Вып. 6 1968

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ СТЕПЕННОГО ПОРЯДКА МЕНЬШЕ $\frac{1}{2}$

Н. В. Говоров

Краевая задача Римана заключается, как известно, в том, чтобы найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную* в некоторой области D с границей L, на которой выполняется краевое условие

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t). \tag{1}$$

В классической постановке контур L предполагается простым гладким и замкнутым, а функции $G(t)$ и $g(t)$ — удовлетворяющими условию Гельдера, причем $G(t) \neq 0$. Эффективное решение этой задачи было получено в 1936 г. Ф. Д. Гаховым [2]. В теорию краевых задач им было введено понятие об индексе, являющееся основной характеристикой числа решений задачи Римана:

$$\operatorname{Ind}_L G(t) = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg G(t). \tag{2}$$

В 1941 г. Б. В. Хведелидзе [7] обобщил решение Ф. Д. Гахова на случай многосвязной области. В дальнейшем задача (1) обобщалась в самых различных направлениях: задача Римана с разрывными коэффициентами [3], с разомкнутыми контурами [3], [6]; задача со сдвигом и т. д. Эти обобщения подробно освещены в монографиях [1] и [5]. Важно отметить, что во всех этих обобщениях как индекс коэффициента $G(t)$, так и число ограниченных (или интегрируемых) решений были конечными. В настоящей работе рассматривается один из случаев задачи Римана с бесконечным индексом.

Результаты, излагающиеся в настоящей статье, были получены в 1961—1964 гг. и анонсированы в работах [13] — [17].

Выражаю глубокую благодарность профессору Ф. Д. Гахову, руководившему настоящей работой, и профессору А. А. Гольдбергу, давшему мне ценные советы и указания.

§ 1. ЗАДАНИЕ КОНТУРА И ОБЛАСТИ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Пусть в комплексной плоскости z дана область D, граница которой есть простой гладкий разомкнутый бесконечный контур L с началом в некоторой конечной точке $z = t_0$. Точки контура будем обозначать через t или τ. Пусть $\psi(t)$ — угол, составленный касательной к L в точке t и осью Ox. Гладкость контура L означает, что $\psi(t)$ непрерывна для

---

* Вместо ограниченности иногда вводятся другие требования.

всех $t \in L$, включая $t = \infty$, т. е. существует предел $\lim\limits_{t \to \infty,\, t \in L} \psi(t)$. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что

$$\lim_{t \to \infty} \psi(t) = 0, \tag{1.1}$$

что L не проходит через начало координат и что начальная точка $t = t_0$ контура L лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, т. е.

$$\operatorname{Re} t_0 > 0. \tag{1.2}$$

Это не нарушит общности, так как к указанному расположению контура всегда можно перейти преобразованием переноса и поворота.

Зададим на контуре L функцию $G(t)$, непрерывную и отличную от нуля для всех конечных $t \in L$. Тогда, если

$$\lim_{t \to \infty} \arg G(t) = +\infty \, (-\infty),$$

будем говорить, что индекс функции $G(t)$ равен плюс-бесконечности (соответственно минус-бесконечности):

$$\operatorname{Ind}_L G(t) = +\infty (-\infty),$$

а точку $t = \infty$ будем называть точкой положительного (отрицательного) завихрения функции $G(t)$.

Определение 1. *Функцию $f(t)$, заданную на простом спрямляемом контуре Λ, назовем удовлетворяющей условию Гельдера* [1, стр. 21], если имеет место неравенство

$$|f(t_1) - f(t_2)| < A \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|^{\mu} \quad (A = \mathrm{const},\ 0 < \mu \leqslant 1) \tag{1.3}$$

для случая, когда Λ бесконечен и не проходит через $z = 0$, и

$$|f(t_1) - f(t_2)| < A \, |t_1 - t_2|^{\mu} \tag{1.4}$$

для конечного Λ. Будем обозначать это одним из символов:

$$f(t) \in H,\ f(t) \in H_{\Lambda},\ f(t) \in H(\mu),\ f(t) \in H_{\Lambda}(\mu).$$

Легко проверить, что: 1) для конечного контура Λ, не проходящего через точку $z = 0$, условия (1.3) и (1.4) равносильны; 2) если $f(t) \in H_{\Lambda}$, то $f(t)$ ограничена на Λ.

§ 2. ПОСТАНОВКА ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Пусть на контуре L, определенном в § 1, задана функция $G(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\arg G(t) = 2\pi \varphi(t) \, |t|^{\rho}$, (2.1)

где

$$\rho > 0,\ \varphi(t) \in H(\mu),\ 0 < \mu \leqslant 1,\ \varphi(\infty) = \lambda > 0. \tag{2.2}$$

2. $\ln |G(t)| \in H(\mu)$. (2.3)

При этом ветвь $\arg G(t)$ выбрана под условием

$$1 < \varphi(t_0) \leqslant 0. \tag{2.4}$$

Обозначим через $\tilde{L}$ контур L с исключенными концами $t = t_0$, $t = \infty$. Требуется найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в D, предельные значения на $\tilde{L}$ которой удовлетворяют соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t). \tag{2.5}$$

Эта однородная задача Римана имеет плюс-бесконечный индекс, поскольку $t = \infty$ есть точка завихрения функции $G(t)$. Очевидно, $G(t)$ непрерывна и не равна нулю при любом $t \neq \infty$; функция же $\ln|G(t)|$ ограничена на L и поэтому

$$\frac{1}{K} < |G(t)| < K \text{ при } t \in L \ (K = \text{const},\ K > 1). \tag{2.6}$$

Назовем число ρ порядком завихрения, а λ — его коэффициентом. В статье мы будем рассматривать только тот случай, когда

$$0 < \rho < \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

§ 3. ПОРЯДОК И ИНДИКАТОР АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Прежде чем переходить к решению задачи (2.5), введем необходимые для дальнейшего понятия порядка и индикатора функции, характеризующие ее рост или убывание при $z \to \infty$.

Всюду впредь там, где это не вызовет недоразумений, условимся обозначать углы $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ и $\alpha < \arg z < \beta$ соответственно через $[\alpha, \beta]$ и (α, β).

Определение 2. *Пусть внутри угла* (α, β) *задана аналитическая функция* $f(z) \not\equiv 0$, *непрерывная в замкнутом угле* $[\alpha, \beta]$ *и пусть при некотором* $\mu > 0$ *имеет место асимптотическая оценка**

$$\max_{\alpha \leqslant \beta \leqslant \theta} |f(re^{i\theta})| < \exp(r^{\mu}), \quad r > R(\mu). \tag{3.1}$$

Тогда точная нижняя граница ρ *множества чисел* $\{\nu\}$, *для которых*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\nu}} \equiv 0 \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta), \tag{3.2}$$

называется порядком функции $f(z)$ *в угле* (α, β), *а функция*

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho}} \tag{3.3}$$

называется ее индикатором.

Если (3.1) *не верно ни при каком* $\mu > 0$, *то будем считать* $\rho = \infty$. Правомерность этого определения вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Если неравенство* (3.1) *выполняется хотя бы при одном* $\mu > 0$, и $f(z) \not\equiv 0$, *то тождество* (3.2) *заведомо справедливо при* $\nu > \max\left(\mu, \frac{\pi}{\beta - \alpha}\right)$.

Для установления теоремы нам потребуются две леммы. (Приводимые здесь доказательства принадлежат А. А. Гольдбергу).

Лемма 1. *Если* $f(z)$ *регулярна внутри угла* $(0, 2\pi)$ *и асимптотически*

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |f(re^{i\theta})| < \exp(-ar^{\nu}),$$

где $a > 0$, $\nu > \frac{1}{2}$, то $f(z) \equiv 0$.

* Оценка, выполняющаяся при достаточно больших r.

Лемма легко получается из следующего предложения [8, стр. 114]

Если $f(z)$ регулярна в $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывна в $\operatorname{Re} z \geqslant 0 \, (z \neq \infty)$ и $|F(z)| < Me^{-a|z|} \, (\operatorname{Re} z \geqslant 0, \; a > 0; \; a, M = \mathrm{const})$, то $F(z) \equiv 0$.

Лемма 2. *Если функция $h(\theta)$ тригонометрически ν-выпукла на отрезке* $[\alpha, \beta]$ [4, стр. 74; 8, стр. 134], а $\beta - \alpha > \frac{\pi}{\nu}$ *и при этом*

$$-\infty < h(\theta) \leqslant 0, \tag{3.4}$$

то $h(\theta) \equiv 0$.

В самом деле, $h(\alpha) + h\left(\alpha + \frac{\pi}{\nu}\right) \geqslant 0$ [4, стр. 84], откуда в силу (3.4)

$$h(\alpha) = h\left(\alpha + \frac{\pi}{\nu}\right) = 0.$$

Но тогда $\theta = \alpha + \frac{\pi}{\nu}$ есть точка максимума функции $h(\theta)$, а поэтому [4, стр. 78]

$$h(\theta) \geqslant h\left(\alpha + \frac{\pi}{\nu}\right) \cos\left[\nu\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{\nu}\right)\right] = 0$$

при $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta_0$, где

$$\beta_0 = \min\left(\beta, \, \alpha + \frac{2\pi}{\nu}\right),$$

и в сочетании с (3.4), $h(\theta) = 0$ при $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta_0$. Если $\beta_0 < \beta$, повторим то же рассуждение к отрезку $[\alpha + (2\pi/\nu), \beta]$. После конечного числа шагов получим то, что и требовалось доказать.

