ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ ФУНКЦИИ, СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ В КРУГЕ

Н. В. Говоров

Вопросу об оценке снизу субгармонической функции в полуплоскости посвящены работы Альфорса и Гейнса [4] и Хеймана [3]. Эти оценки носят асимптотический характер (при $z \to \infty$). Результат Альфорса и Гейнса заключается в следующем.

Если функция $u(z)$ субгармонична в $\operatorname{Im} z > 0$, имеет первый порядок и нормальный тип и ограничена сверху на вещественной оси, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечный предел

$$\lim_{r \to \infty,\ r \bar{\in} E} \frac{u(re^{i\theta})}{r} = a, \quad \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon, \tag{*}$$

где стремление равномерно по θ, а

$$\int_E \frac{dr}{r} < \infty.$$

Хейман [3] показал, что это утверждение справедливо и при $\varepsilon = 0$. И. В. Ушакова [5] усилила теорему Альфорса и Гейнса, доказав, что стремление в (*) равномерно по θ, когда $z = re^{i\theta} \to \infty$, не принимая значений из некоторого множества кружков $|z - z_n| \leqslant \rho_n$, подчиненных условию $\sum\limits_n \rho_n |z_n|^{-1} < \infty$. В. С. Азарин [6] распространил результат И. В. Ушаковой на случай $\varepsilon = 0$. При этом обобщение соответствующих теорем им было дано сразу же на случай субгармонической функции в n-мерном пространстве.

И. В. Ушаковой [5] был получен также ряд асимптотических оценок (при $|z| \to 1$) функций, субгармонических в круге $|z| < 1$.

Валироном и В. Бернштейном [10, стр. 73; 2, стр. 33] была установлена оценка снизу в круге $|z| \leqslant \frac{1}{2e}$ для модуля функции, аналитической в $|z| \leqslant 1$ (см. ниже теорему 3).

В настоящей работе доказаны некоторые новые оценки снизу в п р о и з в о л ь н о м круге $|z| \leqslant r$, $r \leqslant 1$, для функции, субгармонической и ограниченной сверху в $|z| < 1$. Эти оценки не вытекают из ранее имевшихся, а результат Валирона — Бернштейна с их помощью может быть даже улучшен (см. ниже теорему 4).

Определение субгармонической функции берется нами в том же смысле, что и в [1, стр. 35].

Теорема 1. *Пусть функция* $u(z)$ — *субгармонична в круге* $|z| < 1$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

$$\sup_{|z| \leqslant 1} u(z) = M, \quad 0 < M < \infty, \tag{1}$$

$$u(0) \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть вещественные числа r и N таковы, что

$$0 < r < 1 - \frac{1}{N}, \quad N > 1. \tag{3}$$

Тогда найдется не более чем счетное множество кружков $|z - z_n| \leqslant \rho_n$, таких, что

$$\sum_n \rho_n \leqslant r^N (1 - r), \tag{4}$$

и вне которых в круге $|z| \leqslant r$ выполняется оценка

$$u(z) \geqslant -5MN. \tag{5}$$

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Для любых комплексных ζ и z таких, что $|\zeta| < 1$, $|z| < 1$, справедливо неравенство*

$$\frac{1 - |z|^2}{|1 - \zeta z|^2} \ln \frac{1}{|\zeta|} - \frac{1}{|\zeta|^2} \ln \left| \frac{1 - \bar{\zeta} z}{\zeta - z} \right| < 0. \tag{6}$$

Доказательство. В силу того, что

$$|\zeta|^2 \ln \frac{1}{|\zeta|} < |\zeta|^2 \left(\frac{1}{|\zeta|} - 1 \right) = \left(1 - \frac{1}{1 + |\zeta|} \right) (1 - |\zeta|^2) < \frac{1}{2} (1 - |\zeta|^2),$$

для установления леммы достаточно доказать, что

$$2 \ln \left| \frac{1 - \bar{\zeta} z}{\zeta - z} \right| > \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - \bar{\zeta} z|^2}.$$

Но, учитывая, что $|\zeta - z| \leqslant |1 - \bar{\zeta} z|$, найдем

$$2 \ln \left| \frac{1 - \bar{\zeta} z}{\zeta - z} \right| = -2 \ln \left[1 - \left(- 1 \frac{|\zeta - z|}{|1 - \bar{\zeta} z|} \right) \right] > 2 \left(1 - \frac{|\zeta - z|}{|1 - \bar{\zeta} z|} \right) =$$

$$= \frac{2 (|1 - \bar{\zeta} z|^2 - |\zeta - z|^2)}{|1 - \bar{\zeta} z| (|1 - \bar{\zeta} z| + |\zeta - z|)} > \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - \bar{\zeta} z|^2}, \tag{7}$$

что и требовалось доказать.

Введем теперь в рассмотрение следующую функцию двух комплексных переменных z и ζ:

$$K(\zeta, z) = \begin{cases} \dfrac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} & \text{при } |\zeta| = 1, \ |z| < 1, \\ -\dfrac{1}{\ln |\zeta|} \ln \left| \dfrac{1 - \bar{\zeta} z}{\zeta - z} \right| & \text{при } 0 < |\zeta| < 1, \ |z| < 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{8}$$

Легко проверить, что при $|z| < 1$ эта функция непрерывна по ζ в $|\zeta| \leqslant 1$ для $\zeta \neq z$. Имеет место

Лемма 2. *Пусть $|\zeta| \leqslant 1$, $0 < |z_0| < 1$, $0 < \rho < |z_0| + 1$, где z_0 фиксировано. Тогда максимум*

$$M_\rho(z_0) = \max_{\zeta \in \lambda} K(\zeta, z_0), \quad \lambda = (|\zeta - z_0| = \rho) \cap (|\zeta| \leqslant 1),$$

достигается в точке $\zeta_0 \in \lambda$, ближайшей к окружности $|\zeta| = 1$. (При $\rho > 1 - |z_0|$ *обе такие точки лежат на* $|\zeta| = 1$).

