Вып. 6 1968

ИЗОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СО СТЕПЕНЬЮ ОПЕРАТОРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Н. И. Нагнибида

В нашей статье [1], посвященной изучению операторов обобщенного интегрирования в пространствах $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, всех однозначных аналитических в круге $|z| < R$ функций с топологией компактной сходимости [2], доказана следующая

Теорема. *Для того чтобы оператор B был линейным непрерывным оператором в $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочным с I^n $\left(If(z) = \int\limits_0^z f(\zeta)\, d\zeta\right)$, $n \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1)\ B = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(jn+p)!}{q!} b_{jn+p,\,q} I^{jn+p-q} A_q, \tag{1}$$

где при $j = 0$ и $p < q$ $J^{p-q} = \dfrac{d^{q-p}}{dz^{q-p}}$ и

$$A_q f(z) = A_q \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn+q} z^{mn+q}$$

для любой функции $f(z) \in \mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$;

2) *для всякого $\rho < R$ существуют такие $r = r(\rho) < R$ и $C = C(\rho) > 0$, что*

$$\frac{[(s-m)n+p]!\,(mn+q)!}{(sn+p)!\,q!} |b_{(s-m)n+p,\,q}| \leqslant C \frac{r^{mn+q}}{\rho^{sn+p}}$$
$$(0 \leqslant m \leqslant s < \infty;\quad 0 \leqslant p,\quad q \leqslant n-1). \tag{2}$$

Матрица $[b_{i,k}]_{i,k=0}^{\infty}$ оператора B в степенном базисе $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ $\left(Bz^k = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_{i,k} z^i,\ k \geqslant 0\right)$ имеет вид [1] такой:

$$b_{sn+p,\,mn+q} = \begin{cases} 0, & s < m \\ \dfrac{[(s-m)n+p]!\,(mn+q)!}{(sn+p)!\,q!} b_{(s-m)n+p,\,q}, & 0 \leqslant m \leqslant s < \infty;\ 0 \leqslant p,\ q \leqslant n-1, \end{cases} \tag{3}$$

а условие (2), как известно [3], является необходимым и достаточным для непрерывности оператора B в пространстве $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$.

Воспользовавшись этим утверждением, мы найдем все изоморфизмы рассматриваемых пространств, перестановочные с оператором I^n при каждом фиксированном n, $n \geqslant 1$. Предварительно доказывается следующая

Лемма. *Для того чтобы выполнялось условие* (2), *необходимо и достаточно, чтобы функции*

$$\varphi_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k,q} z^k \quad (q = 0, 1, \ldots, n-1)$$

принадлежали пространству $\mathfrak{A}_R$.

Доказательство. *Необходимость* этого утверждения становится очевидной, если в (2) положить $m = 0$.

Достаточность. Пусть $\varphi_q(z) \in \mathfrak{A}_R$ $(q = 0, 1, \ldots, n-1)$. Для доказательства условия (2) достаточно, очевидно, для каждого $\rho < R$ найти такие $C > 0$ и $r < R$, чтобы

$$\frac{(sn+p)!\,(mn+q)!}{[(s+m)n+p]!\,q!} |b_{sn+p,q}| \leqslant C \frac{r^{mn+q}}{\rho^{(s+m)n+p}}$$
$$(s, m = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqslant p,\ q \leqslant n-1).$$

Возьмем сперва $C_1 > 0$ и ρ_1, $\rho < \rho_1 < R$ такими, чтобы

$$|b_{sn+p,q}| \leqslant \frac{C_1}{\rho_1^{sn}} \quad (s = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqslant p,\ q \leqslant n-1).$$