Докажем теорему 1 только для случая $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, так как к нему всегда можно перейти конформным отображением. Поскольку $\mu < \nu$, то

$$h^{(\nu)}(\theta) \equiv \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\nu}} \leqslant 0 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi), \tag{3.5}$$

и асимптотически

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \ln|f(re^{i\theta})| < r^{\nu}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{3.6}$$

Но из (3.5) и (3.6) следует [4, стр. 74], что $h^{(\nu)}(\theta)$ тригонометрически выпукла. Если допустить, что $h^{(\nu)}(\theta) \equiv -\infty$, то асимптотически [4, стр. 97]

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \ln|f(re^{i\theta})| \leqslant -ar^{\nu} \text{ при любом } a > 0,$$

откуда по лемме 1 $f(z) \equiv 0$, что невозможно. Таким образом, $h^{(\nu)}(\theta) \not\equiv -\infty$. Тогда [4, стр. 74] $h^{(\nu)}(\theta)$ непрерывна на $[0, 2\pi]$ и в силу (3.5) и леммы 2 $h^{(\nu)}(\theta) \equiv 0$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Для случая, когда $f(z)$ — целая функция, рассматриваемая в $(0, 2\pi)$, определение 2 совпадает с обычным [4, стр. 11]:

$$\rho = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}, \text{ где } M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \tag{3.7}$$

поскольку тогда [4, стр. 59] для любого $\varepsilon > 0$ верны оценки

$$\ln M(r) < r^{\rho+\varepsilon}, \; \ln|f(r_n e^{i\theta})| > r_n^{\rho-\varepsilon}, \; n = 1, 2, \ldots, \tag{3.8}$$

первая из которых — асимптотическая, а вторая — выполняется для некоторых θ и некоторых последовательностей $r_1 < r_2 < \ldots, \; r_n \to \infty$.

Теперь введем понятие порядка функции, заданной в области D, определение которой дано в § 1.

Определение 3. *Пусть функция* $f(z) \not\equiv 0$ *регулярна и непрерывна вплоть до* $\tilde{L}$ *и* $\{\mu\}$ — *множество таких* $\mu > 0$, *при которых верна оценка* (*3.1*), *а* $\{\nu\}$ — *множество тех* $\nu > \theta$, *при которых*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\nu}} \equiv 0. \tag{3.9}$$

Тогда число $\rho = \max(\inf\{\mu\}, \inf\{\nu\})$ *называется порядком функции* $f(z)$ *в области* D, *а функция* (3.3) — *ее индикатором.*

Теорема 2′. *Если для функции* $f(z) \not\equiv 0$, *регулярной в* D, *справедливо неравенство* (3.1), *то при* $\nu > \max\left(\mu, \frac{1}{2}\right)$ *имеет место тождество* (3.9).

Теорема может быть доказана так же, как теорема 1.

Определения 2 и 3 однотипны, так как для первого из них $\inf\{\nu\} \geqslant \inf\{\mu\}$ или, что равносильно, справедлива

Теорема 3. *Если* $f(z)$ — *функция порядка* $\rho > 0$ *в угле* $[\alpha, \beta]$ *в смысле определения 2, то для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется оценка*

$$\max_{\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta}|f(re^{i\theta})| < \exp(r^{\rho+\varepsilon}) \text{ при } r > r_\varepsilon. \tag{3.10}$$

Доказательство. Обозначим $\rho = \inf\{\nu\}$, $\mu_0 = \inf\{\mu\}$. Нужно доказать, что $\rho \geqslant \mu_0$. Допустим, что $\rho < \mu_0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ так, что

$$\rho + 3\varepsilon < \mu_0 < \rho + 4\varepsilon.$$

Найдется такая последовательность $\{z_n\} = \{r_n e^{i\theta_n}\} \to \infty$, что

$$\ln|f(r_n e^{i\theta_n})| > r_n^{\rho+3\varepsilon}. \tag{3.11}$$

Но, с другой стороны, по определению ρ имеем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho+\varepsilon}} \equiv 0 \text{ при } \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta. \tag{3.12}$$

Будем считать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n = \theta_0$. (Иначе мы перешли бы к некоторой подпоследовательности). Пусть, например, $\alpha \leqslant \theta_0 < \beta$ и $\theta_n \to \theta_0 + 0$. Рассмотрим в угле $[\theta_0, \theta_0 + \eta]$, где

$$0 < \eta < \frac{\pi}{2(\rho + 4\varepsilon)}, \tag{3.13}$$

вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z)\exp[-z^{\rho+2\varepsilon}e^{-i\theta_0(\rho+2\varepsilon)}]. \tag{3.14}$$

Из (3.12) — (3.14) следует, что $\varphi(z)$ ограничена на сторонах угла $[\theta_0, \theta_0 + \eta]$. Но из определения μ_0 и (3.14) вытекает, что

$$\max_{\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\eta} \ln|\varphi(re^{i\theta})| < r^{\rho+4\varepsilon}\ (r > r_\varepsilon).$$

Тогда по принципу Фрагмена—Линделефа [4, стр. 69] получим, что $\varphi(z)$ ограничена в этом угле. Однако из (3.11) и (3.14) ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(z_n) = \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Для функции $f(z)$, заданной в области D, оценка (3.10), где, естественно, надо положить $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, следует из самого определения 3.

В дальнейшем нами будет также использована

Теорема 4. *Если функция $f(z)$ регулярна и порядка $\rho>0$ в $[\alpha, \beta]$ и ее индикатор $h_f(\theta)$ удовлетворяет неравенству*

$$-\infty \leqslant h_f(\theta) \leqslant H(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta), \tag{3.15}$$

где $H(\theta)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то для любого $\varepsilon>0$ равномерно по θ

$$\ln|f(re^{i\theta})| < [H(\theta)+\varepsilon]r^{\rho} \text{ при } r > r_{\varepsilon}. \tag{3.16}$$

Доказательство проводится так же, как и для частного случая этой теоремы, когда $H(\theta) \equiv h_f(\theta)$ [4, стр. 97].

На основании оценки (3.10) можно утверждать, что индикатор, взятый для порядка в смысле определения 2 (или 3), обладает всеми обычными свойствами индикатора [4, стр. 74—85), взятого для порядка в смысле следующего (более общепринятого) определения [4, стр. 69]:

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r, \alpha, \beta)}{\ln r}, \quad M_f(r, \alpha, \beta) = \max_{\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta} |f(re^{i\theta})|. \tag{3.17}$$

Определения 2 и 3 введены, главным образом, для того, чтобы характеризовать не только рост, но и убывание функции. Например, функция $f(z)=e^{1-z}$ в угле $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ в смысле определения 2 имеет порядок $\rho=1$ (между прочим, совпадающий с ее порядком во всей плоскости) и индикатор $h_f(\theta)=-\cos\theta$, характеризующий ее убывание по лучам $\arg z=\theta$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. В смысле же определения (3.17) $\rho=0$ и $h_f(\theta)\equiv-\infty$, что, конечно, характеризует поведение функции при $z\to\infty$ гораздо хуже.

Определение 4. *Если функция $f(z)$ порядка $\rho>0$ в угле $[\alpha, \beta]$ (или в области D) для любого $\varepsilon>0$ допускает оценку*

$$\max_{\theta} \ln|f(re^{i\theta})| < -K_{\varepsilon} r^{\rho-\varepsilon} \text{ при } r>r_{\varepsilon}, \tag{3.18}$$

где K_{ε} — некоторая положительная постоянная, то будем называть число ρ также порядком убывания *функции $f(z)$ в угле $[\alpha, \beta]$ (соответственно в области D). Если же для любого $\varepsilon>0$ найдется такая последовательность $0<r_1<r_2<\ldots, r_n\to\infty$, что*

$$\max_{\theta} \ln|f(r_n e^{i\theta})| > K_{\varepsilon} r_n^{\rho-\varepsilon}, \quad K_{\varepsilon}>0, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{3.19}$$

то будем называть число ρ порядком роста *функции $f(z)$ в угле $[\alpha, \beta]$ (соответственно, в области D).*

Можно было бы показать, что:

1. Порядок функции либо является порядком ее роста в $[\alpha, \beta]$ (в области D), либо порядком ее убывания в каждом «урезанном» угле $[\alpha+\delta, \beta-\delta]$, $\delta>0$ (соответственно, в $[\delta, 2\pi-\delta]$ для области D).

2. Определения 2 и (3.17) равносильны тогда и только тогда, когда порядок функции $f(z)$ является порядком ее роста.

Из теоремы 4 и определения 2 вытекает следующая

Теорема 5. *Если $f(z)$ регулярна и конечного порядка в угле $[\alpha, \beta]$ (или в D), и при некотором $\rho>0$*

$$-\infty < \sup_{\theta} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho}} < 0, \tag{3.20}$$

то $f(z)$ ограничена и имеет в $[\alpha, \beta]$ (соответственно в D) порядок ρ, являющийся порядком ее убывания.

Следствие. *Если $f(z)$ имеет в угле $[\alpha, \beta]$ (в области D) конечный порядок ρ и всюду отрицательный индикатор: $-\infty \leqslant \sup\limits_{\theta} h_f(\theta) < 0$, то $f(z)$ ограничена и имеет порядок убывания ρ.*

Приведем еще одно определение порядка, принадлежащее Е. Титчмаршу [10, стр. 209].

Определение 2'. *Порядком функции $f(z)$, регулярной в (α, β) и непрерывной в $[\alpha, \beta]$, называется точная нижняя граница всех чисел $\nu > 0$, для которых равномерно по θ выполняется стремление к верхнему пределу в (3.2)*.*

Теорема 6. *Определения 2 и 2' равносильны.*

В доказательстве теоремы 6 используется доказанная в [18]

Теорема 7. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ и непрерывна в $|z| \leqslant R$, причем $|f(0)| \geqslant 1$. Тогда для каждого $N > 0$ в плоскости z найдется конечное число $s = s_{f, N}$ кружков $|z - z_n| \leqslant r_n$, для которых*

$$\sum_{n=1}^{s} r_n < \frac{R}{N},$$

и вне которых в $|z| \leqslant R$ выполняется оценка,

$$\ln|f(z)| > -9MN \ln \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

Кроме этого, нам потребуются две леммы.

Лемма 3. *Пусть функция $\varphi(z)$ регулярна в области*

$$B = \left(\frac{R}{2} < |z| < \frac{3R}{2}\right) \cap (\operatorname{Im} z > 0), \quad R > 0,$$

и непрерывна в ее замыкании $\overline{B}$, причем $\varphi(Ri) \geqslant 1$. Тогда найдется конечное число кружков $|z - a_n| < s_n$ таких, что $\sum s_n < R/4$ и вне которых в $\overline{B}$ выполняется неравенство

$$\ln|\varphi(z)| > -T \ln \max_{z \in \overline{B}} |\varphi(z)|, \tag{3.21}$$

где T — некоторая абсолютная положительная постоянная.