Доказательство. Не нарушая общности, примем z_0 положительным: $z_0 = r_0 > 0$. Пусть

$$\zeta = r_0 + \rho e^{i\alpha}, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < 2\pi.$$

Положим

$$\varphi(\alpha) = K(r_0 + \rho e^{i\alpha}, \ r_0).$$

Будем считать $|\zeta| < 1$. Замечая, что $\zeta'_\alpha = i(\zeta - r_0)$, найдем

$$\varphi'(\alpha) = \frac{1}{\ln^2|\zeta|} \ln\left|\frac{1-\zeta r_0}{\zeta - r_0}\right| \cdot \operatorname{Re}\frac{\zeta'_\alpha}{\zeta} + \frac{1}{\ln|\zeta|} \operatorname{Re}\frac{\zeta'_\alpha}{1-\zeta r_0} =$$

$$= \frac{r_0\rho \sin\alpha}{\ln^2|\zeta|}\left(\frac{1-r_0^2}{|1-\zeta r_0|^2}\ln\frac{1}{|\zeta|} - \frac{1}{|\zeta|^2}\ln\left|\frac{1-\bar{\zeta} r_0}{\zeta - r_0}\right|\right). \tag{9}$$

Выражение в последних скобках в силу леммы 1 является отрицательным. Но тогда, проследив за изменением $\sin\alpha$ и учитывая непрерывность $K(\zeta, z)$ вплоть до $|\zeta| = 1$, получаем то, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть* $|z| = r < 1$, z *— фиксировано и*

$$\lambda(x) = (|\zeta - z| = x) \cap (|\zeta| \leqslant 1).$$

Тогда функция

$$S(x) = \max_{\zeta \in \lambda} K(\zeta, z) \tag{10}$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant |z| + 1$ *является невозрастающей.*

Доказательство. Убывание $S(x)$ на отрезке $1 - r \leqslant x \leqslant 1 + r$ следует из леммы 2 и первой из формул (8). Пусть теперь $0 \leqslant x < 1 - r$. Согласно лемме 2 и формуле (8)

$$S(x) = K(r + x, r) = \frac{1}{\ln(x+r)} \ln\frac{x}{1 - r^2 - xr}.$$

Отсюда

$$S'(x) = \frac{1}{(x+r)\ln^2(x+r)}\left[\ln\frac{1 - r(r+x)}{x} - \frac{(x+r)(1-r^2)}{x(1-r^2-xr)}\ln\frac{1}{x+r}\right].$$

Обозначим выражение в фигурных скобках через $g(x)$. Поскольку $g(1-r) = 0$, то для установления необходимого нам неравенства $S'(x) < 0$ достаточно показать, что $g'(x) > 0$ при $0 < x < 1 - r$. Но последнее очевидно из соотношения

$$g'(x) = \frac{r(1-r^2)[1-(x+r)^2]}{x^2(1-xr-r^2)^2} \ln\frac{1}{x+r}.$$

Тем самым лемма доказана.

Лемма 4. *Если* $x\,(0 < x < 1)$ *— фиксированное число, то функция*

$$s(r) = -\frac{1}{\ln(r+x)} \ln\frac{1 - r(r+x)}{x}$$

на отрезке $0 \leqslant r \leqslant 1 - x$ *является возрастающей.*

Доказательство. Вычислим производную данной функции:

$$s'(r) = \frac{g(r)}{(r+x)\ln^2(r+x)},$$

где положено

$$g(r) = \ln\frac{1 - r(r+x)}{x} + \frac{(2r+x)(r+x)}{1 - r(r+x)} \ln(r+x).$$

Но $g(r) \geqslant 0$ при $0 \leqslant r \leqslant 1 - x$, так как

$$g'(r) = \frac{(4r + 3x)[1 - r(r + x)] + (2r + x)^2 (r + x)}{[1 - r(r + x)]^2} \ln(r + x) \leqslant 0$$

и $g(1 - x) = 0$. Поэтому $s'(r) > 0$, т. е. лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть на отрезке* $0 \leqslant x \leqslant a$ *функция* $\mu(x) > 0$ *монотонно возрастает, а* $\varphi(x)$ — *монотонно убывает и абсолютно непрерывна на всяком отрезке* $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant a$. *Пусть, далее, функция* $x\varphi'(x)$ *на* $[0, a]$ *интегрируема и выполнены такие условия:*

$$\lim_{x \to 0} x\varphi(x) = 0, \tag{11}$$

$$\varphi(x) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \mu(x) \leqslant \min(M, kx), \quad k \geqslant \frac{M}{a}. \tag{12}$$

Тогда

$$\int_{+0}^{a} \varphi(x)\, d\mu(x) \leqslant \int_{0}^{Mk^{-1}} \varphi(x)\, dx < \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Так как производная $\varphi'(x)$ почти всюду существует и неположительна, то, интегрируя по частям и учитывая (11) и (12), найдем

$$\int_{+0}^{a} \varphi(x)\, d\mu(x) = [\mu(x)\varphi(x)]_{+0}^{a} - \int_{+0}^{a} \mu(x)\varphi'(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant M\varphi(a) - k \int_{0}^{M_k^{-1}} x\varphi'(x)\, dx - M \int_{Mk^{-1}}^{a} \varphi'(x)\, dx = k \int_{0}^{M_k^{-1}} \varphi(x)\, dx,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Все коэффициенты степенного разложения*

$$\frac{-x}{\ln(1 - x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -1 < x < 1,$$

начиная с $n = 1$, *отрицательны.*

Доказательство. Замечая, что $a_0 = 1$, разлагая в ряд $\ln(1 - x)$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в тождестве

$$\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots\right)(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = 1,$$

получим систему уравнений для определения a_k:

$$\frac{1}{2} + a_1 = 0, \tag{14_1}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{a_1}{2} + a_2 = 0, \tag{14_2}$$

. . . .

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n-1} + \cdots \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0, \tag{14_n}$$

$$\frac{1}{n+2} + \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n} + \cdots + \frac{a_n}{2} + a_{n+1} = 0, \tag{14_{n+1}}$$

. . . .