Тогда при $s \geqslant 1$ и любом r, $\rho_1 < r < R$, получим

$$\frac{(sn+p)!\,(mn+q)!}{[(s+m)n+p]!\,q!} |b_{sn+p,q}| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \frac{r^{mn+q}}{\rho^{(s+m)n+p}} \left[\frac{\rho^{(s+m)n+p}}{r^{mn+q}\rho_1^{sn}} \cdot \frac{(q+1)\ldots(mn+q)}{(sn+p+1)\ldots[(s+m)n+p]} \right] \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \frac{r^{mn+q}}{\rho^{(s+m)n+p}} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{sn} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{mn} \frac{\rho^p}{r^q} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \frac{r^{mn+q}}{\rho^{(s+m)n+p}} \quad (m = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqslant p,\ q \leqslant n-1).$$

Если же $s = 0$, то, учитывая, что $r > \rho$,

$$\frac{p!\,(mn+q)!}{(mn+p)!\,q!} |b_{p,q}| \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \frac{r^{mn+q}}{\rho^{mn+p}} \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{mn} \frac{\rho^p}{r^q} \cdot \frac{(q+1)\ldots(mn+q)}{(p+1)\ldots(mn+p)} \right] \leqslant$$
$$\leqslant C_3 \frac{r^{mn+q}}{\rho^{mn+p}} \quad (m = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqslant p,\ q \leqslant n-1).$$

Полагая теперь $C = \max(C_2, C_3)$, мы убеждаемся в справедливости леммы.

Теорема 1. *Для того чтобы линейный оператор B был изоморфизмом пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочным с I^n, $n \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) $B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{q=0}^{n-1} \frac{k!}{q!} b_{k,q} I^{k-q} A_q$;

2) $\varphi_q(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{k,q} z^k \in \mathfrak{A}_R$;

3) $\Delta = \det \| b_{k,q} \|_{k,q=0}^{n-1} \neq 0$.

Доказательство. Если линейный непрерывный оператор B^{-1} существует, то он также перестановочен с I^n, $n \geqslant 1$, т. е. имеет вид (1), а его матрица вида (3) удовлетворяет условию 2). Записывая теперь условие $BB^{-1}=E$ (E — оператор тождественного преобразования) в матричной форме, мы легко получим, что

$$\sum_{j=m}^{s}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{[(s-j)n+p]!\,[(j-m)n+l]!\,(mn+q)!}{(sn+p)!\,l!\,q!}b_{(s-j)n+p,\,l}b^{-1}_{(j-m)n+l,\,q}=$$
$$=\delta_{sn+p,\,mn+q}\qquad(0\leqslant m\leqslant s<\infty;\ 0\leqslant p,\ q\leqslant n-1). \tag{4}$$

Положив в (4) $s=m$, мы убедимся в том, что

$$\det\|b_{k,\,q}\|_{k,\,q=0}^{n-1}\neq 0$$

и тем самым в необходимости условий теоремы.

Для доказательства достаточности нужно только проверить, что при сделанных допущениях система (4) имеет единственное решение $[b^{-1}_{l,\,k}]_{l,\,k=0}^{\infty}$, причем функции $\varphi_q^{-1}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b^{-1}_{k,\,q}z^k$ также принадлежат пространству $\mathfrak{A}_R$, $0<R\leqslant\infty$. Заменяя сперва j на $j+m$, а затем полагая $s-m=\nu$, преобразуем соотношения (4) к виду

$$\sum_{j=0}^{\nu}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{[(\nu-j)n+p]!}{l!}b_{(\nu-j)n+p,\,l}\frac{(jn+l)!}{q!}b^{-1}_{jn+l,\,q}=\delta_{\nu n+p,\,q} \tag{5}$$
$$(\nu=0,\ 1,\ \ldots;\ 0\leqslant p,\ q\leqslant n-1).$$

Из (5) при $\nu=0$ следует, что

$$b^{-1}_{l,\,q}=\frac{A_{q,\,l}}{\Delta},$$

где $A_{q,\,l}$ — алгебраические дополнения в определителе Δ. Пусть далее $\nu\geqslant 1$. Тогда, полагая для краткости

$$\beta^{(\nu)}_{p,\,q}=-\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{[(\nu-j)n+p]!}{l!}b_{(\nu-j)n+p,\,l}\frac{(jn+l)!}{q!}b^{-1}_{jn+l,\,q},$$