Доказательство. Обозначим

$$B_* = B \diagdown \left\{\left(\left|z \pm \frac{R}{2}\right| \leqslant \frac{R}{32}\right) \cup \left(\left|z \pm \frac{3R}{2}\right| \leqslant \frac{R}{32}\right)\right\}.$$

Отобразим область B на $|\zeta| < R$ с помощью функции $\zeta = \omega(z)$ так, что $\omega(Ri) = 0$. Ввиду того, что $\omega(z)$ регулярна и однолистна в замкнутой области $\overline{B}_*$,

$$\min_{z \in \overline{B}_*} |\omega'(z)| \equiv C > 0, \tag{3,21'}$$

* В определении Е. Титчмарша нами добавлено требование непрерывности в $[\alpha, \beta]$. Если его снять в обоих определениях, то они останутся равносильными.

где C — абсолютная постоянная. По теореме 7 в плоскости ζ можно найти конечное множество кружков

$$Q = \bigcup_{n=1}^{s} (|\zeta - \zeta_n| \leqslant t_n), \quad \sum_{n=1}^{s} t_n < \frac{CR}{8},$$

вне которых в $|\zeta| \leqslant R$ выполняется оценка $(z = \omega^{-1}(\zeta))$:

$$\ln |\varphi[\omega^{-1}(\zeta)]| > -\frac{72}{C} \ln \max_{z \in \overline{B}} |\varphi(z)|.$$

Остается доказать, что образ $P \subset B$ множества Q при отображении $z = \omega^{-1}(\zeta)$ можно покрыть кружками с суммой радиусов меньше $R/4$. Множество $P_* = P \cap B_*$ на основании (3.21′) можно покрыть кружками с суммой радиусов меньше $\frac{CR}{8} \cdot \frac{1}{C} = \frac{R}{8}$. Множество $P_{**} = P \setminus P_*$ лежит внутри кругов $\left|z \pm \frac{R}{2}\right| \leqslant \frac{R}{32}$, $\left|z \pm \frac{3R}{2}\right| \leqslant \frac{R}{32}$ с суммой радиусов $\frac{R}{8}$. Отсюда и следует требуемое. Лемма 3 доказана.

Следствие. *Для любой функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей условию леммы 3, найдется такая полуокружность*

$$C_{R\varphi} = (|z| = R_\varphi) \cap (\operatorname{Im} z \geqslant 0), \quad \frac{R}{2} < R_\varphi < \frac{3}{2} R,$$

на которой

$$\min_{z \in C_{R\varphi}} \ln |\varphi(z)| > -T \max_{z \in B} \ln |\varphi(z)|, \tag{3.22}$$

где T — та же абсолютная постоянная, что и в (3.21).

Лемма 4. *Если функция $f(z)$ регулярна в угле (α, β), непрерывна в $[\alpha, \beta]$ и при некотором $\mu > 0$ асимптотически*

$$\max_{\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta} \ln |f(re^{i\theta})| < r^\mu, \tag{3.23}$$

то для произвольного $\nu > 0$ либо хотя бы при одном θ, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$,

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\nu} \neq 0, \tag{3.24}$$

либо равномерно по θ

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\nu} \equiv 0 \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta). \tag{3.25}$$

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать $\alpha = 0$, $\beta = \pi$. Предположим, что имеет место тождество (3.25). Докажем равномерность стремления по θ. Взяв постоянную T из леммы 3 и любое $\varepsilon > 0$ с учетом определения 2 и теоремы 4, получим асимптотическую оценку

$$\sup_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \ln |f(re^{i\theta})| < \frac{\varepsilon}{2T} \left(\frac{2}{3}\right)^{2\nu} r^\nu. \tag{3.26}$$

С другой стороны, из (3.25) при $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\ln |f(R_n i)| > -\frac{\varepsilon}{2T} \left(\frac{2}{3}\right)^\nu R_n^\nu \tag{3.27}$$

для некоторой последовательности $\{R_n\} \to \infty$. Рассмотрим в полукольцах

$$Q_n = \left(\frac{R_n}{2} < |z| < \frac{3}{2} R_n\right) \cap (\operatorname{Im} z > 0)$$

такие функции:

$$f_n(z) = \exp\left[\frac{\varepsilon}{2T}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu} R_n^{\nu}\right] f(z).$$

Согласно (3.26) асимптотически

$$\sup_{z \in Q_n} \ln|f_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2T}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu} r^{\nu} + R_n^{\nu}\right] < \frac{\varepsilon}{T}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu} R_n^{\nu}, \tag{3.28}$$

а на основании (3.27)

$$\ln|f_n(Ri)| > 0.$$

Тогда в силу следствия леммы 3 при некотором r_n, $\frac{R_n}{2} < r_n < \frac{3R_n}{2}$, будет

$$\inf_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \ln|f_n(r_n e^{i\theta})| > -\varepsilon\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu} R_n^{\nu}, \tag{3.29}$$

или

$$\inf_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} \ln|f(r_n e^{i\theta})| > -\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2T}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu} R_n^{\nu} \geqslant -2\varepsilon r_n^{\nu}, \tag{3.30}$$

так как всегда можно считать $T > 1$. Но соотношения (3.26) и (3.30) означают, что стремление к верхнему пределу в соотношении (3.25) равномерно по θ. Лемма 4 доказана.

Докажем теперь теорему 6. Пусть функция $f(z)$ имеет в угле $[\alpha, \beta]$ порядок ρ в смысле определения 2'. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ равномерно по θ

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho+\varepsilon}} \equiv 0 \quad (\alpha < \theta < \beta), \tag{3.31}$$

но при $\varepsilon < 0$ это равенство в силу леммы 4 нарушается хотя бы при одном θ. Далее, из равномерности стремления к пределу следует

$$\max_{\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta} \ln|f(re^{i\theta})| < r^{\rho+\varepsilon} \text{ при } r > r_\varepsilon. \tag{3.32}$$

Все сказанное означает, что ρ есть порядок функции $f(z)$ в смысле определения 2.

Пусть теперь, обратно, $f(z)$ имеет порядок ρ в смысле определения 2. Тогда соотношение (3.31) при любом $\varepsilon > 0$ справедливо, а при любом $\varepsilon < 0$ несправедливо хотя бы при одном θ. Отсюда и из леммы 4 получаем, что ρ есть порядок $f(z)$ в смысле определения 2'. Теорема 6 доказана.

Во всем дальнейшем изложении порядок функции будет подразумеваться только в смысле определений 2, 2' или 3.

§ 4. КАНОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА И ЕЕ СВОЙСТВА

Приступим к решению поставленной в § 2 задачи Римана:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t). \tag{2.5}$$

Допустим, что существует ее решение $X(z)$, не обращающееся в нуль нигде в $D \cup \tilde{L}$. Тогда функция $\ln X(z)$ регулярна в области D и удовлетворяет краевому условию

$$\frac{\ln X^+(t)}{t} - \frac{\ln X^-(t)}{t} = \frac{\ln G(t)}{t}, \quad t \in \tilde{L}, \tag{4.1}$$

(Деление на t произведено для сходимости последующего интеграла типа Коши). Используя формулы Сохоцкого, найдем одно из решений:

$$\mathrm{X}(z) = \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau - z)}\,d\tau\right]. \tag{4.2}$$

Интеграл в (4.2) сходится, так как точка $z = 0$ не лежит на L и

$$|\ln G(t)| < K|t|^{\rho} < K|t|^{\frac{1}{2}} \quad (t \in L,\ K = \mathrm{const}). \tag{4.3}$$

Докажем, что функция (4.2) обладает следующими свойствами.

1°. $\mathrm{X}(z)$ регулярна в D, непрерывна вплоть до $\tilde{L}$ и нигде в $D \cup \tilde{L}$ не обращается в нуль или в бесконечность.

2°. $\mathrm{X}(z)$ удовлетворяет краевому условию (2.5), т. е.

$$\mathrm{X}^{+}(t) = G(t)\,\mathrm{X}^{-}(t), \quad t \in \tilde{L}. \tag{4.4}$$

3°. $\mathrm{X}(z)$ нормирована условием

$$\mathrm{X}(0) = 1. \tag{4.5}$$

4°. В окрестности начала контура $z = t_0$ справедлива оценка

$$C_2 > |\mathrm{X}(z)| > C_1|z - t_0|^{\alpha}, \quad C_k > 0, \quad C_k = \mathrm{const}. \tag{4.6}$$

5°. $\mathrm{X}(z)$ в области D ограничена, т. е.

$$\sup_{z \in D}|\mathrm{X}(z)| < M = \mathrm{const}. \tag{4.7}$$

Действительно, так как $\rho < \frac{1}{2} < 1$, то [5, стр. 24] для любых $t_1,\ t_2 \in L$

$$\big||t_1|^{\rho} - |t_2|^{\rho}\big| \leqslant |t_1 - t_2|^{\rho}.$$

Поэтому в силу (2.1) — (2.3) на любой конечной дуге $L' \subset L$ будет: $\ln G(t) \in H_{L'}$. Тогда предельные значения на $\tilde{L}$ интеграла типа Коши в равенстве (4.2) также удовлетворяют условию $H_{L'}$ [1, стр. 56], и, следовательно, этот интеграл конечен в любой точке $z \in D \cup \tilde{L}$. Отсюда и следует 1°. Свойство 2° вытекает из формул Сохоцкого. Свойство 3° очевидно.

Докажем теперь 4°. Разобьем контур L произвольным образом на две дуги: l и L^*, где l — конечная дуга с началом $t = t_0$. Тогда можно записать

$$\ln \mathrm{X}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\ln G(\tau)\frac{d\tau}{\tau} + \frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L^*}\frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau - z)}\,d\tau.$$

Но так как вблизи $z = t_0$ [1, стр. 73] справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\ln|z - t_0|\,[i\ln|G(t_0)| - \arg G(t_0)] + O(1),$$

то, полагая $\alpha = -\frac{1}{2\pi}\arg G(t_0)$ с учетом (2.4), вблизи $z = t_0$ имеем

$$\ln|\mathrm{X}(z)| = \alpha\ln|z - t_0| + O(1), \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

откуда и получаем 4°.

Остается доказать 5°. Мы докажем более сильное утверждение (которое потребуется в дальнейшем), используя следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть на контуре L задана вещественная функция $\varphi(t) \in H_L$, $\varphi(\infty) = \lambda \neq 0$. Тогда функция*

$$f(z) = \exp\left[z \int_L \frac{\varphi(\tau) \, |\tau|^\rho}{\tau(\tau - z)} d\tau\right], \quad 0 < \rho < 1,$$

имеет в области D порядок ρ со следующим индикатором:

$$h_f(\theta) \equiv \lim_{r \to \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho} = -\frac{\pi\lambda}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\theta - \pi), \tag{4.8}$$

причем, стремление к пределу равномерно по θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Доказательству теоремы 8 предпошлем три леммы.

