О СВОЙСТВАХ КОРНЕЙ ОБОБЩЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Я. Л. Геронимус

1. Пусть $\{c_k\}_n^n$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям

$$c_{-k} = \bar{c}_k, \quad D_k = |\, c_{i-j}\,|_0^k \neq 0, \ (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n); \tag{1}$$

построим многочлены $\{P_k(z)\}_0^n$ по формуле

$$P_k(z) = \frac{1}{D_{k-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_k \\ c_{-1} & c_0 & \ldots & c_{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{-k+1} & c_{-k+2} & \ldots & c_1 \\ 1 & z & \ldots & z^k \end{vmatrix} = z^k + \cdots \ (k = 0, 1, \ldots n) \qquad D_{-1} = 1. \tag{2}$$

Если ввести линейный функционал

$$S\{z^k\} = c_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots \ \pm n),$$

то эти многочлены ортогональны на единичной окружности Γ ($|z| = 1$) относительно заданной последовательности, т. е. удовлетворяют соотношениям

$$S\left\{P_k(z)\,\bar{P}_m\left(\frac{1}{z}\right)\right\} = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ h_k = \dfrac{D_k}{D_{k-1}}, & k = m. \end{cases} \quad (k,\ m = 0, 1, \ \ldots\ , n) \tag{3}$$

Если ввести так называемые *параметры* $\{a_k = -\overline{P_{k+1}(0)}\}_0^{n-1}$, то будем иметь *

$$h_k = h_0 \prod_{s=0}^{k-1} (1 - |\,a_s\,|^2), \quad (k = 1, 2, \ \ldots\ , n), \ h_0 = c_0. \tag{4}$$

Условия (1) эквивалентны условиям $\{|\,a_k\,|\}_0^{n-1} \neq 1$, причем параметры, удовлетворяющие этим условиям, могут быть взяты совершенно произвольно и независимо друг от друга — этим определится и последовательность $\{c_k\}_{-n}^n$, и вся система многочленов

$$P_{k+1}(z) = zP_k(z) - \bar{a}_k P_k^*(z), \ P_{k+1}^*(z) = P_k^*(z) - a_k z P_k(z),$$
$$(k = 0, 1, \ \ldots\ , n-1)$$
$$P_\nu^*(z) = z^\nu \bar{P}_\nu\left(\frac{1}{z}\right), \quad (\nu = 1, 2, \ \ldots\ , n). \tag{5}$$

---

* Для случая $\{D_k\}_0^n > 0$ эти многочлены введены в [1, ст. I, гл. 1]. Общий случай рассмотрен в статьях [2], [3], [4].

Настоящая статья посвящена вопросу о расположении корней многочленов $\{P_k(z)\}_1^n$ относительно Г. Эта задача, недавно решенная М. Г. Крейном [5], представляет большой интерес как для теории форм Теплица, так и для теории обобщенных ортогональных многочленов; поэтому нам кажется небезынтересным вывести некоторые результаты М. Г. Крейна чисто алгебраическим методом.

2. Обозначая через $I(f)$, $\mathscr{E}(f)$ число корней многочлена $f(z)$ внутри и соответственно вне Г, мы имеем по [6]

$$I(f) = I(f + \lambda f^*), \quad |\lambda| < 1, \tag{6}$$

поэтому из (5) находим при $|a_k| < 1$

$$I(P_{k+1}) = I(zP_k) = I(P_k) + 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{7}$$

а при $|a_k| > 1$ имеем*

$$\begin{gathered} I(P_{k+1}^*) = \mathscr{E}(P_{k+1}) = k + 1 - I(P_{k+1}) = I(P_k) + 1, \\ I(P_{k+1}) = k - I(P_k), \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \end{gathered} \tag{7'}$$

Легко видеть, что обе формулы можно объединить в одну

$$\begin{gathered} I(P_{k+1}) = \frac{k+1}{2} + \left[I(P_k) - \frac{k-1}{2}\right]\operatorname{sgn}(1 - |a_k|^2), \\ [I(P_{k+1}) - I(P_k)] + I(P_k)[1 - \operatorname{sgn}(1 - |a_k|^2)] = \\ = \frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2}\operatorname{sgn}(1 - |a_k|^2) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \end{gathered} \tag{8}$$

Решая это линейное уравнение первого порядка в конечных разностях [7, гл. V, § 2], получим

$$I(P_k) = \prod_{s=0}^{k-1}\operatorname{sgn}(1 - |a_s|^2)\left\{\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{\frac{\nu+1}{2} - \frac{\nu-1}{2}\operatorname{sgn}(1 - |a_\nu|^2)}{\prod_{r=0}^{\nu}\operatorname{sgn}(1 - |a_r|^2)} + C\right\}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

где C — произвольная постоянная. Так как при $k = 1$ мы должны иметь

$$I(P_1) = \frac{1 + \operatorname{sgn}(1 - |a_0|^2)}{2},$$

то отсюда $C = 0$. Мы имеем по (4)

$$I(P_k) = \operatorname{sgn} h_k\left\{\sum_{\nu=0}^{k-1}\left[\frac{\nu+1}{2}\operatorname{sgn} h_{\nu+1} - \frac{\nu-1}{2}\operatorname{sgn} h_\nu\right]\right\},$$

откуда после элементарных преобразований получим

$$I(P_k) = \frac{k}{2} + \frac{\operatorname{sgn} h_k}{2}\sum_{\nu=0}^{k-1}\operatorname{sgn} h_\nu = \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\frac{D_k}{D_{k-1}}\sum_{\nu=0}^{k-1}\operatorname{sgn}\frac{D_\nu}{D_{\nu-1}}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

* Как видно из формулы (5.6) статьи [4], многочлен $P_k(z)$ при условиях (1) не может иметь корней на Г, поэтому $I(P_k) + \mathscr{E}(P_k) = k$.