получим

$$\sum_{l=0}^{n-1}\frac{p!}{l!}b_{p,\,l}\frac{(\nu n+l)!}{q!}b^{-1}_{\nu n+l,\,q}=\beta^{(\nu)}_{p,\,q}.$$

Следовательно, $\dfrac{(jn+l)!}{q!}b^{-1}_{\nu n+l,\,q}=$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\frac{0!\,b_{0,0}}{0!}\ \ldots\ \frac{0!\,b_{0,\,l-1}}{(l-1)!}\ \beta^{(\nu)}_{0,\,q}\ \frac{0!\,b_{0,\,l+1}}{(l+1)!}\ \ldots\ \frac{0!\,b_{0,\,n-1}}{(n-1)!}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{(n-1)!\,b_{n-1,\,0}}{0!}\ \ldots\ \frac{(n-1)!\,b_{n-1,\,l-1}}{(l-1)!}\ \beta^{(\nu)}_{n-1,\,q}\ \frac{(n-1)!\,b_{n-1,\,l+1}}{(l+1)!}\ \ldots\ \frac{(n-1)!\,b_{n-1,\,n-1}}{(n-1)!}\end{vmatrix}}{\Delta}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{l!}{0!}\beta^{(\nu)}_{0,\,q}A_{0,\,l}+\cdots+\frac{l!}{(n-1)!}\beta^{(\nu)}_{n-1,\,q}A_{n-1,\,l}\right)=$$

$$=\frac{l!}{\Delta}\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{\beta^{(\nu)}_{\mu,\,q}}{\mu!}A_{\mu,\,l}=$$

$$=-\frac{l!}{\Delta}\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{A_{\mu,\,l}}{\mu!}\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{[(\nu-j)n+\mu]!}{i!}b_{(\nu-j)n+\mu,\,i}\frac{(jn+i)!}{q!}b^{-1}_{jn+i,\,q},$$

т. е. элементы $[b^{-1}_{\nu n+l,\, q}]$ матрицы искомого оператора B^{-1} рекуррентно определяются через $[b^{-1}_{l,\, q}]^{n-1}_{l,\, q=0}$.

Покажем, что соответствующие функции $\varphi_q^{-1}(z)$, $q=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, принадлежат пространству $\mathfrak{A}_R$, $0<R\leqslant\infty$. Пусть ρ, $\rho<R$, произвольно и $\rho_1>\rho$, $\rho_1<R$. Взяв C_1 из соотношений

$$|b_{jn+\mu,\, p}|\leqslant\frac{C_1}{\rho_1^{jn}}\quad(j=0,\ 1,\ \ldots;\ 0\leqslant\mu,\ p\leqslant n-1),$$

наберем ν_0, $\nu_0\geqslant 2$, настолько большим, чтобы при $\nu\geqslant\nu_0$

$$C_1\frac{(n-1)!\,n^2}{|\Delta|}\max_{\mu,\, l}|A_{\mu,\, l}|\left[\frac{(2n-1)!\,\rho_1}{\nu n(\rho_1-\rho)}+(\nu n+n)^n\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\nu n}\right]\leqslant 1.$$

Если теперь $C>0$ таково, что при $j<\nu_0$

$$|b^{-1}_{jn+i,\, q}|\leqslant\frac{C}{\rho^{jn}}\quad(0\leqslant i,\ q\leqslant n-1),$$