Лемма 5. *Если функция $\omega(r)$ непрерывна на отрезке $0 \leqslant r \leqslant r_0$ и $\rho > 0$, $a > 0$, то*

$$\int_{aR}^{r_0} |\omega(r) - \omega(R)| \frac{dr}{r^{\rho+1}} = o\left(\frac{1}{R^\rho}\right) \text{ *при* } R \to 0.$$

В самом деле, взяв любое $c > 0$, имеем

$$\lim_{R \to 0}\left[R^\rho \int_{aR}^{r_0} |\omega(r) - \omega(R)| \frac{dr}{r^{\rho+1}}\right] \leqslant \lim_{R \to 0}\left\{R^\rho \int_c^{r_0} [\omega(r) - \omega(R)] \frac{dr}{r^{\rho+1}}\right\} +$$
$$+ \lim_{R \to 0}\left[R^\rho \max_{0 \leqslant r \leqslant c} |\omega(r) - \omega(R)| \int_{aR}^{r_0} \frac{dr}{r^{\rho+1}}\right] = \frac{a^\rho}{\rho} \max_{0 \leqslant r \leqslant c} |\omega(r) - \omega(0)|. \tag{4.9}$$

В силу произвольности $c > 0$ отсюда получаем лемму.

Лемма 6. *Если комплекснозначная функция $\omega(r)$ непрерывна на отрезке $[0, r_0]$ и имеет в $(0, r_0)$ производную, подчиненную условию*

$$|\omega'(r)| < \frac{\eta(r)}{r}, \text{ *где* } \lim_{r \to 0} \eta(r) = 0, \tag{4.10}$$

и $0 < \rho < 1$, то при $R \to +0$ справедлива оценка

$$I(R) \equiv \int_0^{r_0} \frac{|\omega(r) - \omega(R)|}{r^\rho \, |r - R|} dr = o\left(\frac{1}{R^\rho}\right). \tag{4.11}$$

Доказательство. Считая $R < \frac{r_0}{2}$, запишем $I(R)$ в такой форме:

$$I(R) = \int_0^{R/2} \psi_R(r)\, dr + \int_{R/2}^{2R} \psi_R(r)\, dr + \int_{2R}^{r_0} \psi_R(r)\, dr, \text{ где } \psi_R(r) = \frac{|\omega(r) - \omega(R)|}{r^\rho \, |r - R|}.$$

Очевидно

$$\int_0^{R/2} \psi_R(r)\, dr \leqslant \max_{0 \leqslant r \leqslant R} |\omega(r) - \omega(R)| \frac{1}{R^\rho} \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\rho (1 - x)} = o\left(\frac{1}{R^\rho}\right). \tag{4.12}$$

Используя теорему Лагранжа и (4.10), найдем

$$\int_{R/2}^{2R} \psi_R(r)\, dr \leqslant 2 \max_{R/2 \leqslant r \leqslant 2R} \eta(r) \int_{R/2}^{2R} \frac{dr}{r^{\rho+1}} = o\left(\frac{1}{R^\rho}\right). \tag{4.13}$$

Далее, так как $r - R \geqslant \frac{r}{2}$ при $r \geqslant 2R$, то, опираясь на лемму 5, получим

$$\int_{2R}^{r_0} \psi_R(r)\,dr \leqslant 2\int_{2R}^{r_0} |\omega(r) - \omega(R)|\,\frac{dr}{r^{\rho+1}} = o\left(\frac{1}{R^\rho}\right). \tag{4.14}$$

Из оценок (4.12) — (4.14) и следует

Лемма 7. *Пусть дан простой гладкий незамкнутый контур l, касающийся в своем конце $u=0$ оси абсцисс справа, и пусть $v \in l$ таково, что $|v| = |\zeta|$*. Тогда в окрестности точки $\zeta = 0$ при $0 < \rho < 1$ верна оценка*

$$J(\zeta) \equiv \int_l \frac{e^{i\rho \arg u} - e^{i\rho \arg v}}{u^\rho (u-\zeta)}\,du. \tag{4.15}$$

Доказательство. Не нарушая общности, будем считать l столь малым, что [5, стр. 19]:

1) каждая окружность $|\zeta| = r$ пересекает l не более, чем в одной точке;

$$2)\ |\arg u'_s - \arg u| < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}, \tag{4.16}$$

где s — дуговая абсцисса точки u.

Тогда $r = |u|$ может служить параметром на l, причем функция $\omega(r) = e^{i\rho \arg u(r)}$ удовлетворяет условиям леммы 6. В самом деле,

$$|\omega'(r)| = \rho\left|\frac{d \arg u}{ds}\cdot\frac{ds}{dr}\right| = \frac{\rho}{\cos\alpha(u)}\left|\operatorname{Im}\frac{u'_s}{u}\right| \leqslant \frac{\eta(r)}{r},$$

где в силу условия (4.16) и гладкости l

$$\eta(r) \equiv \frac{\rho}{\cos\alpha_0}\sin|\arg u'_s - \arg u| \to 0 \text{ при } r \to 0.$$

Но так как $|du| = ds \leqslant \frac{dr}{\cos\alpha_0}$, $|u - \zeta| \geqslant |r - R|$, где $|\zeta| = R = |v|$,

$$\text{то } |J(\zeta)| \leqslant \frac{1}{\cos\alpha_0}\int_0^{r_0} \frac{|\omega(r) - \omega(R)|}{r^\rho |r-R|}\,dr,$$

и для получения (4.15) остается применить лемму 6.

Приступим к доказательству теоремы 8. Полагая $\tau = \frac{1}{u}$, $z = \frac{1}{\zeta}$, перейдем к конечному контуру l, расположенному, как в лемме 7, и к функции

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \exp\int_l \frac{\varphi^*(u)\,du}{|u|^\rho (u-\zeta)},\ \text{где } \varphi^*(u) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right) \in H_l(\mu).$$

Очевидно, $\varphi^*(0) = \lambda$, где λ — коэффициент завихрения (см. (2.2)). Предполагая ζ малым, возьмем $v \in l$ так, что $|v| = |\zeta|$. Выбрав любое ε, $0 < \varepsilon < \mu$, запишем такое представление:

$$\ln f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \lambda e^{i\rho \arg v}\int_l \frac{du}{u^\rho (u-\zeta)} + \int_l \frac{[\varphi^*(u) - \lambda]\,u^{-\varepsilon} e^{i\rho \arg u}}{u^{\rho-\varepsilon}(u-\zeta)}\,du +$$

$$+ \lambda\int_l \frac{e^{i\rho \arg u} - e^{i\rho \arg v}}{u^\rho (u-\zeta)}\,du \equiv Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta) + Q_3(\zeta). \tag{4.17}$$

---

* При малых ζ точка v определяется однозначно.

Как известно [5, стр. 25, 30], $[\varphi^*(u) - \lambda]\, u^{-\varepsilon} e^{i\rho \arg u} \in H(\mu - \varepsilon)$. Но тогда [1, стр. 80]

$$Q_2(\zeta) = O(|\zeta|^{\varepsilon-\rho}) \quad (\zeta \to 0). \tag{4.18}$$

Далее, по лемме 7

$$Q_3(\zeta) = o(|\zeta|^{-\rho}). \tag{4.19}$$

Наконец [1, стр. 77]*,

$$Q_1(\zeta) = -\frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi}\zeta^{-\rho}e^{-i\rho\pi} + O(1) \quad (\zeta \to 0), \tag{4.20}$$

где ветвь ζ^ρ выбрана непрерывной в достаточно малой области $\Delta_a = (|z| \leqslant a) \setminus l$ под условием: $\arg\zeta = -\pi$ при $\zeta < 0$.

Из формул (4.18) — (4.20) при малых ζ имеем

$$\ln f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi}\zeta^{-\rho}e^{-i\rho\pi} + o(|\zeta|^{-\rho}), \tag{4.21}$$

где ветвь $\arg\zeta$ выбрана под тем же условием. Обозначим эту ветвь через α_1. Значение же $\arg\zeta$, взятое при условии $-2\pi < \arg\zeta < 0$, обозначим через α. Полагая $c = -\frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi}$, $\zeta = Re^{i\alpha}$, из (4.21) находим

$$R^\rho \ln\left|f\left(\frac{1}{Re^{i\alpha}}\right)\right| = c\cos\rho(\alpha_1 + \pi) + o(1).$$

Но легко проверить, что в силу гладкости l

$$\lim_{\zeta\to 0}[\cos\rho(\alpha_1 + \pi) - \cos\rho(\alpha + \pi)] = 0.$$

Тогда

$$R^\rho \ln\left|f\left(\frac{1}{Re^{i\alpha}}\right)\right| = c\cos\rho(\alpha + \pi) + o(1), \quad -2\pi \leqslant \alpha \leqslant 0,$$

и, возвращаясь к прежним переменным ($z = re^{i\theta}$), получим

$$\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} = c\cos\rho(\theta - \pi) + o(1), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

Тем самым теорема 8 доказана.

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 9. *Функция*

$$X(z) = \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau - z)}d\tau\right] \tag{4.22}$$

ограничена в области D и имеет порядок убывания ρ со следующим индикатором:

$$h_X(\theta) = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln|X(re^{i\theta})|}{r^\rho} = -\frac{\pi\lambda}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\theta - \pi), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{4.23}$$

где стремление к пределу равномерно по θ, т. е. для любого $\varepsilon > 0$

$$r^\rho[h_X(\theta) - \varepsilon] < \ln|X(re^{i\theta})| < r^\rho[h_X(\theta) + \varepsilon] \tag{4.24}$$

при $r > r_0(\varepsilon)$, и $r_0(\varepsilon)$ не зависит от θ.

---

* Напомним, что $u = 0$ есть конец l, а не его начало.