Докажем лемму методом математической индукции. Прежде всего, $a_1 = -\frac{1}{2}$. Допустим теперь, что $a_k < 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. В силу этого с использованием равенства (14_n) будет:

$$\left|\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n} + \cdots + \frac{a_n}{2}\right| = \frac{|a_1|}{n+1} + \frac{|a_2|}{n} + \cdots + \frac{|a_n|}{2} =$$
$$= \frac{n}{n+1}\left(\frac{|a_1|}{n} + \frac{n^2-1}{n^2}\frac{|a_2|}{n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{n(n-1)}\frac{|a_3|}{n-2} + \cdots + \frac{n+1}{2n}|a_n|\right) <$$
$$< -\frac{n}{n+1}\left(\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n-1} + \frac{a_3}{n-2} + \cdots + a_n\right) = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2},$$

и тогда на основании (14_{n+1})

$$a_{n+1} = -\frac{1}{n+2} + \left|\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{n} + \cdots + \frac{a_n}{2}\right| < 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $0 < r < r + t < 1$. *Тогда при* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^t (1-r-x)^n \ln\frac{1-r^2}{x}\,dx \geqslant \left(1-r-\frac{t}{2}\right)^n \int_0^t \ln\frac{1-r^2}{x}\,dx.$$

Доказательство. Так как при $n = 0$ лемма очевидна, то будем считать $n \geqslant 1$. Фиксируя r, положим

$$\varphi_n(t) \equiv \int_0^t (1-r-x)^n \ln\frac{1-r^2}{x}\,dx - \left(1-r-\frac{t}{2}\right)^n \int_0^t \ln\frac{1-r^2}{x}\,dx.$$

Так как $\varphi_n(0) = 0$, то для получения леммы достаточно установить, что

$$\varphi_n'(t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < 1 - r. \tag{15}$$

Дифференцируя по t и вычисляя интеграл, получим

$$\varphi_n'(t) = \frac{nt}{2}\left(1-r-\frac{t}{2}\right)^{n-1}\left(\ln\frac{1-r^2}{t} + 1\right) -$$
$$- \left[\left(1-r-\frac{t}{2}\right)^n - (1-r-t)^n\right]\ln\frac{1-r^2}{t}. \tag{16}$$

Но по теореме Лагранжа будет $\left(\frac{t}{2} < \xi < t\right)$:

$$0 < \left(1-r-\frac{t}{2}\right)^n - (1-r-t)^n = \frac{tn}{2}(1-r-\xi)^{n-1} < \frac{tn}{2}\left(1-r-\frac{t}{2}\right)^{n-1},$$

что после сопоставления с (16) дает (15). Лемма доказана.

Лемма 8. *Если* $0 < r < 1$ *и* $0 < t < \frac{1-r}{2}$, *то имеет место оценка*

$$\int_0^t \frac{1}{1-r-x}\ln\frac{1-r^2}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{1-r-\frac{t}{2}}\int_0^t \ln\frac{1-r^2}{x}\,dx. \tag{17}$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-r-\frac{t}{2}}\int_0^t \ln\frac{1-r^2}{x}\,dx - \int_0^t \frac{1}{1-r-x}\ln\frac{1-r^2}{x}\,dx. \tag{18}$$

Очевидно, $\varphi(0)=0$. Далее, при $0<t<\frac{1-r}{2}$ имеем

$$\varphi'(t)=\frac{t^2}{(2-2r-t)^2(1-r-t)}\left[\frac{2}{t}(1-r-t)-\ln\frac{1-r^2}{t}\right]\geqslant$$
$$\geqslant\frac{t^2}{4(1-r)^3}\left[\frac{1-r}{t}-\ln\frac{2(1-r)}{t}\right]>0,$$

так как $x-\ln 2x>0$ при $x>0$. Отсюда и следует лемма.

Лемма 9. *Если* $0<r<1$ и $0<t<\frac{1-r}{2}$, *то справедлива оценка*

$$\int_0^t\frac{1}{\ln(r+x)}\ln\frac{x}{1-r^2}\,dx<\frac{1}{\ln\left(r+\frac{t}{2}\right)}\int_0^t\ln\frac{x}{1-r^2}\,dx.$$

Доказательство. По лемме 6 имеем

$$-\frac{1}{\ln(r+x)}=\frac{1}{1-r-x}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1-r-x)^{n-1},\quad a_n>0.$$

В силу же леммы 7

$$a_n\int_0^t(1-r-x)^{n-1}\ln\frac{1-r^2}{x}\,dx\leqslant a_n\left(1-r-\frac{t}{2}\right)^{n-1}\int_0^t\ln\frac{1-r^2}{x}\,dx,$$

и, наконец, по лемме 8

$$\int_0^t\frac{1}{1-r-x}\ln\frac{1-r^2}{x}\,dx\leqslant\frac{1}{1-r-\frac{t}{2}}\int_0^t\ln\frac{1-r^2}{x}\,dx.$$

Суммируя эти равенства, получим требуемое.

Лемма 10. *Если вещественные числа* r *и* N *таковы, что*

$$0<r<1-\frac{1}{N},\quad N>1,\tag{19}$$

то справедливо неравенство

$$\left[1+\frac{1}{12}r^{N-1}(1-r)\right]^{12}<\frac{1}{r}.\tag{20}$$

Доказательство. Если N фиксировано, то функция

$$\varphi(r)=1+\frac{1}{12}r^{N-1}(1-r)-r^{-1/12}$$

в интервале (19) монотонно возрастает, так как

$$\varphi'(r)=\frac{N-1}{12}r^{N-2}(1-r)+\frac{1}{12}\left(r^{-\frac{11}{12}}-r^{N-1}\right)>0.$$

Тогда для доказательства леммы достаточно установить, что $\varphi\left(1-\frac{1}{N}\right)<0$ при любом $N>1$ или, что равносильно,

$$f(N)\equiv\left[1+\frac{1}{12N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N-1}\right]^{12}-\frac{N}{N-1}<0.\tag{21}$$

Но это сразу же получается из таких неравенств:

$$f(N)<\left(1+\frac{1}{12N}\right)^{12}-\frac{N}{N-1}<e^{\frac{1}{N}}-\frac{N}{N-1}=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}-1\right)N^{-k}<0.\tag{22}$$

Тем самым лемма доказана.

