцию

$$c(x, t) = \sum_{k\leqslant t} a_{nk} \text{ для } n \leqslant x < n+1,\ 0 \leqslant t \leqslant x.$$

Для этой функции имеем

$$c(x, x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}, \ \lim_{t\to x-0} c(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk},$$

$$\lim_{x'\to x-0} \bigvee_0^{x'} (c(x, t)) = \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|, \quad \bigvee_0^{x} (c(x, t)) = \sum_{k=0}^{n} |a_{nk}|.$$

Условие (2.7) для функции $c(x, t)$ запишется в виде

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}|\right) > 0,$$

а это есть условие (1.4) первой теоремы Агнью. Если в качестве $S(t)$ взять произвольную непрерывную функцию в промежутке $[0, \infty)$, но такую, что $S(n) = S_n$, где S_n — заданная последовательность комплексных чисел, то для $n \leqslant x < n+1$

$$\int_0^x S(t)\,dc(x, t) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k,$$

и первая теорема Агнью следует из теоремы 1.

Рассмотрим преобразование (2.1), в котором $c(x,t)$ — неубывающая функция на отрезке $0 \leqslant t \leqslant x$ при каждом фиксированном $x > 0$, причем

$$c(x, 0) = 0, \ c(x, x_0) \to 0 \ (x \to \infty), \ c(x, x) \to 1 \ (x \to \infty).$$

При этих условиях преобразование (2.1) регулярно. Если функция $c(x, t)$ будет удовлетворять еще условию

$$c(x, x) - \lim_{t\to x-0} c(x, t) \geqslant \theta > \frac{1}{2},$$

где θ не зависит от x, то выражение, стоящее в квадратных скобках левой части (2.7), равное

$$c(x, x) - 2 \lim_{t\to x-0} c(x, t),$$

будет иметь нижний предел (при $x \to \infty$), больший нуля. Таким образом, справедливо

Следствие. *Если функция $c(x, t)$ в преобразовании (2.1) является неубывающей на отрезке $0 \leqslant t \leqslant x$ и такой, что*

$$c(x, 0) = 0, \ c(x, x_0) \to 0 \ (x \to \infty), \ c(x, x) \to 1 \ (x \to \infty),$$

причем левый скачок функции $c(x, t)$ в точке $t = x$, равный $c(x, x) - \lim_{t\to x-0} c(x, t)$, удовлетворяет условию

$$c(x, x) - \lim_{t\to x-0} c(x, t) \geqslant \theta > \frac{1}{2},$$

где θ не зависит от x, то это преобразование неэффективно в классе функций $S(t)$, непрерывных в промежутке $[0, \infty)$.

Рассмотрим преобразование

$$t(x) = h(x) S(x) + \int_0^x \varphi(x, t) S(t)\,dt, \tag{2.17}$$

где $\varphi(x, t)$ при каждом фиксированном $x > 0$ — абсолютно интегрируемая функция на отрезке $[0, x]$, $S(t)$ — непрерывная функция в промежутке

$[0, \infty)$, а $h(x)$ — произвольная функция, определенная в этом промежутке. Определим функцию $c(x, t)$ с помощью равенства

$$c(x, t) = \begin{cases} \int\limits_0^t \varphi(x, \tau)\, d\tau & \text{для } 0 \leqslant t < x, \\ \int\limits_0^x \varphi(x, t)\, dt + h(x) & \text{для } t = x. \end{cases} \tag{2.18}$$

Нетрудно видеть, что

$$t(x) \equiv h(x) S(x) + \int\limits_0^x \varphi(x, t) S(t)\, dt = \int\limits_0^x S(t)\, dc(x, t).$$

Так как [4, стр. 96]

$$c(x, 0) = 0, \ c(x, x) = h(x) + \int\limits_0^x \varphi(x, t)\, dt,$$

$$\bigvee_0^{x'} (c(x, t)) = \int\limits_0^{x'} |\varphi(x, t)|\, dt \to \int\limits_0^x |\varphi(x, t)|\, dt \ (x' \to x - 0),$$

$$\bigvee_0^{x} (c(x, t)) = \bigvee_0^{x'} (c(x, t)) + \bigvee_{x'}^{x} (c(x, t)) = \int\limits_0^{x'} |\varphi(x, t)|\, dt +$$

$$+ \bigvee_{x}^{x} (c(x, t)) \to \int\limits_0^{x} |\varphi(x, t)|\, dt + |h(x)| \ (x' \to x - 0),$$