Доказательство. Представим $X(z)$ в следующем виде:

$$X_1(z)\,X_2(z) \equiv \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau - z)}\,d\tau\right]\exp\left[z\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,|\,\tau\,|^{\rho}}{\tau(\tau - z)}\,d\tau\right]. \tag{4.25}$$

Делая замену переменных $\tau = \frac{1}{u}$, $z = \frac{1}{\zeta}$, перейдем к конечному контуру l с концом $u = 0$*. Тогда в окрестности точки $\zeta = 0$ [1, стр. 73] имеем

$$\ln\left|X_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\int\limits_l \frac{s(u)}{u - \zeta}\,du = \frac{s(0)}{2\pi}\arg\zeta + O(1) = O(1), \tag{4.26}$$

где $s(u) = \ln\left|G\left(\frac{1}{u}\right)\right|$. Значит, $\frac{1}{K} < |X_1(z)| < K = \mathrm{const}$ при $z \to \infty$.

Тогда (4.23) вытекает из (4.25) и леммы 1. Но так как $0 < \rho < \frac{1}{2}$ и $\lambda > 0$, то

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} h_X(\theta) = -\lambda \operatorname{ctg}\rho\pi < 0. \tag{4.27}$$

Отсюда асимптотически

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |X(re^{i\theta})| < \exp\left(-\frac{\lambda}{2}r^{\rho}\operatorname{ctg}\rho\pi\right),$$

из чего с учетом 1° и 4° следует теорема 9, а в частности, и 5°.

Определение 5. *Функцию $X(z)$, подчиненную условиям 1°—5°, назовем канонической функцией краевой задачи Римана (2.5).*

Ниже мы докажем, что каноническая функция единственна.

§ 5. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 6. *Назовем классом $\tilde{B}_L$ класс функций, регулярных в D и ограниченных в любом круге $|z| \leqslant R$, а классом B_L — класс функций, регулярных и ограниченных в D. Очевидно, $B_L \subset \tilde{B}_L$.*

Решим сначала задачу (2.5) в классе $\tilde{B}_L$. Пусть $\Phi(z)$ — произвольное решение из этого класса. Тогда функция $F(z) = \Phi(z)\,[X(z)]^{-1}$, очевидно, регулярна в области D, на $\tilde{L}$ удовлетворяет условию $F^+(t) = F^-(t)$ и, кроме этого, как следует из (4.6),

$$F(z) = O(|z - t_0|^{-\alpha}),\quad z \to t_0 \quad (0 \leqslant \alpha < 1).$$

Но тогда [1, стр. 110] $F(z)$ регулярна в $|z| < \infty$, т. е. является целой функцией. Обратно, если $F(z)$ — любая целая функция, то функция вида

$$\Phi(z) = F(z)\,X(z) \tag{5.1}$$

есть решение задачи (2.5) в классе $\tilde{B}_L$. Итак, нами доказана

Теорема 10. *Общее решение задачи (2.5) в классе $\tilde{B}_L$ выражается формулой (5.1), где $X(z)$ — каноническая функция, а $F(z)$ — произвольная целая функция.*

Выясним, какие дополнительные условия нужно наложить на целую функцию $F(z)$, чтобы решение (5.1) принадлежало классу B_L.

Теорема 11. *Если $\Phi(z) \in B_L$, то порядок роста ρ_F соответствующей целой функции $F(z)$ не превосходит ρ.*

---

* В дальнейшем мы будем иногда переходить к конечному контуру, так как свойства интеграла типа Коши в большинстве литературных источников формулируются именно для такого контура.

В самом деле, допустив противное, найдем такую последовательность $\{z_n\} \to \infty$, что $\ln|F(z_n)| > |z_n|^{\frac{1}{2}(\rho+\rho_F)}$. Тогда в силу (4.11) $|\Phi(z_n)| = |X(z_n)F(z_n)| \to \infty$, что невозможно.

Теорема 12. *Для того чтобы решение $\Phi(z)$ класса $\tilde{B}_L$ принадлежало классу B_L, необходимо и достаточно, чтобы порядок ρ_F соответствующей целой функции $F(z)$ не превосходил ρ и на контуре L выполнялось асимптотическое неравенство*

$$\ln|F(t)| < -\operatorname{Re}\left[t\int_L \frac{\varphi(\tau)\,|\tau|^\rho}{\tau(\tau-t)}\,d\tau\right] + C_F, \quad C_F = \text{const}. \tag{5.2}$$

Необходимость. Пусть $\Phi(z) \in B_L$. Тогда

$$\ln|F(t)| = \ln|\Phi^\pm(t)| - \ln|X^\pm(t)| < C_\Phi - \ln|X^\pm(t)|. \tag{5.3}$$

Из (4.25) по формулам Сохоцкого получаем

$$\ln|X^\pm(t)| = \pm\frac{1}{2}\ln|G(t)| + \operatorname{Re}\left[t\int_L \frac{\varphi(\tau)\,|\tau|^\rho}{\tau(\tau-t)}\,d\tau\right] + \Gamma(t), \tag{5.4}$$

где

$$\Gamma(t) = \operatorname{Im}\left[\frac{t}{2\pi}\int_L \frac{\ln|G(\tau)|}{\tau(\tau-t)}\,d\tau\right].$$

Но так как $\ln|G(t)| \in H_L$, то согласно (4.26) $|\Gamma(t)| < \text{const}$. Поэтому из (5.3) и (5.4) следует (5.2).

Неравенство же $\rho_F \leqslant \rho$ доказано в теореме 11.

Достаточность. Пусть $\rho_F \leqslant \rho$ и выполнено условие (5.2). Тогда из (5.4) и (5.3) вытекает, что $|\Phi^\pm(t)| < \text{const}$. Далее, взяв любое ρ_1, $\rho < \rho_1 < \frac{1}{2}$, имеем асимптотическую оценку

$$\max_{|z|=r}|\Phi(z)| = \max_{|z|=r}|F(z)X(z)| < \exp(r^{\rho_1}). \tag{5.5}$$

Теперь остается применить взятый в одной из своих форм

Принцип Фрагмена—Линделефа. Если $\Phi(z)$ регулярна в D, непрерывна вплоть до $\tilde{L}$, ограничена вблизи $z = t_0$ и

$$|\Phi^\pm(t)| < M = \text{const}, \quad t \in \tilde{L},$$

$$M_\Phi(r) \equiv \max_{|z|=r}|\Phi(z)| \leqslant \exp(r^{\rho_1}) \text{ при } r > r_0, \tag{5.6}$$

причем $0 < \rho_1 < \frac{1}{2}$, то $\Phi(z) \in B_L$.

Доказательство. Обозначим через $s(r)$ длину сечения $s_r = D \cap (|z| = r)$. (В силу гладкости L это сечение при больших r состоит из одной дуги). Тогда, поскольку $s(r) = 2\pi r$, из условия (5.6) вытекает

$$\lim_{r\to\infty}[\ln M_\Phi(r)]\left\{\exp\left[\pi\int_1^r \frac{du}{s(u)}\right]\right\}^{-1} = 0. \tag{5.7}$$

Но отсюда следует [9, стр. 310], что $|\Phi(z)| < M$ для всех $z \in D$, что и требовалось доказать.

Теорема 13. *Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом*

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \tag{5.8}$$

в предположениях (2.1) — (2.3) *имеет в классе* B_L *бесчисленное множество решений, общая формула которых имеет вид*

$$\Phi(z) = F(z)\,X(z) \equiv cz^m \prod_{n=1}^{n_0}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau - z)}\,d\tau\right], \quad n_0 \leqslant \infty, \tag{5.9}$$

$$c = \text{const}, \quad 0 < |z_1| < |z_2| < \ldots, \quad z_n \to \infty,$$

где $F(z)$ — *целая функция, порядок* ρ_F *которой не превосходит* ρ, *или, что то же самое,* γ_F — *показатель сходимости последовательности ее нулей* z_n* — *не превосходит* ρ, *и, кроме того, справедлива асимптотическая оценка*

$$\ln|F(t)| < -\operatorname{Re}\left[t\int_L \frac{\varphi(\tau)\,|\tau|^\rho}{\tau(\tau - t)}\,d\tau\right] + \text{const}. \tag{5.10}$$

Доказательство теоремы 13 фактически проведено в теореме 12. Остается только заметить, что $\rho_F < 1$ и поэтому [4, гл. I] $F(z)$ представима в виде канонического произведения

$$F(z) = cz^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right), \quad n_0 \leqslant \infty,$$

где z_n — отличные от нуля корни $F(z)$, причем $\gamma_F = \rho_F$.

Следствие 1. *Задача* (5.8) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений класса* B_L.

Следствие 2. *Каноническая функция единственна.*

Следствие 2 вытекает из (5.9) и свойств 1°—5° (см. § 4).

Замечание. При практической проверке выполнения неравенства (5.10) полезна вытекающая из теоремы 8 асимптотическая оценка

$$\operatorname{Re}\left[t\int_L \frac{\varphi(\tau)\,|\tau|^\rho}{\tau(\tau - t)}\,d\tau\right] = -\pi\lambda|t|^\rho \operatorname{ctg}\rho\pi + o(t^\rho), \quad t \to \infty. \tag{5.11}$$

§ 6. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА УБЫВАНИЯ ρ

Теорема 14. *Общее решение задачи* (2.5) *в классе функций порядка убывания* ρ *со всюду отрицательным индикатором*

$$\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} h_\Phi(\theta) \leqslant h_\Phi < 0, \quad h_\Phi = \text{const}, \tag{6.1}$$

выражается формулой (5.9), где $F(z)$ — *целая функция такая, что*

1) *либо* $\rho_F < \rho$ (т. е. $\gamma_F < \rho$); (6.2)

2) *либо* $\rho_F = \rho\ (\gamma_F = \rho)$ и $h_F(o) < \pi\lambda \operatorname{ctg}\rho\pi$. (6.3)

При этом индикатор решения $\Phi(z)$ выражается формулой

$$h_\Phi(\theta) = \begin{cases} -\dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\theta - \pi), & \rho_F < \rho, \\ h_F(\theta) - \dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\theta - \pi), & \rho_F = \rho. \end{cases} \tag{6.4}$$

В доказательстве теоремы используется следующая лемма.

---

* Т. е. нижняя грань тех $\sigma > 0$, при которых ряд $\sum_1^\infty |z_n|^{-\sigma}$ расходится.

Лемма 8. Если функция $h(\theta)$ — *тригонометрически* ρ-*выпукла на отрезке* $[\theta_1, \theta_2]$, $|\theta_1 - \theta_2| < \frac{\pi}{\rho}$ и $h(\theta_1) < 0$, $h(\theta_2) < 0$, *то* $h(\theta) < 0$ *для любых* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Лемму легко получить из определения тригонометрически выпуклой функции [4, стр. 74].