Теперь переходим к доказательству теоремы 1. Функция $u(z)$, субгармоническая в круге $|z|<1$, имеет представление [1, стр. 187]:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^+(e^{i\alpha})\frac{(1-r^2)\,d\alpha}{1-2r\cos(\theta-\alpha)+r^2}-\iint\limits_{|\zeta|<1}\ln\left|\frac{1-\bar\zeta z}{\zeta-z}\right|d\mu_0(\zeta)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)\,d\sigma(\alpha)}{1-2r\cos(\theta-\alpha)+r^2},\quad z=re^{i\theta},\tag{23}$$

где $\sigma(\alpha)$ — вещественная неубывающая на $[0,2\pi]$ функция, $\mu_0(\zeta)$ — некоторая мера (масса) на классе борелевских множеств, удовлетворяющая условию

$$\iint\limits_{|\zeta|<1}(1-|\zeta|)\,d\mu_0(\zeta)<\infty,\tag{24}$$

и, как обычно,

$$u^+(x)=\max\{0,\ u(x)\}.$$

Введем новую меру $\mu(\zeta)$ на классе борелевских множеств таким образом:

$$\mu(E)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1}d\sigma(\alpha)+\iint\limits_{E_2}\ln\frac{1}{|\zeta|}\,d\mu_0(\zeta),$$

где положено

$$E_1=\alpha:\{e^{i\alpha}\cap(|z|=1)\},\quad E_2=E\cap(|z|<1).$$

Если $E\subset(|z|>1)$, то будем считать $\mu(E)=0$. Введем новое ядро $K(\zeta,z)$ по формуле (8). Тогда равенство (23) запишется в виде

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^+(e^{i\alpha})\frac{(1-r^2)\,d\alpha}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}-\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}K(\zeta,z)\,d\mu(\zeta).\tag{25}$$

В силу условия (2) имеем

$$0\leqslant u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^+(e^{i\alpha})\,d\alpha-\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}d\mu(\zeta),$$

и с учетом (1)

$$\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}d\mu(\zeta)\leqslant M.\tag{26}$$

Выберем произвольное r, удовлетворяющее условиям теоремы. Назовем точку z_0 круга $|z|\leqslant r$ легкой, если для любого $\rho>0$ выполняется неравенство

$$\mu(|\zeta-z|\leqslant\rho)\equiv\iint\limits_{|\zeta-z|\leqslant\rho}d\mu(\zeta)\leqslant\frac{6M\rho}{r^N(1-r)}.\tag{27}$$

Здесь M, N и r взяты в смысле условий теоремы. Мы будем считать их фиксированными до конца доказательства. Точку $z\in(|z|\leqslant r)$, не являющуюся легкой, назовем тяжелой.

Лемма 11. *Множество тяжелых точек круга $|z|\leqslant r$ можно покрыть кружками $|\zeta-\zeta_n|\leqslant\rho_n$, $n=1,2,\ldots$, для которых выполняется условие*

$$\sum_n\rho_n\leqslant r^N(1-r).$$

В самом деле, для каждой тяжелой точки z, $|z| \leqslant r$, найдется круг $|\zeta - a_z| \leqslant \rho_z$ такой, что

$$\mu(|\zeta - a_z| \leqslant \rho_z) > \frac{6M\rho_z}{r^N(1-r)}.$$

Из множества всех таких кругов [11] можно выделить конечное или счетное подмножество $\{|\zeta - z_n| \leqslant \rho_n\}$, такое, что каждая тяжелая точка покрывается не более чем шестью кругами этого подмножества. Тогда

$$\sum_n \rho_n \leqslant \frac{r^N(1-r)}{M} \iint\limits_{|\zeta|<1} d\mu(\zeta) \leqslant r^N(1-r),$$

что и требовалось доказать.

Для установления справедливости теоремы 1 достаточно установить, что для любой легкой точки z_0 круга $|z| \leqslant r$ выполняется оценка (5). Обозначив

$$\mu^*(x) = \mu\{|z - z_0| \leqslant x\}, \tag{28}$$

на основании (27) и (26) имеем

$$\mu^*(x) \leqslant \frac{6Mx}{r^N(1-r)}.$$

Тогда, вводя обозначения (10) и (28) и последовательно используя леммы 3 и 5, получим

$$-u(z_0) \leqslant \int\limits_0^{1+r_0} S(x)\, d\mu^*(x) \leqslant \frac{6M}{r^N(1-r)} \int\limits_0^{\frac{1}{6} r^N(1-r)} S(x)\, dx =$$

$$= \frac{6M}{r^N(1-r)} \int\limits_0^{\frac{1}{6} r^N(1-r)} \frac{-1}{\ln(r_0 + x)} \ln \frac{1 - r_0(r_0 + x)}{x}\, dx,$$

а после применения лемм 4 и 9 будет

$$-u(z_0) \leqslant \frac{6M}{r^N(1-r)} \int\limits_0^{\frac{1}{6} r^N(1-r)} \frac{-1}{\ln(r + x)} \ln \frac{1 - r(r + x)}{x}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6M}{r^N(1-r)} \frac{1}{\ln\left[r + \frac{1}{12} r^N(1-r)\right]} \int\limits_0^{\frac{1}{6} r^N(1-r)} \ln \frac{x}{1 - r^2}\, dx =$$

$$= \frac{M \ln[6e(1+r)r^{-N}]}{\ln\left[r + \frac{1}{12} r^N(1-r)\right]} < MN \frac{\ln \frac{1}{r} + \frac{1}{N} \ln 12e}{\ln \frac{1}{r} - \ln\left[1 + \frac{r^{N-1}}{12}(1-r)\right]}.$$

Но при $0 < r < 1 - \frac{1}{N}$

$$\frac{1}{N} \ln 12e < \frac{3{,}5}{N} < -3{,}5 \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right) < 3{,}5 \ln \frac{1}{r},$$

а по лемме 10

$$\ln\left[1+\frac{1}{12}r^{N-1}(1-r)\right]<\frac{1}{12}\ln\frac{1}{r}.$$

Поэтому

$$-u(z_0)<4{,}5\cdot\frac{12}{11}MN<5MN.$$

Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1. Метод разбиения множества точек на тяжелые и легкие аналогичен методу Хеймана [3], хотя в нашем случае последний пришлось значительно видоизменить. Идея объединения граничной и внутренней массы и введения единого ядра в представлении субгармонической функции в полуплоскости также принадлежит Хейману. На соответствующие формулы для круга (8) и (25) мне впервые было указано И. В. Островским. (Заметим, что у Хеймана вместо термина «легкая точка» употребляется термин «нормальная точка»).

Замечание 2. Доказательство теоремы 1 можно было бы значительно упростить, если доказывать ее в более слабой форме, когда значение абсолютной постоянной в правой части (5) взято достаточно большим.