то условия (2.2—2.4) для функции (2.18) запишутся в виде

$$\int\limits_0^x \varphi(x, t)\, dt + h(x) \to 1 \ (x \to \infty), \tag{2.2'}$$

$$\int\limits_0^{x_0} |\varphi(x, t)|\, dt \to 0 \ (x \to \infty) \tag{2.3'}$$

для каждого фиксированного x_0,

$$\int\limits_0^x |\varphi(x, t)|\, dt + |h(x)| < H, \tag{2.4'}$$

где H не зависит от x.

Преобразование (2.17) при условиях (2.2′)—(2.4′) регулярно, т. е. из равенства

$$\lim_{x \to \infty} S(x) = S \tag{2.19}$$

следует

$$\lim_{x \to \infty} \left(h(x) S(x) + \int\limits_0^x \varphi(x, t) S(t)\, dt\right) = S \tag{2.20}$$

для каждой функции $S(x)$, непрерывной в промежутке $[0, \infty)$. Условие (2.7) для функции (2.18) запишется в виде

$$\varliminf_{x \to \infty} \left(|h(x)| - \int\limits_0^x |\varphi(x, t)|\, dt\right) > 0. \tag{2.7¹}$$

Отсюда на основании теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если преобразование* (2.17), *удовлетворяющее условиям* (2.2′)—(2.4′), *удовлетворяет еще и условию* (2.7′), *то оно неэффективно в классе непрерывных функций, т. е. из равенства* (2.20) *следует равенство* (2.19) *для каждой функции* $S(x)$, *непрерывной в промежутке* $[0, \infty)$.

§ 3. Рассмотрим преобразование

$$t(x) = \int_0^\infty S(t)\, dc(x, t). \tag{3.1}$$

в котором $S(t)$ — непрерывная ограниченная функция в промежутке $[0, \infty)$, $c(x, t)$ при каждом фиксированном $x > 0$ есть функция с ограниченным изменением на каждом отрезке $0 \leqslant t \leqslant x'$, причем

$$c(x, x') - c(x, O) \to c(x) \ (x' \to \infty), \ c(x) \to 1 \ (x \to \infty), \tag{3.2}$$

$$\bigvee_0^{x_0} (c(x, t)) \to 0 \ (x \to \infty) \tag{3.3}$$

для каждого фиксированного x_0,

$$\bigvee_0^\infty (c(x, t)) = \lim_{x' \to \infty} \bigvee_0^{x'} (c(x, t)) < H, \tag{3.4}$$

где H не зависит от x, $\bigvee\limits_0^Y (c(x, t))$ — полное изменение функции $c(x, t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant Y$. При условиях (3.2)—(3.4), как нетрудно видеть, преобразование (3.1) регулярно, т. е. из равенства

$$\lim_{x \to \infty} S(x) = S \tag{3.5}$$

следует

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^\infty S(t)\, dc(x, t) = S \tag{3.6}$$

для каждой функции $S(t)$, непрерывной ограниченной в промежутке $[0, \infty)$.

Теорема 3. *Если преобразование* (3.1), *удовлетворяющее условиям* (3.2)—(3.4), *удовлетворяет еще и условию*

$$\varlimsup_{x \to \infty} [|c(x, x) - \lim_{t \to x-0} c(x, t)| - \lim_{x' \to x-0} \bigvee_0^{x'} (c(x, t)) - \bigvee_x^\infty (c(x, t))] > 0, \tag{3.7}$$

то оно неэффективно в классе непрерывных ограниченных функций, т. е. из равенства (3.6) *следует равенство* (3.5) *для каждой функции* $S(t)$, *непрерывной и ограниченной в промежутке* $[0, \infty)$.