то

$$|b^{-1}_{\nu_0 n+l,\, q}|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{l!}{|\Delta|(\nu_0 n+l)!}\left\{\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{\nu_0-1}\frac{|A_{\mu,\, l}|}{\mu!\, i!}[(\nu_0-j)\,n+\mu]!\,(jn+i)!\,|b_{(\nu_0-j)n+\mu,\, i}|\,|b^{-1}_{jn+i,\, q}|+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{|A_{\mu,\, l}|}{\mu!}(\nu_0 n+\mu)!\,|b_{\nu_0 n+\mu,\, i}|\,|b^{-1}_{i,\, q}|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1C\,(n-1)!}{|\Delta|}\max_{\mu,\, l}|A_{\mu,\, l}|\left\{\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{[(\nu_0-j)\,n+\mu]!\,(jn+i)!}{(\nu_0 n+l)!\, i!\,\rho_1^{(\nu_0-j)n}\rho^{jn}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\nu_0 n+\mu)!}{(\nu_0 n+l)!}\cdot\frac{1}{\rho_1^{\nu_0 n}}\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{\rho^{\nu_0 n}}\left\{\frac{C_1(n-1)!}{|\Delta|}\max_{\mu,\, l}|A_{\mu,\, l}|\left[\sum_{\mu=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{\nu_0-1}\frac{(2n-1)!}{\nu_0 n}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{(\nu_0-j)n}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{(\nu_0 n+\mu)!}{(\nu_0 n+l)!}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\nu_0 n}\right)\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{\rho^{\nu_0 n}}\left\{\frac{C_1\,(n-1)!}{|\Delta|}\max_{\mu,\, l}|A_{\mu,\, l}|\,n^2\left[\frac{(2n-1)!\,\rho_1}{\nu_0 n\,(\rho_1-\rho)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\nu_0 n+n)^n\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\nu_0 n}\right]\right\}\leqslant\frac{C}{\rho^{\nu_0 n}}\quad(0\leqslant l,\ q\leqslant n-1).$$

Применяя теперь математическую индукцию, мы убеждаемся в справедливости теоремы.

Полученная теорема дает возможность доказать следующее предложение.

Теорема 2. *Система функций*

$$\left\{I^{kn}\left[\frac{(kn)!}{0!}\varphi_0(z),\ \frac{(kn+1)!}{1!}\varphi_1(z),\ \ldots,\ \frac{(kn+n-1)!}{(n-1)!}\varphi_{n-1}(z)\right]\right\}_{k=0}^{\infty},\ n\geqslant 1,\quad(6)$$

где $\varphi_i(z)$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, *принадлежат пространству* $\mathfrak{A}_R$, $0<R\leqslant\infty$, *образует в нем квазистепенной базис в смысле М. Г. Хапланова* [4] *тогда и только тогда, когда*

$$\det\|\varphi_i^{(s)}(0)\|_{i,\, s=0}^{n-1}\neq 0.\quad(7)$$

Доказательство. *Необходимость* утверждения очевидна. Более того, условие (7) необходимо даже для полноты системы (6) в $\mathfrak{A}_R$.

Достаточность. Построим оператор

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi_i^{(k)}(0)}{i!} I^{k-i} A_i,$$

являющийся, очевидно, изоморфизмом пространства $\mathfrak{A}_R$, перестановочным с I^n (см. теорему 1). Так как система

$$\left\{ I^{kn} \left[\frac{(kn)!}{0!} 1, \ \frac{(kn+1)!}{1!} z, \ \ldots, \ \frac{(kn+n-1)!}{(n-1)!} z^{n-1} \right] \right\}_{k=0}^{\infty}$$

образует в $\mathfrak{A}_R$ степенной базис, то из соотношений

$$Bz^i = \varphi_i(z), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

и перестановочности операторов B и I^n следует, что система (6) образует в $\mathfrak{A}_R$ квазистепенной базис. Теорема доказана.

Отметим, что аналогичное утверждение другим путем доказано в [5].

В заключение выражаю глубокую благодарность К. М. Фишману за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Нагнибида. О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве. «Сибирск. матем. ж.», т. 7, № 6, 1966.

2. G. Köthe. Dualität in der Funktionentheorie, Journ. f. reine und angew. Math., 191 (1953).

3. К. М. Фишман. К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств. ДАН СССР, т. 127, № 1, 1959.

4. М. Г. Хапланов. Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций. ДАН СССР, т. 80, № 2, 1951.

5. Н. И. Нагнибида. Об одной системе функций, образующей квазистепенной базис. Труды 1-й республиканской конференции молодых исследователей, вып. 2, К., 1965.

Поступила 17 мая 1967 г.