Итак, в предположении теоремы 1 доказано, что в круге $|z|\leqslant r<<1-\frac{1}{N}\,(N>1)$ вне множества кружков, сумма радиусов которых подчинена условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n<r^N(1-r), \tag{29}$$

выполняется оценка

$$u(z)>-AMN,\ A=5. \tag{30}$$

Значение абсолютной постоянной $A=5$ не является наилучшим. Автору не удалось найти последнее. Однако с помощью построения соответствующего примера можно установить, что при $A=1$ теорема 1 перестает быть верной. В связи с этим возникает вопрос: какова должна быть нижняя граница суммы радиусов исключительных кружков, вне которых выполняется оценка (30) при $A=1$? Простейший подход к решению этого вопроса таков: полагая $5N=N_*,\, N_*>5$, из (29) найдем, что

$$\sum_n\rho_n<r^{N_*/5}(1-r). \tag{31}$$

При фиксированном r правая часть этого неравенства убывает, как $r^{N_*/5}$. Однако мы докажем, что если наложить на r бо́льшие ограничения, чем в теореме 1, то верна более точная оценка.

Теорема 2. *Пусть субгармоническая функция $u(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а r и N таковы, что*

$$(1-r^2)\left(1+\frac{e}{2}r^{N-1}\right)^N<1,\ 2er^N<1-r,\ 0<r<1,\ N>1. \tag{32}$$

Тогда найдется не более чем счетное число кружков $|z-z_n|\leqslant\rho_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\leqslant 2er^N, \tag{33}$$

вне которых в круге $|z|\leqslant r$ выполняется оценка

$$u(z)\geqslant -MN. \tag{34}$$

Доказательство. Запишем представление функции $u(z)$ в виде (25). Фиксируем произвольные r и N, удовлетворяющие условию (32), и не будем изменять их до конца рассуждения. Далее мы используем метод, аналогичный методу А. Картана [2, стр. 31]. Назовем весом в смысле (A) произвольного круга $|z-z_0|\leqslant\rho_0$ величину

$$P(|z-z_0|\leqslant\rho_0)=\frac{er^N}{M}\mu(|z-z_0|\leqslant\rho_0). \tag{A}$$

Назовем круг соответственно тяжелым, легким или уравновешенным в смысле (А) в зависимости от того, какие из соотношений имеют место: $P>\rho_0$, $P<\rho_0$, $P=\rho_0$. Из (26) вытекает, что легкие круги всегда существуют. Покажем, что справедлива

Лемма 12. *Если существуют тяжелые круги, то существуют и круги уравновешенные.*

Доказательство. Пусть $|z-z_0|\leqslant\rho$ — тяжелый круг. Обозначим через ρ_0 точную нижнюю границу тех $\tilde\rho>\rho$, для которых круги $|z-z_0|\leqslant\tilde\rho$ являются легкими. Очевидно, $0<\rho_0<\infty$. Круг $|z-z_0|\leqslant\rho_0$ не может быть легким, так как тогда при малых $\delta>0$ круги $|z-z_0|\leqslant\rho_0-\delta$ были бы также легкими. С другой стороны,

$$\lim_{\delta\to+0}\mu(|z-z_0|\leqslant\rho_0+\delta)=\mu(|z-z_0|\leqslant\rho_0).$$

Поэтому круг $|z-z_0|\leqslant\rho_0$ не может быть тяжелым и, значит, является уравновешенным. Лемма доказана.

Лемма 13. *Если множество уравновешенных кругов не пусто, то среди них существует круг наибольшего радиуса.*

Доказательство. В силу (26) радиус любого уравновешенного круга не превосходит er^N. Обозначим точную верхнюю границу этих радиусов через R_0. Выберем такую последовательность уравновешенных кругов

$$q_n=(|z-a_n|\leqslant R_n),\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

для которой существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a_0,\ |a_0|\leqslant 1+er^N,\ \lim_{n\to\infty}R_n=R_0.$$

Покажем, что круг $q_0(|z-z_0|\leqslant R_0)$ является уравновешенным; тем самым лемма будет доказана. Будем обозначать круги и их веса соответственно буквами q и p с надлежащими индексами. Круги

$$q'_k=\left(|z-z_0|\leqslant R_0+\frac{1}{k}\right),\ k=1,\ 2,\ \ldots$$

являются легкими, т. е. $p'_k<R_0+\frac{1}{k}$. Но легко проверить, что

$$\lim_{k\to\infty}p'_k=p_0.$$

Отсюда $p_0\leqslant R_0$. Допустим теперь, что $p_0<R_0-\delta\ (\delta>0)$. Тогда $p'_{k_0}<R_0-\delta$ при некотором k_0. Пусть n_0 таково, что $q_n\subset q'_{k_0}$ для всех $n>n_0$, откуда $R_n=p_n\leqslant R_0-\delta$ при любом $n>n_0$, что невозможно. Тем самым лемма доказана.

Возьмем теперь любой уравновешенный круг $|z-z_1|\leqslant\frac{\rho_1}{2}$ наибольшего радиуса и назовем его кругом ранга ρ_1. Затем, выбросив массу, заключенную внутри этого круга, найдем круг $|z-z_2|\leqslant\frac{\rho_2}{2}$, уравновешенный и наибольшего радиуса относительно оставшейся массы. Эти два круга не могут пересекаться, так как иначе мы смогли бы получить уравновешенный круг радиуса больше ρ_1. Продолжив этот процесс неограниченно, получим последовательность попарно не пересекающихся кругов, таких, что относительно массы, лежащей вне их, не существует ни тяжелых, ни уравновешенных кругов. Увеличив затем радиусы вдвое, придем к системе кругов

$$F_{N,u}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(|z-z_n|\leqslant\rho_n),\ \rho_1\geqslant\rho_2\geqslant\ldots. \tag{35}$$

Если уравновешенных кругов не существует, будем считать $F_{N,u}$ пустым множеством.

Замечание. Легко проверить, что если система $F_{N,u}$ не является конечной, то $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$.

Лемма 14. *Если точка z_0 круга $|z|\leqslant r$ не принадлежит $F_{N,u}$, то любой круг вида*

$$|z-z_0|\leqslant R \tag{36}$$

является легким.