Доказательство. В силу регулярности преобразования (3.1) число S в равенстве (3.6) можем считать равным нулю. Нам требуется показать, что из равенства

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^\infty S(t)\, dc(x, t) = 0 \tag{3.8}$$

следует равенство

$$\lim_{x \to \infty} S(x) = 0.$$

Обозначим через

$$Q(x) = \sup_{t \geqslant x} |S(t)|.$$

Из (3.1) имеем

$$\int\limits_{x'}^{x} S(t)\,dc(x,\,t) = t(x) - \int\limits_{0}^{x_0^*} S(t)\,dc(x,\,t) - \int\limits_{x_0^*}^{x'} S(t)\,dc(x,\,t) -$$

$$- \int\limits_{x}^{\infty} S(t)\,dc(x,\,t). \tag{3.9}$$

По лемме § 2

$$\left|\int\limits_{x'}^{x} S(t)\,dc(x,\,t)\right| \geqslant |S(x)|\,|c(x,\,x) - \lim_{t\to x-0} c(x,\,t)| -$$

$$- \max_{x'\leqslant t\leqslant x} |f(t)| \lim_{x''\to x-0} \bigvee_{x'}^{x''} (c(x,\,t)). \tag{3.10}$$

Обозначим через

$$\alpha = \varliminf_{x\to\infty} [|c(x,\,x) - \lim_{t\to x-0} c(x,\,t)| - \lim_{x'\to x-0} \bigvee_{0}^{x'} (c(x,\,t)) - \bigvee_{x}^{\infty} (c(x,\,t))].$$

В силу (3.7) число $\alpha > 0$. Для достаточно больших x $(x \geqslant x_0)$

$$|c(x,\,x) - \lim_{t\to x-0} c(x,\,t)| > \lim_{x'\to x-0} \bigvee_{0}^{x'} (c(x,\,t)) + \bigvee_{0}^{\infty} (c(x,\,t)) + \frac{\alpha}{2}. \tag{3.11}$$

Возьмем в качестве числа γ любое число меньше единицы, но больше числа

$$\gamma'' = \varlimsup_{x\to\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{2\,|c(x,\,x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x,\,t)|}\right).$$

Выбор такого числа γ возможен, так как в силу (3.11) число γ'' удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \gamma'' < 1$.

Тогда для $x \geqslant x_1 \geqslant x_0$ имеем

$$\frac{\lim\limits_{x'\to x-0} \bigvee\limits_{0}^{x'} (c(x,\,t)) + \bigvee\limits_{x}^{\infty} (c(x,\,t))}{|c(x,\,x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x,\,t)|} \leqslant \gamma. \tag{3.12}$$

Зафиксируем произвольное число $x_0^* \geqslant x_1$. Для достаточно больших x, $x > X(x_0^*) \geqslant x_1$, из (3.3), (3.8)—(3.10), (3,12) получим

$$|S(x)| \leqslant \frac{\max\limits_{x'\leqslant t\leqslant x} |f(t)| \lim\limits_{x''\to x-0} \bigvee\limits_{x'}^{x''} (c(x,\,t))}{|c(x,\,x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x,\,t)|} + \frac{\left|\int\limits_{x'}^{x} S(t)\,dc(x,\,t)\right|}{|c(x,\,x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x,\,t)|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|c(x,\,x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x,\,t)|} \max_{x'\leqslant t\leqslant x} |f(t)| \lim_{x''\to x-0} \bigvee_{x'} (c(x,\,t)) +$$

$$+ \frac{1}{|c(x,\,x) - \lim\limits_{t\to x-0} c(x,\,t)|} \left[|t(x)| + \left|\int\limits_{0}^{x_0^*} S(t)\,dc(x,\,t)\right| + \left|\int\limits_{x_0^*}^{x'} S(t)\,dc(x,\,t)\right| +\right.$$

$$+\left|\int\limits_x^\infty S(t)\,dc(x,t)\right|\Big] \leqslant \frac{|t(x)|}{|c(x,x)-\lim\limits_{t\to x-0} c(x,t)|} + \frac{\left|\int\limits_0^{x_0^*} S(t)\,dc(x,t)\right|}{|c(x,x)-\lim\limits_{t\to x-0} c(x,t)|} +$$