3. Обозначим через p_k, q_k число постоянств и, соответственно, перемен знака в ряде чисел

$$D_{-1}=1,\ D_0,\ D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_{k-2},\ D_{k-1}, \tag{11}$$

причем, очевидно, $p_k+q_k=k$. Сумму, фигурирующую в (10), разобьем на две суммы

$$\sum_{\nu=0}^{k-1}\operatorname{sgn}\frac{D_\nu}{D_{\nu-1}}=\Sigma'+\Sigma'',$$

при этом сумма Σ' распространена на положительные, а сумма Σ'' — на отрицательные слагаемые. Если при переходе от $D_{\nu-1}$ к D_ν мы имеем постоянство знака, то $\operatorname{sgn}\frac{D_\nu}{D_{\nu-1}}>0$ и поэтому входит в сумму Σ', а если перемену — то в сумму Σ''.

Таким образом, имеем

$$p_k=\sum{}'\frac{D_\nu}{D_{\nu-1}},\quad -q_k=\sum{}''\frac{D_\nu}{D_{\nu-1}},$$
$$(k=1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$
$$\sum_{\nu=0}^{k-1}\operatorname{sgn}\frac{D_\nu}{D_{\nu-1}}=\sum{}'+\sum{}''=p_k-q_k.$$

Из (10) находим

$$I(P_k)=\frac{p_k+q_k}{2}+\frac{p_k-q_k}{2}\operatorname{sgn}\frac{D_k}{D_{k-1}},\ (k=1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

откуда вытекает теорема 1 статьи [5] М. Г. Крейна: $I(P_k)=p_k$ при $\frac{D_k}{D_{k-1}}>0$ и $I(P_k)=q_k$ при $\frac{D_k}{D_{k-1}}<0$.

Чтобы выяснить более глубокий смысл величин p_k и q_k, рассмотрим форму Теплица

$$T_k=\sum_{i, j=0}^{k-1}c_{i-j}x_i\bar{x}_j. \tag{14}$$

Для произвольного многочлена $Q_{k-1}(z)=\sum_{s=0}^{k-1}x_s z^s$ имеем

$$S\{|Q_{k-1}(z)|^2\}=\sum_{i, j=0}^{k-1}x_i\bar{x}_j\,S\{z^i\bar{z}^j\}=T_k. \tag{15}$$

Если этот же многочлен разложить по ортогональным многочленам $\{P_r(z)\}$, т. е. положить

$$Q_{k-1}(z)=\sum_{r=0}^{k-1}y_rP_r(z),$$

то получим *

$$S\{|Q_{k-1}(z)|^2\}=\sum_{r, s=0}^{k-1}y_r\bar{y}_sS\{P_r(z)\overline{P_s(z)}\}=\sum_{r=0}^{k-1}h_r|y_r|^2=T_k. \tag{16}$$

* Таким образом, преобразование формы к каноническому виду по методу Якоби сводится к переходу от разложения по степеням $\{z^r\}$ к разложению по ортогональным многочленам $\{P_r(z)\}$ многочлена $Q_{k-1}(z)$.

Таким образом, p_k *равно числу положительных, а* q_k — *числу отрицательных квадратов в каноническом представлении формы Теплица* (14).

4. Рассмотрим в заключение вопрос о возможности существования общего корня у двух последовательных многочленов. Если бы мы имели

$$P_k(\zeta) = P_{k+1}(\zeta) = 0,$$

то по (5) отсюда вытекало бы равенство $a_k P_k^*(\zeta) = 0$. В случае $a_k \neq 0$ мы имели бы

$$P_k(\zeta) = P_k^*(\zeta) = 0,$$

т. е. $|\zeta| = 1$, но, как было сказано, это невозможно при условиях (1). Если же $a_k = 0$, то $P_{k+1}(z) \equiv zP_k(z)$. Следовательно, *если многочлены* $P_k(z)$ *и* $P_{k+1}(z)$ *имеют общий корень, то все корни многочлена* $P_k(z)$ *являются в то же время корнями многочлена* $P_{k+1}(z)$. *Условие, необходимое и достаточное для этого, таково:*

$$a_k = |c_{i-j+1}|_0^k = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Державне науково-технiчне видавництво України, Харьков, 1938.

2. Я. Л. Геронимус. Обобщенные ортогональные полиномы и формула Кристоффеля — Дарбу. ДАН СССР, т. XXVI, № 9, 834—846, 1940.

3. Я. Л. Геронимус. О некоторых свойствах обобщенных ортогональных полиномов. ДАН СССР, т. XXIX, № 1, 5—8, 1940.

4. Я. Л. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге и их приложения. Зап. н.-и. ин-та матем. и мех. и ХМО, т. XIX, 1948, стр. 35—120.

5. М. Г. Крейн. О расположении корней многочленов, ортогональных на единичной окружности по знакопеременному весу. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». вып. 2, 1966, стр. 131—137.

6. A. Cohn. Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. Math. Zeitschr., т. 14, 1922, 110—148.

7. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. Гостехиздат, М.— Л., 1952.

Поступила 22 июня 1967 г.