Вып. 6 1968

ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ

Р. М. Тригуб

Пусть

$$f(x) = \lambda(x) + i\mu(x)$$

непрерывная на $[0, \pi]$ (комплекснозначная) функция. Если после продолжения $f(-x) = f(x)$, далее — периодически, функция разлагается в абсолютно сходящийся всюду ряд Фурье, то запишем $f \in A$.

Положим

$$K_n(f, t) = \frac{\lambda(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \cos kt + \mu\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \sin kt$$

и

$$\|f\| = \sup_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(f, t)|\, dt.$$

Это верхняя грань так называемых констант Лебега некоторого метода суммирования рядов Фурье (например, [1, стр. 475, 4, т. 1, стр. 144]).

В настоящей статье рассматриваются некоторые общие свойства пространства B функций с такой нормой.

1. $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) \equiv 0$.
2. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ (α — число действительное).
3. $\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$.
4. $\|f_1 \cdot f_2\| \leqslant \|f_1\| \|f_2\|$.
5. B — полное пространство.
6. Если $f(x) \in B$ локально ($f(x)$ с любого отрезка, лежащего на $[0, \pi]$, может быть продолжена на $[0, \pi]$ так, что продолженная функция принадлежит B), то $f \in B$ (в целом).
7. Если $f \in B$ и $|f(x) + \alpha| > 0$ на $[0, \pi]$, то и

$$\frac{1}{f(x) + \alpha} - \frac{1}{\alpha} \in B.$$

8. Если $f(x) \in B$, то $f(x) \in A$.
9. Если $f_1 \in B$, а $f_2 \in A$, то $f_1 f_2 \in B$.

Первые три свойства очевидны. Отметим только, что умножение на i не допускается (например, в случае $f(x) = \pi - x$), так как из ограниченности функции не следует ограниченность тригонометрически сопряженной к ней функции.

4. Это свойство сразу следует из равенства

$$K_n(f_1 f_2; t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(f_1; u) K_n(f_2; t - u)\, du.$$

8. Воспользуемся следующим результатом Марцинкевича [5, 4, т. II. стр. 46]:

$$\frac{\pi}{n+1}\sum_{\nu=0}^{2n}\left|T_n\left(\frac{\nu\pi}{n+1}\right)\right| \leqslant (n+1)\int_0^{2\pi}|T_n(t)|\,dt$$

(T_n — любой тригонометрический полином порядка $\leqslant n$). Имеем

$$\frac{\pi}{n+1}\sum_{\nu=0}^{2n}\left|\frac{\lambda(0)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\cos\nu\frac{k\pi}{n+1}+\mu\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\sin\nu\frac{k\pi}{n+1}\right| \leqslant (\pi+1)\,\|f\|.$$

Заменяя верхний предел суммирования $2n$ на меньшее число m и устремляя n к бесконечности, получаем слева

$$\sum_{\nu=0}^{m}\left|\int_0^{\pi}\lambda(x)\cos\nu x\,dx+\int_0^{\pi}\mu(x)\sin\nu x\,dx\right| = \frac{\pi}{2}\left(|a_0|+\sum_{\nu=1}^{m}|a_\nu+b_\nu|\right),$$

если (a_ν, ib_ν) — коэффициенты Фурье продолженной функции. Но так как вместе с $f(x)$ и $\overline{f(x)}\in B$

$$\|\bar f\| = \|\lambda - i\mu\| \leqslant \|\lambda\| + \|i\mu\| \leqslant \|f\| + \|f\| = 2\|f\|,$$

то отсюда следует, что $f\in A$ и

$$2|a_0|+\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|+|b_\nu| \leqslant \frac{6(\pi+1)}{\pi}\|f\|. \qquad (1)$$

5. Пусть $f_m(x)$ — последовательность функций такая, что

$$\sup_{p\geqslant m}\|f_p - f_m\| = \varepsilon_m \to 0.$$

В силу (1) эта последовательность сходится при всех x к некоторой непрерывной функции $f(x)$. Переходя в неравенстве

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(f_p - f_m;\, t)|\,dt \leqslant \varepsilon_m$$

к пределу при $p\to\infty$, получим (в силу леммы Фату)

$$\|f - f_m\| \leqslant \varepsilon_m,$$

и полнота B доказана.