В самом деле, допустив противное, мы можем построить уравновешенный круг вида $q_*=(|z-z_0|\leqslant R_*)$. Из только что сделанного замечания и определения ранга следует, что q_* пересекается хотя бы с одним из кругов $|z-z_n|\leqslant\frac{\rho_n}{2}$. Пусть наибольший из таких кругов имеет радиус $\frac{\rho_k}{2}$. Так как $|z_k-z_0|>\rho_k$, то $R_*>\frac{\rho_k}{2}$. Тогда получается, что после отбрасывания кругов

$$|z-z_1|\leqslant\frac{\rho_1}{2},\ \ldots,\ |z-z_{k-1}|\leqslant\frac{\rho_{k-1}}{2},$$

(не пересекающихся с q_*), нашелся круг, а именно круг q_*, уравновешенный относительно оставшейся массы и имеющий радиус $R_*>\frac{\rho_k}{2}$. Но это противоречит определению ранга. Таким образом, круг (36) не может быть ни тяжелым, ни уравновешенным. Лемма доказана.

Лемма 15. *Сумма радиусов кругов* (35) *не превосходит* $2er^N$.

В самом деле, по определению веса круга с учетом (26) имеем

$$\sum_n\rho_n=2\sum_n\frac{\rho_n}{2}=\frac{2er^N}{N}\iint\limits_{|\zeta|\leqslant 1}d\mu(\zeta)\leqslant 2er^N, \tag{37}$$

поскольку круги $|z-z_n|\leqslant\frac{\rho_n}{2}$ не пересекаются. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. Пусть $u(z)$ удовлетворяет условиям теоремы и $z_0\in F_{N,u}$, $|z_0|\leqslant r$. Построим систему кругов (35). Принимая во внимание лемму 15, нам остается доказать, что вне этих кругов выполняется оценка (34) для любой точки $z_0\in(|z|\leqslant r)$. Используя представление (25), вводя обозначения (10) и (28), найдем

$$-u(z_0)\leqslant\int\limits_0^{r_0+1}S(x)\,d\mu^*(x). \tag{38}$$

На основании определения веса и леммы 14, с одной стороны, и неравенства (26) — с другой, получим оценки

$$\mu^*(x) \leqslant \frac{M}{er^N}x, \quad \mu^*(x) \leqslant M. \tag{39}$$

Применим леммы 3, 5 и 4 ($|z_0| = r_0$)

$$-u(z_0) \leqslant \frac{M}{er^N}\int\limits_0^{er^N} \frac{1}{\ln(r_0+x)} \ln\frac{x}{1-r_0(r_0+x)}\,dx \leqslant \frac{M}{er^N}\int\limits_0^{er^N} \frac{1}{\ln(r+x)}\ln\frac{x}{1-r^2}\,dx.$$

Далее используем лемму 9

$$-u(z_0) \leqslant \frac{M\left[\ln r^N - \ln(1-r^2)\right]}{\ln\left(r+\frac{e}{2}r^N\right)} = MN\,\frac{\ln r - \frac{1}{N}\ln(1-r^2)}{\ln r + \ln(1+er^{N-1})}.$$

Но последняя дробь меньше единицы, так как согласно условию (32)

$$\frac{1}{N}\ln\frac{1}{1-r^2} > \ln(1+er^{N-1}). \tag{40}$$

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Замечание 1. Если первые два условия (32) выполняются при некотором $N = N_0 \geqslant 2$, то они выполняются и при $N > N_0$. Для второго из них это очевидно, для первого же это следует из монотонного убывания функции

$$\varphi(N) = \left(1+\frac{e}{2}r^{N-1}\right)^N$$

при фиксированном r. В самом деле,

$$\varphi'(N) = \left(1+\frac{e}{2}r^{N-1}\right)^{N-1}\left[\left(1+\frac{e}{2}r^{N-1}\right)\ln\left(1+\frac{e}{2}r^{N-1}\right)+\frac{e}{2}Nr^{N-1}\ln r\right] <$$
$$< \frac{e}{2}r^{N-1}\left(\frac{e}{2}r^{N-1}+\ln er^N\right)\left(1+\frac{e}{2}r^{N-1}\right)^{N-1}.$$

Если $r \geqslant \frac{1}{2}$, то из второго условия (32) следует

$$\frac{e}{2}r^{N-1}+\ln er^N < er^N + \ln er^N < \frac{1-r}{2}+\ln\frac{1-r}{2} < \frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2} < 0.$$

Если же $r < \frac{1}{2}$ и $N > 2$, то

$$\frac{e}{2}r^{N-1}+\ln er^N < \frac{e}{2^N}+\ln\frac{1-r}{2} < \frac{e}{4}+\ln\frac{1}{2} < 0,$$

и поэтому для всякого $r < 1$ будет $\varphi'(N) < 0$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Методом Хеймана теорему 2 доказать проще, чем методом Картана, однако это упрощение произойдет за счет ухудшения значения абсолютной постоянной в правой части (33). Сказанное относится и к теореме 1: с помощью метода Картана оценку (5) можно было бы несколько улучшить.

Из теоремы 2 как следствие вытекает утверждение, обобщающее следующую теорему Валирона—Бернштейна [10, стр. 73; 2, стр. 33].

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в $|z| \leqslant 1$, причем $|f(0)| \geqslant 1$ и $N \geqslant 2$ — произвольное положительное число. Тогда множество тех точек круга $|z| \leqslant \frac{1}{2e}$, в которых*

$$\ln|f(z)| < -N \ln M, \ M = \max_{|z|=1} |f(z)|,$$

может быть покрыто конечным числом кружков $|z - z_n| \leqslant r_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_n r_n \leqslant 3e^{2-N}. \tag{41}$$

(В монографии [2] эта теорема сформулирована в несколько иной форме, равносильной приведенной).

Из теоремы 2 при $r = \frac{1}{2e}$ следует

Теорема 4. *Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, и пусть дано произвольное $N \geqslant 5$. Тогда множество точек круга $|z| \leqslant \frac{1}{2e}$, в которых*

$$u(z) < -MN, \ M = \sup_{|z|<1} u(z), \tag{42}$$

может быть покрыто не более чем счетной системой кружков $|z - z_n| \leqslant \rho_n$, для которых

$$\sum_n \rho_n \leqslant (2e)^{1-N}. \tag{43}$$

Действительно, учитывая замечание 1, легко проверить, что при $N \geqslant 5$ условия (32) выполняются, откуда и получается теорема 4.