Докажем теперь теорему 14. Пусть выполнено одно из условий (6.2) и (6.3). Положим

$$h_F^{(\rho)}(\theta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |F(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad h_\Phi^{(\rho)}(\theta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln |\Phi(re^{i\theta})|}{r^\rho}.$$

В силу теорем 10, 9 и определения 2 имеем

$$h_\Phi^{(\rho)}(\theta) = -\frac{\pi\lambda}{\sin \rho\pi} \cos \rho(\theta - \pi) + h_F^{(\rho)}(\theta); \quad h_F^{(\rho)}(\theta) \equiv 0 \text{ при } \rho_F < \rho. \tag{6.5}$$

Согласно (6.3) $h_F^{(\rho)}(\theta) < \infty$. Тогда [4, стр. 74] функция $h_F^{(\rho)}(\theta)$ ограничена и тригонометрически выпукла на отрезке $[0, 2\pi]$. Отсюда и $h_\Phi^{(\rho)}(\theta)$ тригонометрически выпукла на $[0, 2\pi]$, причем $h_\Phi^{(\rho)}(\theta) = h_\Phi^{(\rho)}(2\pi) < 0$. Поэтому, принимая во внимание лемму 8, найдем

$$-\infty < \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} h_\Phi^{(\rho)}(\theta) < 0.$$

Следовательно, на основании теоремы 4 $\Phi(z)$ имеет в D порядок убывания ρ, причем $h_\Phi(\theta) = h_\Phi^{(\rho)}(\theta) < 0$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Пусть теперь, обратно, $\Phi(z)$ имеет порядок убывания ρ и выполнено условие (6.1). Тогда по теореме 10 $\rho_F \leqslant \rho$, причем, если $\rho_F = \rho$, то, полагая в (6.5) $\theta = 0$, с учетом неравенства $h_\Phi(\theta) \leqslant 0$ получаем $h_F(0) < \pi\lambda \operatorname{ctg} \rho\pi$.

Что касается (6.4), то оно следует из (6.5). Теорема 14 доказана.

Замечание. Класс решений, полученных в теореме 14, является более узким, чем класс B_L. Вместе с тем он имеет более простую структуру, так как условие (6.3) для целой функции проверить легче, чем неравенство (5.10).

§ 7. ПОСТАНОВКА НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ И ПОДХОД К ЕЕ РЕШЕНИЮ

Названная задача имеет вид

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{7.1}$$

Однако теперь в качестве контура L мы возьмем луч прямой*. Не нарушая общности, будем считать $L = (1 \leqslant t \leqslant \infty)$. Задачу (7.1) рассмотрим при следующих предположениях:

1. $\arg G(t) = 2\pi\varphi(t)\, t^\rho, \quad 0 < \rho < \frac{1}{2}$, (7.2)

где

$$\varphi(t) \in H(\mu_0), \quad \varphi(\infty) = \lambda > 0, \tag{7.3}$$

$$-1 < \varphi(1) \leqslant 0, \tag{7.4}$$

причем

$$\rho < \mu_0 < 1. \tag{7.5}$$

---

* Можно было бы показать, что на гладком контуре рассматриваемая неоднородная задача разрешима не всегда, однако построение соответствующего примера является чрезвычайно сложным.

2. $\ln|G(t)| \in H(\mu)$, $g(t) \in H(\mu)$, $0 < \mu < \mu_0$*. (7.6)

3. $g(\infty) = 0$. (7.7)

4. Либо $G(1) = 1$ и $g(1) = 0$, либо $G(1) \neq 1$. (7.8)

Класс функций, аналитических и ограниченных в области D с границей $1 \leqslant t \leqslant \infty$, обозначим через B (частный случай класса B_L). Задачу (7.1) будем решать в классе B. Очевидно, достаточно найти одно частное решение $\Phi_0(z)$ неоднородной задачи, после чего общее решение запишется в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Psi(z), \tag{7.9}$$

где $\Psi(z)$ — общее решение в классе B соответствующей однородной задачи

$$\Psi^+(t) = G(t)\,\Psi^-(t). \tag{7.10}$$

Возьмем некоторое решение $\Psi_0(z) \in B$ задачи (7.10), не имеющее нулей на $\tilde{L}$. Тогда, применяя метод Ф. Д. Гахова [1, стр. 117], представим краевое условие (7.1) в такой форме:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Psi_0^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\Psi_0^-(t)} = \frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)}.$$

Отсюда находим предполагаемое частное решение:

$$\Phi_0(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i} \int\limits_1^\infty \frac{g(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)(x-z)}. \tag{7.11}$$

Остается выяснить, как выбрать $\Psi_0(z)$, чтобы полученный интеграл сходился и его произведение на $\Psi_0(z)$ было класса B. Заметим сразу же, что брать в качестве $\Psi_0(z)$ каноническую функцию $X(z)$, вообще говоря, нельзя, так как из (4.23) следует, что асимптотически

$$|X^+(t)| < \exp(-at^\rho) \quad (0 < a < \pi\lambda \operatorname{ctg} \rho\pi), \tag{7.12}$$

и если в (7.11) положить $\Psi_0(z) = X(z)$, то для сходимости интеграла пришлось бы наложить очень тяжелое ограничение на $g(t)$:

$$|g(t)| < \exp(-bt^\rho) \quad (b > 0) \quad \text{при } t > t_0. \tag{7.13}$$

Таким образом, $\Psi_0(z) \neq X(z)$. Тогда согласно теореме 13

$$\Psi_0(z) = X(z)\,F_0(z), \quad F_0(z) \not\equiv \text{const}, \tag{7.14}$$

т. е. задача свелась к нахождению соответствующей целой функции $F_0(z)$.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ $\Psi_0(z)$ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Фиксируем любое c, $1 < c < \infty$, и не будем изменять его до конца рассуждения. Будем искать $F_0(z)$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $\Psi_0(z) \in B$; 2) $|\Psi_0^+(t)|^{-1} < M_c = \text{const}$ при $c \leqslant t < \infty$; (8.1)

3) $\dfrac{g(t)}{\Psi_0^+(t)} \in H_{[c,\infty)}$; $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{g(t)}{\Psi_0^+(t)} = 0$. (8.2)

---

* Нам удобнее считать, что $\mu < \mu_0$. Как известно, если $f(t) \in H(\mu)$ и $0 < \nu < \mu$, то $f(t) \in H(\nu)$.

По теореме 11 порядок ρ_{F_0} функции $F_0(z)$ не превосходит ρ. Но легко видеть, что $\rho_{F_0}=\rho$, так как иначе в силу теоремы 14 $\Psi_0^+(t)$ удовлетворяло бы неравенству вида (7.12), и мы снова пришли бы к необходимости наложения ограничения (7.13). Но если $\rho_{F_0}=\rho$, то по теореме 14 индикатор функции $\Psi_0(z)$ представим в форме

$$h_{\Psi_0}(\theta) = -\frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi}\cos\rho\,(\theta-\pi) + h_{F_0}(\theta), \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \tag{8.3}$$

Но так как $\Psi_0(z)$ должна удовлетворять условиям (8.1), то необходимо $h_{\Psi_0}(0)=0$, т. е.

$$h_{F_0}(0) = \pi\lambda\operatorname{ctg}\rho\pi. \tag{8.4}$$

Далее, из (8.1) вытекает, что $h_{\Psi_0}(\theta)\leqslant 0$, и, значит,

$$h_{F_0}(\theta) \leqslant \frac{\pi\lambda}{\sin\rho\pi}\cos\rho\,(\theta-\pi) \equiv -h_X(\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \tag{8.5}$$

Функций, подчиненных условиям (8.4) и (8.5), бесконечно много. Наиболее простыми из них являются те, нули которых лежат на одном луче. Мы выберем луч $\arg z=\pi$ (на луче $\arg z=0$ в силу (8.1) нулей быть не должно). Будем искать $F_0(z)$ в такой форме:

$$F_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n}\right), \quad 0<r_1<r_2<\ldots, \tag{8.6}$$

где r_n подлежат определению. Пусть $n(r)$ (считающая функция нулей) означает число нулей $z_n=-r_n$ функции $F_0(z)$ в круге $|z|\leqslant r$. Потребуем, чтобы существовал предел (называемый плотностью нулей)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^\rho} = \Delta, \quad 0<\Delta<\infty. \tag{8.7}$$

Эту плотность предстоит определить. Замечая, что $n(0)=0$ и учитывая следующее тождество [11, стр. 166]

$$z\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1-\rho}(x-z)} = -\frac{\pi z^\rho}{\sin\pi\rho}e^{-i\rho\pi} \quad (0<\arg z<2\pi), \tag{8.8}$$

с использованием интеграла Стилтьеса при $t>0$, найдем

$$\ln F_0(t) = \int_0^\infty \ln\left(1+\frac{x}{t}\right)dn(x) = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho}t^\rho + t\int_0^\infty \frac{n(x)-\Delta x^\rho}{x(x+t)}dx. \tag{8.9}$$

Далее нам потребуется следующая

Лемма 9. *В промежутке* $[c,\infty)$ *справедливо представление*

$$\ln X(t) = i(\gamma\ln t + \lambda\pi t^\rho) - (\lambda\pi\operatorname{ctg}\rho\pi)\cdot t^\rho + q(t), \tag{8.10}$$

где $q(t)\in H_{[c,\infty)}(\sigma)$, $\sigma=\min(\mu_0-\rho,\ \mu)$, а γ — *некоторая вещественная постоянная.*

Доказательство. Совершив замену переменных $x=\frac{1}{u}$, $t=\frac{1}{v}$, обозначив $\varphi_*(u)=\varphi\left(\frac{1}{u}\right)$, $\psi(u)=\ln\left|G\left(\frac{1}{u}\right)\right|$ и применив формулы Сохоцкого, при $0<v<1$ имеем

$$\ln X^+\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_1^0\frac{\psi(u)}{u-v}\,du+\int_1^0\frac{\varphi_*(u)-\lambda}{u^\rho(u-v)}\,du+$$

$$+\lambda\int_1^0\frac{du}{u^\rho(u-v)}+\frac{\psi(v)}{2}+\frac{\pi i}{v^\rho}\left[\varphi_*(v)-\lambda\right]+\frac{\pi i\lambda}{v^\rho}, \tag{8.11}$$