$$+\frac{1}{|c(x,x)-\lim\limits_{t\to x-0} c(x,t)|}\Big(\left|\int\limits_{x_0^*}^{x'} S(t)\,dc(x,t)\right| + \max_{x'\leqslant t\leqslant x}|f(t)|\lim_{x''\to x-0}\bigvee_{x'}^{x''}(c(x,t)) +$$

$$+\left|\int\limits_x^\infty S(t)\,dc(x,t)\right|\Big) \leqslant \frac{1-\gamma}{4}Q(x_0^*) + \frac{1-\gamma}{4}Q(x_0^*) +$$

$$+\frac{Q(x_0^*)}{|c(x,x)-\lim\limits_{t\to x-0} c(x,t)|}\Big(\bigvee_x^\infty(c(x,t)) + \lim_{x'\to x-0}\bigvee_0^{x'}(c(x,t))\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-\gamma}{4}Q(x_0^*) + \frac{1-\gamma}{4}Q(x_0^*) + \gamma Q(x_0^*) = \frac{1+\gamma}{4}Q(x_0^*).$$

Таким образом, для $x > X(x_0^*)$ справедливо неравенство

$$Q(x) \leqslant \frac{1+\gamma}{2}Q(x_0^*).$$

Отсюда заключаем, что $Q(x)\to 0\ (x\to\infty)$ и, следовательно, $S(x)\to 0$ $(x\to\infty)$. Теорема доказана.

Покажем, что сформулированная в § 1 вторая теорема Агнью есть частный случай теоремы 3. В самом деле, пусть дано преобразование (1.1). Возьмем функцию

$$c(x,t) = \sum_{k<t} a_{nk} \text{ для } n\leqslant x< n+1,\ 0\leqslant t\leqslant\infty.$$

Для этой функции имеем

$$c(x,x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk},\quad \lim_{t\to x-0} c(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk},$$

$$\lim_{x'\to x-0}\bigvee_0^{x'}(c(x,t)) = \sum_{k=0}^{n-1}|a_{nk}|,\quad \bigvee_0^{x}(c(x,t)) = \sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|,$$

$$\bigvee_x^\infty(c(x,t)) = \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_{nk}|.$$

Условие (3.7) для функции $c(x,t)$ запишется в виде

$$\varliminf_{n\to\infty}\Big(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{\infty}{}^{*}|a_{nk}|\Big) > 0,$$

а это есть условие (1.5) второй теоремы Агнью. Если в качестве $S(t)$ взять произвольную непрерывную ограниченную функцию в промежутке $[0,\infty)$, но такую, что $S(n)=S_n$, где S_n — заданная ограниченная последовательность комплексных чисел, то для $n\leqslant x< n+1$

$$\int\limits_0^\infty S(t)\,dc(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}S_k,$$

и вторая теорема Агнью следует из теоремы 3.

Рассмотрим преобразование (3.1), в котором $c(x, t)$ — неубывающая функция в промежутке $0 \leqslant t < \infty$ при каждом фиксированном $x > 0$, причем

$$c(x, 0) = 0, \quad c(x, x_0) \to 0 \ (x \to \infty), \ c(x, t) \to c(x) \ (t \to \infty), \ c(x) \to 1 (x \to \infty).$$

При этих условиях преобразование (3.1) регулярно. Если функция $c(x, t)$ будет удовлетворять еще условию

$$c(x, x) - \lim_{t \to x - 0} c(x, t) \geqslant \theta > \frac{1}{2},$$

где θ не зависит от x, то выражение, стоящее в квадратных скобках левой части (3.7), равное

$$2c(x, x) - 2 \lim_{t \to x - 0} c(x, t) - \lim_{t \to \infty} c(x, t),$$

будет иметь нижний предел (при $x \to \infty$) больший нуля. Таким образом, справедливо

Следствие. *Если функция $c(x, t)$ в преобразовании (3.1) является неубывающей в промежутке $0 \leqslant t < \infty$ для каждого фиксированного x и такой, что*

$$c(x, 0) = 0, \ c(x, x_0) \to 0 \ (x \to \infty), \ c(x, t) \to c(x) \ (t \to \infty),$$
$$c(x) \to 1 \ (x \to \infty),$$

причем левый скачок функции $c(x, t)$ в точке $t = x$, равный $c(x, x) - \lim_{t \to x - 0} c(x, t)$, удовлетворяет условию

$$c(x, x) - \lim_{t \to x - 0} c(x, t) \geqslant \theta > \frac{1}{2},$$

где θ не зависит от x, то это преобразование неэффективно в классе функций, непрерывных и ограниченных в промежутке $[0, \infty)$.