Так как логарифм модуля аналитической функции является функцией субгармонической, то теорема 4 обобщает теорему 3. Случаи, когда множество исключительных кружков может быть выбрано конечным, будут рассмотрены нами ниже (см. теоремы 8 и 10).

Очевидно, оценка (41) является менее точной, чем (43), хотя последняя выполняется, начиная с $N = 5$. Впрочем, есть основания предполагать, что она верна и при $2 < N \leqslant 5$. При $N \leqslant 2$ теорема 4 очевидна, так как круг $|z| = (2e)^{-1}$ покрывает сам себя целиком.

Теперь займемся оценкой субгармонической функции во всем круге $|z| \leqslant 1$.

Теорема 5. *Пусть функция $u(z)$ субгармонична в круге $|z| < 1$ и*

$$\sup_{|z|<1} u(z) = M, \ 0 < M < \infty, \tag{44}$$

причем

$$u(0) \geqslant 0.$$

Тогда множество точек круга $|z| \leqslant 1$, в которых*

$$u(z) < -9MN, \ N > 0, \tag{45}$$

* При $|z| = 1$ по определению примем

$$u(e^{i\theta}) = \varliminf_{r \to 1} u(re^{i\theta}).$$

Заметим, что по теореме Литтльвуда почти всюду на $[0, 2\pi]$ существует точный предел.

может быть покрыто не более чем счетным множеством кружков $|z - z_n| \leqslant \rho_n$, *подчиненных условию*

$$\sum_n \rho_n \leqslant \frac{1}{N}. \tag{46}$$

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 16. *Функция*

$$\varphi(r) = \int_0^{1-r} \frac{1}{\ln(r+x)} \ln \frac{x}{1-r(r+x)}\, dx \tag{47}$$

в интервале $0 < r < 1$ *является монотонно возрастающей и*

$$\lim_{r \to 1-0} \varphi(r) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Доказательство. Полагая $1 - r = \delta$ и делая подстановку $x = \delta(1-t)$,
получим

$$f_0(\delta) \equiv \varphi(1-\delta) = \int_0^1 \frac{-\delta}{\ln(1-t\delta)} \ln \frac{1+t-t\delta}{1-t}\, dt. \tag{48}$$

При $\delta \to 0$ оба множителя под знаком интеграла возрастают для всякого t, $0 < t < 1$. Для второго множителя это очевидно, для первого же это следует из равенства

$$\frac{-\delta}{\ln(1-t\delta)} = \frac{1}{t}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (t\delta)^n\right],$$

в котором, как утверждает лемма 6, $a_n > 0$. Отсюда вытекает, что

1) в (48) допустим предельный переход под знаком интеграла (см. [9, стр. 126]), когда $\delta \to +0$;

2) $f_0(\delta)$ при $\delta \to 0$ монотонно возрастает и потому [8, стр. 569, формулы 1 и 2]

$$\varphi(r) < \lim_{t \to 1-0} \varphi(t) = \int_0^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t}\, dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Назовем весом в смысле (B) произвольного круга $|z - z_0| \leqslant \rho_0$ следующую величину:

$$P = \frac{\pi^2 + 8}{36MN} \mu(|z - z_0| \leqslant \rho_0). \tag{B}$$

Далее так же, как и выше, введем понятие тяжелого, легкого и уравновешенного кругов. Имеют место следующие леммы.

Лемма 12′. *Если существуют тяжелые круги, то существуют и уравновешенные круги.*

Лемма 13′. *Если множество уравновешенных кругов не пусто, то среди них существует круг наибольшего радиуса.*

Леммы доказываются дословно так же, как леммы 12 и 13.

Далее тем же методом, что и выше, строим последовательность уравновешенных кругов $|z - z_n| \leqslant \frac{\rho_n}{2}$ таких, что после отбрасывания масс, заключенных внутри кругов $|z-z_k|\leqslant\frac{\rho_k}{2}$, $k=1, 2, \ldots, s$, нельзя найти кругов, уравновешенных относительно оставшейся массы, радиуса больше $\frac{\rho_s}{2}$. Далее строим систему кругов

$$Q_{N,u}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(|z-z_n|\leqslant\rho_n). \tag{49}$$

(Некоторые из этих кругов могут выступать за пределы круга $|z|\leqslant 1$). Если уравновешенных в смысле (B) кругов нет, то $Q_{N,u}$ пусто.

Лемма 14'. *Если точка z_0 круга $|z|\leqslant 1$ не принадлежит $Q_{N,u}$, то любой круг вида*

$$|z-z_0|\leqslant R \tag{50}$$

является легким.

Доказательство проводится так же, как в лемме 14.

Лемма 17. *Сумма радиусов кругов системы* (49) *не превосходит* $\frac{\pi^2+8}{18N}$.

В самом деле, из определения уравновешенного круга в смысле (B) с учетом неравенства (26) имеем

$$\sum_n \rho_n=2\sum_n\frac{\rho_n}{2}=\frac{\pi^2+8}{18MN}\sum_n\mu\left(|z-z_n|\leqslant\frac{\rho_n}{2}\right)\leqslant\frac{\pi^2+8}{18N},$$

причем здесь учитывается то, что круги $|z-z_n|\leqslant\frac{\rho_n}{2}$ попарно не пересекаются. Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 5. Пусть $z_0\overline{\in}Q_{N,u}$ и $|z_0|\leqslant 1$. Рассмотрим сначала случай, когда $|z_0|<1$. Вводя обозначение (28), аналогично (39) имеем

$$\mu^*(x)\leqslant\frac{36MNx}{\pi^2+8},\quad \mu^*(x)\leqslant M. \tag{51}$$

Далее, отправляясь от (10) и (23), применим леммы 3, 5, 4 и 16:

$$-u(z_0)\leqslant\int_0^{r_0+1}S(x)\,d\mu^*(x)\leqslant\frac{36MN}{\pi^2+8}\int_0^{r_0+1}S(x)\,dx<$$
$$<\frac{36MN}{\pi^2+8}\left[\int_0^{1-r_0}\frac{1}{\ln(r_0+x)}\ln\frac{x}{1-r_0(r_0+x)}\,dx+(1-r_0^2)\int_{1-r_0}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{36MN}{\pi^2+8}\left(\frac{\pi^2}{4}+1+r_0\right)<9MN. \tag{52}$$