где согласно (7.3) и (7.6)

$$\psi(u)\in H_{[0,1]}(\mu),\quad \varphi_*(u)\in H_{[0,1]}(\mu_0),\quad \varphi_*(0)=\lambda.$$

(λ — коэффициент завихрения). Далее, учитывая свойства особого интеграла вблизи точек разрыва плотности [5, стр. 91], найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_1^0\frac{\psi(u)}{u-v}\,du=\frac{\psi(0)}{2\pi i}\ln v+\psi_0(v),\quad \psi_0\in H. \tag{8.12}$$

По условию (7.5) $\mu_0>\rho$, поэтому [5, стр. 26]

$$\left[\varphi_*(u)-\lambda\right]u^{-\rho}\in H(\mu_0-\rho),\quad \lim_{u\to 0}\left[\varphi_*(u)-\lambda\right]u^{-\rho}=0.$$

Следовательно [1, стр. 56],

$$\int_1^0\frac{\varphi_*(u)-\lambda}{u^\rho(u-v)}\,du\in H(\mu_0-\rho). \tag{8.13}$$

Наконец [1, стр. 77],

$$\int_1^0\frac{du}{u^\rho(u-v)}=-\frac{\pi}{v^\rho}\operatorname{ctg}\rho\pi+\Omega(v),\quad \Omega\in H. \tag{8.14}$$

Из (8.11) — (8.14) окончательно получаем

$$\ln X^+\left(\frac{1}{v}\right)=i\left[\frac{\psi(0)}{2\pi}\ln v+\frac{\pi\lambda}{v^\rho}\right]-\frac{\pi\lambda}{v^\rho}\operatorname{ctg}\rho\pi+Q(v),$$

где $Q(v)\in H$. Для завершения доказательства остается вернуться к прежним переменным x и t.

Сопоставляя теперь равенства (8.9) и (8.10), мы видим, что для выполнения условия $h_{\Psi_0}(0)=0$ необходимо положить $\Delta=\lambda\cos\rho\pi$. Тогда

$$\ln\Psi_0^+(t)=i(\eta\ln t+\lambda\pi t^\rho)+q(t)+t\int_0^\infty\frac{n(x)-\Delta x^\rho}{x(x+t)}\,dx. \tag{8.15}$$

Нужно выбрать затем $n(x)$ столь «близко» к Δx^ρ, что

$$I(t)\equiv t\int_0^\infty\frac{n(x)-\Delta x^\rho}{x(x+t)}\,dx\in H_{[c,\infty)}. \tag{8.16}$$

Делая замену $u=\Delta x^{\rho}$, $s=t\Delta^{1/\rho}$ и полагая $\tilde{n}(u)=n(\Delta^{-1/\rho}u^{1/\rho})$, имеем

$$I(t)=\frac{s}{\rho}\int_0^{\infty}\frac{\tilde{n}(u)-u}{u(u^{1/\rho}+s)}\,du\equiv\frac{1}{\rho}I_0(s). \tag{8.17}$$

Выберем ступенчатую функцию $\tilde{n}(u)$ таким образом:

$$\tilde{n}(u)=\left[u+\frac{1}{2}\right], \tag{8.18}$$

что равносильно каждому из равенств

$$n(x)=\left[\Delta x^{\rho}+\frac{1}{2}\right] \text{ или } r_n=\left(\frac{2n-1}{2\lambda\cos\rho\pi}\right)^{1/\rho} \ (n=1,2,\ldots). \tag{8.19}$$

Тем самым построение функции $F_0(z)$, а значит, и $\Psi_0(z)$ закончено.

§ 9. СВОЙСТВА ПОСТРОЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Проверим, что функция $\Psi_0(z)$ является требуемой.

Теорема 15. *Решение однородной задачи* (7.10), *имеющее вид*

$$\Psi_0(z)=\mathrm{X}(z)F_0(z), \tag{9.1}$$

где

$$F_0(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{r_n}\right),\quad r_n=\left(\frac{2n-1}{2\lambda\cos\rho\pi}\right)^{1/\rho}, \tag{9.2}$$

и решение неоднородной задачи (7.1)

$$\Phi_0(z)=\frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int_1^{\infty}\frac{g(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)(x-z)} \tag{9.3}$$

принадлежат классу B.

Предварительно установим следующие леммы.

Лемма 10. *Если функция $f(t)$ имеет в промежутке $[c,\infty)$ непрерывную производную, удовлетворяющую условию*

$$|f'(t)|<At^{-1-\rho},\ 0<\rho\leqslant 1,\ A=\mathrm{const},$$

то $f(t)\in H_{[c,\infty)}(\rho)$.

Лемма вытекает из следующих оценок:

$$|f(t_1)-f(t_2)|=\left|\int_{t_1}^{t_2}f'(t)\,dt\right|\leqslant\frac{A}{\rho}\left|\frac{1}{t_1^{\rho}}-\frac{1}{t_2^{\rho}}\right|\leqslant\frac{A}{\rho}\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right|^{\rho}.$$

Лемма 11. *Если*: 1) *вещественная функция $f(x)$, заданная на $[c,\infty)$, интегрируема в любом конечном промежутке $[c,t]$, причем*

$$\left|\int_c^t f(x)\,dx\right|<K=\mathrm{const};$$

2) *вещественная функция $\varphi(x)$ в промежутке $[c,\infty)$ непрерывна и имеет не более n экстремумов, причем $\varphi(\infty)=0$, то при любом t, $c\leqslant t\leqslant\infty$, справедливо неравенство*

$$\left|\int_c^t f(x)\varphi(x)\,dx\right|<K(2n+3)\max_{c\leqslant x\leqslant\infty}|\varphi(x)|.$$

Доказательство. Взяв любое b, $c < b \leqslant \infty$, найдем $n+2$ точки $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, где $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$, таких, что $\varphi(x)$ монотонна в каждом из промежутков $[x_k, x_{k+1}]$. Применяя тогда вторую теорему о среднем значении [12, стр. 135], получим

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k)\int_{x_k}^{\xi_k} f(x)\,dx + \varphi(x_{k+1})\int_{\xi_k}^{x_k} f(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant (2n+3)K \max_{c\leqslant x\leqslant\infty} |\varphi(x)|.$$

Сходимость интеграла при $b = \infty$ вытекает из монотонного стремления к нулю функции $\varphi(x)$ на отрезке $[x_{n+1}, \infty)$ при $x \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если* $\Delta = \lambda\cos\rho\pi$ и $n(x) = \left[\Delta x^\rho + \frac{1}{2}\right]$, то

$$I(t) \equiv t\int_0^\infty [n(x) - \Delta x^\rho]\frac{dx}{x(x+t)} \in H_{[c,\infty)}(\rho).$$

Принимая во внимание (8.17), нам достаточно доказать, что $I_0(s) \in H(\rho)$. Имеем

$$I_0'(s) = \int_0^\infty [\tilde{n}(u) - u]\frac{u^{(1/\rho)-1}}{(u^{1/\rho}+s)^2}\,du, \quad \tilde{n}(u) = \left[u + \frac{1}{2}\right].$$

Фиксируя $s > 0$, положим

$$f(u) = \tilde{n}(u) - u, \quad \varphi(u) = u^{1/\rho-1}(u^{1/\rho}+s)^{-2}.$$

Функция $\varphi(u)$ имеет в промежутке $0 < u < \infty$ единственный экстремум, являющийся максимумом; оценим последний:

$$\max_{0\leqslant u\leqslant\infty} \varphi(u) = \varphi\left(s^\rho\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^\rho\right) = \frac{1}{4s^{1+\rho}}(1-\rho)^{1-\rho}(1+\rho)^{1+\rho} < \frac{1}{2s^{1+\rho}}.$$

Далее замечаем, что при $t > 0$ будет

$$\left|\int_0^t f(u)\,du\right| \leqslant \frac{1}{8}.$$

Кроме того, $\varphi(\infty) = 0$. Тогда по лемме 11

$$|I_0'(s)| \leqslant \frac{5}{16}s^{-1-\rho},$$

откуда по лемме 10 $I_0(s) \in H_{[c,\infty)}(\rho)$. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Если* $f(t) \in H_{[c,\infty)}(\mu)$, $f(\infty) = 0$ и σ — *вещественное число, то*

$$\psi_1(t) \equiv f(t)e^{i\sigma\ln t} \in H_{[c,\infty)}(\mu); \quad \psi_2(t) \equiv f(t)e^{i\sigma t^\rho} \in H_{[c,\infty)}\left(\frac{\mu}{\rho+1}\right).$$

Доказательство. Соотношение $\psi_1(t) \in H(\mu)$ доказывается простой ссылкой на известную теорему [5, стр. 28], если, заменяя $t = \frac{1}{u}$, перейти к конечному промежутку $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{c}$ и учесть, что

$$\left|e^{i\sigma\ln\frac{1}{u}}\right| \equiv 1, \quad \left|\frac{d}{du}e^{i\sigma\ln\frac{1}{u}}\right| = \frac{|\sigma|}{u}, \quad f\left(\frac{1}{u}\right) \in H(\mu), \quad f(\infty) = 0.$$

Докажем теперь соотношение

$$\psi_2(t) \in H\left(\frac{\mu}{\rho+1}\right). \tag{9.4}$$

По условию леммы при $t_1,\ t_2 \geqslant c$ будет

$$|f(t_1)-f(t_2)| < A\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right|^{\mu}, \quad A=\mathrm{const},$$

и так как $f(\infty)=0$, то $|f(t)| < At^{-\mu} < A$. Пусть сначала

$$0 < h < t^{1-\rho} \quad (t \geqslant c) \tag{9.5}$$

Тогда, с использованием теоремы Лагранжа, найдем $|t<\xi<t+h|$*:

$$|\psi_2(t+h)-\psi_2(t)| \leqslant |f(t+h)-f(t)| + |f(t)|\left|e^{i\sigma(t+h)^{\rho}}-e^{i\sigma t^{\rho}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant A\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\mu} + A\sigma\rho h\,\frac{\xi^{\rho-1}}{t^{\mu}} < A\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\mu} + \frac{A\sigma\rho h}{t^{\mu+1-\rho}}. \tag{9.6}$$