7. Если $f\in B$, то $f(x)+\alpha\in A$ (см. 8). Тогда в силу теоремы Винера [2; 4, стр. 391; 1] и

$$\frac{1}{f(x)+\alpha}\in A.$$

По свойству 9

$$\frac{1}{f(x)+\alpha}-\frac{1}{\alpha} = -\frac{f(x)}{\alpha}\cdot\frac{1}{f(x)+\alpha}\in B.$$

Добавление действительного числа $\alpha\neq 0$ и вычитание $\frac{1}{\alpha}$ здесь необходимо, так как если $f\in B$, то $f(\pi)=0$ (а $f(0)$ — число действительное). Это можно получить из (1) или вывести из необходимого условия, приведенного в [1, условие β, стр. 475].

Это свойство также показывает [3, стр. 19], что в расширенном присоединением единицы кольце B максимальный идеал — это совокупность функций вида $f(x)+\alpha$, равных нулю в одной и той же точке отрезка $[0, \pi]$. Можно и наоборот, свойство 7 получить из этого факта [3, стр. 31].

6. Это свойство можно доказать, повторяя доказательство соответствующей теоремы Винера [2; см. также 1, стр. 638; 4]. При этом используются лишь свойства 3 и 9 (кусочно-линейные непрерывные функции принадлежат A).

9. Положим еще

$$\tau_n(f;\ r;\ u)=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} r(t)\,K_n(f;\ t-u)\,dt.$$

Подставляя в $\tau_n(f_1f_2;\ r;\ u)$ ряд для $f_2(x)$

$$f_2(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos\nu x+ib_\nu \sin\nu x$$

и меняя порядок интегрирования и суммирования (почленно интегрируется ряд, сходящийся по t равномерно), получим

$$\tau_n(f_1f_2;\ r;\ u)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\frac{\tau_n\left(f_1;\ r,\ u+\frac{\nu\pi}{n+1}\right)+\tau_n\left(f_1;\ r,\ u-\frac{\nu\pi}{n+1}\right)}{2}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\frac{\tau_n\left(f_1;\ r,\ u-\frac{\nu\pi}{n+1}\right)-\tau_n\left(f_1;\ r,\ u+\frac{\nu\pi}{n+1}\right)}{2}.$$

Если $r(t)=\operatorname{sign}K_n(f_1f_2;\ t)$, то

$$\|f_1f_2\|=\sup_n|\tau_n(f_1f_2;\ r,\ 0)|,\quad |\tau_n(f_1;\ r,\ u)|\leqslant\|f_1\|,$$

и, значит,

$$\|f_1f_2\|\leqslant\|f_1\|\sum_{\nu=0}^{\infty}(|a_\nu|+|b_\nu|).$$

Если бы $f_1(x)\equiv 1\in B$, то отсюда следовало бы неравенство, обратное к (1). Но такое неравенство невозможно, например, для функции $f(x)=\left(\ln\frac{\pi-x}{4}\right)^{-1}$, которая принадлежит A (ее коэффициенты Фурье чередуются по знаку, а ряд Фурье сходится при $x=\pi$), но не принадлежит B (несобственный интеграл

$$\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{\pi-x}\,dx=-\infty,$$

чего быть не может для $f\in B$ [1, стр. 475]). В случае, когда $\lambda(x)\equiv\mu(x)\equiv T(x)$ — четный или нечетный тригонометрический полином, такое неравенство все-таки имеет место (с абсолютной константой). Предельный переход обосновать не удается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.
2. N. Wiener. Tauberian theorems, Ann. Math., 33, 1—100 (1932).
3. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. Физматгиз, М., 1960.
4. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. I и II. «Мир», М., 1965.
5. I. Marcinkiewiez. Sur l'interpolation (I), Studia Math., t. VI, 1—17 (1936).

Поступила 10 июня 1967 г.