Рассмотрим преобразование

$$t(x) = h(x) S(x) + \int_0^\infty \varphi(x, t) S(t)\, dt, \qquad (3.13)$$

где $\varphi(x, t)$ при каждом фиксированном x есть абсолютно интегрируемая функция в промежутке $0 \leqslant t < \infty$, $S(x)$ — непрерывная, а $h(x)$ — произвольная функция в этом промежутке.

Определим функцию $c(x, t)$ с помощью равенства

$$c(x, t) = \begin{cases} \int_0^t \varphi(x, \tau)\, d\tau & \text{для } 0 \leqslant t < x, \\ \int_0^x \varphi(x, t)\, dt + h(x) & \text{для } t = x, \\ \int_0^t \varphi(x, t)\, dt + h(x) & \text{для } t > x. \end{cases} \qquad (3.14)$$

Нетрудно видеть, что

$$t(x) \equiv h(x) S(x) + \int_0^\infty \varphi(x, t) S(t)\, dt = \int_0^\infty S(t)\, dc(x, t). \qquad (3.15)$$

Так как

$$c(x, 0) = 0,\ c(x, x) = h(x) + \int_0^x \varphi(x, t)\, dt,$$

$$\bigvee_0^{x'} (c(x, t)) = \int_0^{x'} |\varphi(x, t)|\, dt \to \int_0^x |\varphi(x, t)|\, dt\ (x' \to x),$$

$$\bigvee_0^{x} (c(x, t)) = \int_0^{x} |\varphi(x, t)|\, dt + |h(x)|,\quad \bigvee_x^{\infty} (c(x, t)) = \int_0^{\infty} |\varphi(x, t)|\, dt,$$

то условия (3.2)—(3.4) для функции (3.14) запишутся в виде

$$h(x) + \int_0^\infty \varphi(x, t)\, dt \to 1 \quad (x \to \infty), \tag{3.2'}$$

$$\int_x^{X_0} |\varphi(x, t)|\, dt \to 0 \quad (x \to \infty) \tag{3.3'}$$

для каждого фиксированного X_0,

$$\int_0^\infty |\varphi(x, t)|\, dt + |h(x)| < H, \tag{3.4'}$$

где H не зависит от x.

Преобразование (3.12) при условиях (3.2')—(3.4') регулярно в классе непрерывных ограниченных функций $S(x)$, т. е. из равенства

$$\lim_{x \to \infty} S(x) = S \tag{3.16}$$

следует равенство

$$\lim_{x \to \infty} \left(h(x) S(x) + \int_0^\infty \varphi(x, t) S(t)\, dt\right) = S \tag{3.17}$$

для каждой функции $S(x)$, непрерывной и ограниченной в промежутке $[0, \infty)$. Условие (3.7) для функции (3.14) запишется в виде

$$\varliminf_{x \to \infty} \left(|h(x)| - \int_0^\infty |\varphi(x, t)|\, dt\right) > 0. \tag{3.7'}$$

Отсюда и из (3.15) на основании теоремы 3 следует

Теорема 4. *Если преобразование* (3.13), *удовлетворяющее условиям* (3.2')—(3.4'), *удовлетворяет еще и условию* (3.7'), *то оно неэффективно в классе непрерывных ограниченных функций, т. е. из равенства* (3.17) *следует равенство* (3.16) *для каждой функции* $S(x)$, *непрерывной и ограниченной в промежутке* $[0, \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Agnew. Equivalence of methods for evaluation of sequences. Proc. Amer. Math. Soc., 3, 550—565 (1952).
2. Р. Кук. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Физматгиз, М., 1960.
3. Г. Харди. Расходящиеся ряды. Изд-во иностр. лит., М., 1951.
4. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. Гостехиздат, М.—Л., 1949.

Поступила 28 октября 1966 г.