Положим $\nu=\frac{\mu}{\rho+1}$. Учитывая очевидное равенство $(1-\nu)(1-\rho)=1-\rho-2\nu+\mu$ и то, что $h<t^{1-\rho}<t$, поскольку $t \geqslant c > 1$, получим

$$\frac{h}{t^{\mu+1-\rho}} = \left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\nu}\frac{h^{1-\nu}(t+h)^{\nu}}{t^{\mu+1-\rho-\nu}} < 2^{\nu}\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\nu}. \tag{9.7}$$

Далее

$$\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\mu} < \left|\frac{1}{t+h}+\frac{1}{t}\right|^{\mu-\nu}\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\nu} < 2^{\mu-\nu}\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\nu}. \tag{9.8}$$

Из (9.6)—(9.8) следует, что при выполнении условия (9.5)

$$|\psi_2(t+h)-\psi_2(t)| < A(2^{\mu-\nu}+\sigma\rho\, 2^{\nu})\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\nu}. \tag{9.9}$$

Пусть теперь $h \geqslant t^{1-\rho}\ (t \geqslant c)$. Тогда на основании того, что $|f(t)| < At^{-\mu}$ *и* $\mu-\nu=\rho\nu$, *найдем*

$$|\psi_2(t+h)-\psi_2(t)| < \frac{2A}{t^{\mu}} = 2A\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\nu} t^{\nu-\mu}\left(1+\frac{t}{h}\right)^{\nu} <$$
$$< 2A\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\nu}(1+t^{\rho})^{\nu}t^{\nu-\mu} < 2^{1+\nu}A\left|\frac{1}{t+h}-\frac{1}{t}\right|^{\nu}. \tag{9.10}$$

Из (9.9) и (9.10) вытекает (9.4). Лемма 13 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 15. Из (8.15) и леммы 6 следует

$$|\Psi_0^{+}(t)| < N_c = \mathrm{const} \quad (c \leqslant t < \infty). \tag{9.11}$$

Далее, из условия (2.6) вытекает

$$|\Psi_0^{-}(t)| = |\Psi_0^{+}(t)|\,|G(t)|^{-1} < KN_c \quad (c \leqslant t < \infty). \tag{9.12}$$

Но так как $X(z) \in B$, то из (9.1) следует, что $|\Psi_0^{\pm}(t)| < M_c$ $(1 \leqslant t \leqslant c)$, т. е.

$$|\Psi_0^{\pm}(t)| < \mathrm{const} \quad (1 \leqslant t \leqslant \infty). \tag{9.13}$$

* Ниже применяется неравенство $|e^{i\alpha}-e^{i\beta}| \leqslant |\alpha-\beta|$ для вещественных α и β.

Поскольку $\rho_{F_0}=\rho$, порядок роста функции $\Psi_0(z)$ не больше ρ. Тогда, исходя из (9.13), по принципу Фрагмена — Линделефа имеем $\Psi_0(z)\in B$. Первая часть теоремы доказана.

Теперь, используя (8.15) и лемму 12, получим такое представление:

$$[\Psi_0^+(t)]^{-1}=Q(t)\exp[-i(\eta\ln t+\lambda\pi t^{\rho})],\quad c\leqslant t<\infty, \tag{9.14}$$

где $Q(t)\in H_{[c,\infty)}$. Но так как $g(t)\in H$, $g(\infty)=0$, то по лемме 7

$$\frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)}\in H_{[c,\infty)},\quad \lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)}=0. \tag{9.15}$$

Отметим, что мы установили все свойства (8.1) и (8.2).

Запишем равенство (9.3) в такой форме:

$$\Phi_0(z)=\frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\left[\int_1^c\frac{g(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)(x-z)}+\int_c^\infty\frac{g(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)(x-z)}\right]. \tag{9.16}$$

Из (9.15) следует, что второй интеграл ограничен в любой области $|z-c|>\varepsilon>0$. Первый же, как известно [1, стр. 20], допускает оценку

$$\int_1^c\frac{g(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)(x-z)}=O\left(\frac{1}{|z|}\right)\quad (z\to\infty)$$

и ограничен в любой области вида $(|z-1|>\varepsilon)\cap(|z-c|>\varepsilon)$. Но так как $\Psi_0(z)\in B$ и c можно брать как угодно близким к единице, то $\Phi_0(z)$ ограничена в любой области $|z-1|>\varepsilon>0$.

Осталось исследовать поведение $\Phi_0(z)$ в окрестности левого конца контура $t=1$. Используя то, что $F_0(z)\neq 0$ вблизи $z=1$, представим $\ln\Psi_0(z)$ в достаточно малой области $D\cap(|z-1|<c)$ в таком виде:

$$\ln\Psi_0(z)=-\frac{\ln G(1)}{2\pi i}\ln(z-1)+\frac{1}{2\pi i}\int_1^c\frac{\ln G(x)-\ln G(1)}{x-z}\,dx+f_0(z), \tag{9.17}$$

где $f_0(z)$ регулярна в круге $|z-1|<c$. Обозначим

$$-\frac{\ln G(1)}{2\pi i}=-\frac{\arg G(1)}{2\pi}+i\frac{\ln|G(1)|}{2\pi}=\alpha+\beta i,$$

где в силу (7.4) $0\leqslant\alpha<1$. Тогда, учитывая свойства предельных значений интеграла типа Коши [1, стр. 56], имеем

$$\ln\Psi_0^+(t)=(\alpha+\beta i)\ln(t-1)+p(t),\quad 1\leqslant t\leqslant 1+\delta, \tag{9.18}$$

где δ взято достаточно малым, а $p(t)\in H_{[1,1+\delta]}$. Отсюда получаем представление

$$\frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)}=\frac{\psi(t)}{(t-1)^{\alpha+i\beta}},\quad 1\leqslant t\leqslant 1+\delta,\quad 0\leqslant\alpha<1, \tag{9.19}$$

в котором $\psi(t)\in H$, причем согласно (7.8) $\psi(1)=0$, если $\alpha+i\beta=0$. Отсюда [5, стр. 91] при малых $|z-1|$ имеем

$$\int_1^\infty\frac{g(x)\,dx}{\Psi_0^+(x)(x-z)}=\int_1^{1+\delta}+\int_{1+\delta}^\infty=\frac{M_1}{(z-1)^{\alpha+i\beta}}+\varphi_0(z),\quad M_1=\mathrm{const}, \tag{9.20}$$

при этом $M_1 = 0$, если $\alpha + i\beta = 0$, а

$$|\varphi_0(z)| < \begin{cases} N_1 = \text{const} \text{ при } \alpha = 0, \\ \dfrac{N_2}{|z-1|^{\alpha_0}}, \quad 0 \leqslant \alpha_0 < \alpha \text{ при } \alpha > 0. \end{cases} \tag{9.21}$$

Но тогда из (9.17) и (9.20) следует, что и в окрестности точки $z = 1$ функция $\Phi_0(z)$ ограничена.

§ 10. ФОРМУЛА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 16. *Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$$

в предположениях (7.2)—(7.8) *имеет в классе В бесконечное множество решений, общая формула которых имеет вид*

$$\Phi(z) = X(z)\left[\frac{F_0(z)}{2\pi i}\int_1^\infty \frac{g(x)\,dx}{X^+(x)F_0(x)(x-z)} + F(z)\right], \tag{10.1}$$

где

$$F_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{r_n}\right), \quad r_n = \left(\frac{2n-1}{2\lambda\cos\rho\pi}\right)^{1/\rho},$$

а $F(z)$ — *целая функция порядка не выше* ρ, *для которой справедлива асимптотическая оценка*

$$\ln|F(t)| < \pi\lambda\operatorname{ctg}\rho\pi\cdot t^\rho + \text{const} \quad (t \to +\infty). \tag{10.2}$$

Доказательство. Само равенство (10.1) сразу же вытекает из формул (7.9), (7.11), (9.1) и (5.9). Что касается неравенства (10.2), то оно в предположениях (7.2)—(7.8) равносильно неравенству (5.10), так как если $\varphi(t) \in H_L(\mu_0)$ и $\mu_0 > \rho$, то на $[c, \infty)$ справедливо представление

$$t\int_1^\infty \frac{\varphi(x)\,dx}{x^{1-\rho}(x-t)} = -\lambda\pi\operatorname{ctg}\rho\pi\cdot t^\rho + p(t), \qquad p(t) \in H_{[c,\infty)}. \tag{10.3}$$

Это равенство устанавливается тем же методом, что и в доказательстве леммы 9.

Замечание. В противоположность однородной задаче неоднородная задача (7.1), вообще говоря, не имеет решений положительного порядка убывания. Это следует из неравенств

$$|g(t)| \leqslant |G(t)||\Phi^-(t)| + |\Phi^+(t)|, \quad |G(t)| < \text{const},$$

в силу которых функции $\Phi^\pm(t)$ не могут одновременно убывать быстрее, чем $g(t)$.

Более сложный случай краевой задачи Римана с бесконечным индексом, когда порядок завихрения $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, также рассмотрен автором. Полученные результаты опубликованы в работах [14], [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
2. Ф. Д. Гахов. О краевой задаче Римана. Матем. сб., 2(44), № 4, 1937.
3. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения. Докт. дисс., Тбилиси, 1941.
4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.
5. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
6. Н. И. Мусхелишвили. Приложение интеграла типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений. Труды Тбилисск. матем. ин-та, АН Груз. ССР, т. 10, 1941.
7. Б. В. Хведелидзе. О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области. Сообщ. АН Груз. ССР, т. II, № 7, 10, 1941.
8. М. А. Евграфов Асимптотические оценки и целые функции. Физматгиз, 1962.
9. М. А. Евграфов. Аналитические функции. «Наука», 1965.
10. Е. Титчмарш. Теория функций. Гостехиздат, 1951.
11. Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. I. Физматгиз, 1963.
12. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. Гостехиздат, 1948.
13. Н. В. Говоров. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом. ДАН СССР, т. 154, № 6, 1247—1249, (1964).
14. Н. В. Говоров. Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом. ДАН СССР, т. 159, № 5, 961—964, (1964).
15. Н. В. Говоров. Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом. Материалы 4-й науч. конф. аспир. Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1962.
16. Н. В. Говоров. Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом. Изд-во АН БССР, № 1, 1964.
17. Н. В. Говоров. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. Тезисы докладов VII Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного. Ростов-на-Дону, 1964.
18. Н. В. Говоров. Об оценке снизу функции, субгармонической в круге. См. статью в настоящем сборнике.

Поступила 20 мая 1967 г.