Прежде чем рассматривать случай $|z_0|=1$, введем множество $L_{N,u}$, состоящее из всех тех точек $z=e^{i\theta}\overline{\in}Q_{N,u}$, для которых отрезок $s(z,\delta)$, соединяющий точки $e^{i\theta}$ и $(1-\delta)e^{i\theta}$, пересекается с $Q_{N,u}$ для любого $\delta>0$. Имеет место следующая

Лемма 18. *Линейная мера множества $L_{N,u}$ равна нулю.*

Доказательство. Разобьем множество $Q_{N,u}$ на два подмножества Q_1 и Q_2, в первое из которых входят все круги $|z-z_n|\leqslant\rho_n$, пересекающиеся с $|z|=1$, а во второе — остальные круги. Будем считать круги $q_{k,1}$ системы Q_1 занумерованными в порядке убывания их радиусов. Очевидно, сумма радиусов кругов системы $Q_{1,n}=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} q_{k,1}$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Обозначим, далее, через $Q_{2,n}$ множество тех кругов системы Q_2, которые пересекаются с кольцом $1-\frac{1}{n}\leqslant|z|\leqslant 1$ $(n=1, 2, \ldots)$. Тогда любой фиксированный круг системы Q_2 не принадлежит ни одному из множеств $Q_{2,n}$, если n достаточно велико. Отсюда легко показать, что сумма радиусов кругов системы $Q_{2,n}$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

Пусть $\zeta\in L_{N,u}$. Для любого фиксированного n при достаточно малых δ, $\delta<\delta(n)$, отрезок $s(\zeta,\delta)$ не пересекается с множеством $Q_{N,u}\setminus(Q_{1,n}\cup Q_{2,n})$ и поэтому, если учесть определение $L_{N,u}$, пересекается с $Q_{1,n}\cup Q_{2,n}$. Значит, $L_{N,u}$ покрывается радиальной проекцией множества $Q_{1,n}\cup Q_{2,n}$ на окружность $|z|=1$, каково бы ни было n. Но мера этой проекции стремится к нулю при $n\to\infty$, а поскольку $L_{N,u}$ не зависит от n, то лемма 18 доказана.

Покроем теперь множество $L_{N,u}$ системой кружков $\tilde{Q}_{N,u}$ с суммой радиусов меньше $\frac{1}{N}-\frac{\pi^2+8}{18N}$. Эти кружки выберем ортогональными к окружности $|z|=1$. Пусть $z_0=e^{i\theta_0}$ — любая точка окружности $|z|=1$, не принадлежащая $Q_{N,u}$ и $\tilde{Q}_{N,u}$. По ранее доказанному во всех точках z отрезка $s(z_0,\delta)$ при некотором малом $\delta>0$ будет

$$u(z)>-9MN,$$

и потому

$$u(z_0)=\varliminf_{r\to 1} u(re^{i\theta})\geqslant -9MN.$$

Кроме этого, сумма радиусов кружков множества $Q_{N,u}\cup\tilde{Q}_{N,u}$ не превосходит $\frac{1}{N}$. Теорема 5 полностью доказана.

В последнее время автору стало известно, что теорема 5 для того случая, когда $e^{u(z)}$ является произведением Бляшке, независимым путем получена А. Ф. Гришиным.

Теоремы 1 и 5 можно объединить в одну следующую.

Теорема 6. *Пусть функция $u(z)$ субгармонична в круге $|z|<1$ и*

$$\sup_{|z|<1} u(z)=M,\ 0<M<\infty, \tag{53}$$

причем

$$u(0)\geqslant 0, \tag{54}$$

и пусть

$$0<r\leqslant 1,\ 2<N<\infty^*.$$

Тогда найдется не более чем счетное множество кружков $|z-z_n|\leqslant\rho_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n<\varphi(r)\equiv\begin{cases} r^N\dfrac{1-r}{1-r^N}, & \text{если } 0<r<1,\\ \dfrac{1}{N}, & \text{если } r=1,\end{cases} \tag{55}$$

вне которых в круге $|z|\leqslant r$ выполняется оценка

* Есть основания предполагать, что теорема 6 верна и при $N<2$. (При $0<N\leqslant 1$ теорема очевидна).

$$u(z) \geqslant -AMN, \tag{56}$$

где A — некоторая абсолютная положительная постоянная.

Доказательство. При $0 < r < 1 - \frac{1}{N}$ теорема следует из теоремы 1, так как

$$r^N(1-r) < r^N \frac{1-r}{1-r^N}.$$

Докажем теперь теорему для случая $1 - \frac{1}{N} \leqslant r \leqslant 1$. Функция $\varphi(r)$ на отрезке $0 \leqslant r \leqslant 1$ возрастает, поскольку

$$\varphi'(r) = \frac{r^{N-1}}{(1-r^N)^2}[N-(N+1)r+r^{N+1}] = \frac{r^{N-1}(N+1)}{(1-r^N)^2}\int\limits_r^1 (1-x^N)\,dx > 0.$$

Поскольку же

$$\min_{2 \leqslant N < \infty}\left(1-\frac{1}{N}\right)^N = \frac{1}{4}, \quad \min_{\frac{1}{4} \leqslant x < 1}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{3}, \tag{57}$$

то при $1 - \frac{1}{N} \leqslant r \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\varphi(r) \geqslant \frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\right]^{-1} \geqslant \frac{1}{3N}. \tag{58}$$

Но из теоремы 5 заменой N на $3N$ получаем, что вне некоторого множества кружков с суммой радиусов меньше $\frac{1}{3N}$ и, следовательно, меньше $\varphi(r)$, верна оценка

$$u(z) \geqslant -27MN.$$

Таким образом, теорема 6 полностью доказана.

Исключительные кружки $|z - z_n| \leqslant \rho_n$, фигурирующие в теореме 6, вообще говоря, невозможно выбрать так, чтобы все предельные точки их центров лежали на окружности $|z| = r$. Например, функция $(r_0 < r)$

$$u_0(z) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ln\left|\frac{z^n - \left(r_0 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 - z^n\left(r_0+\frac{1}{n}\right)^n}\right| - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left(r_0+\frac{1}{n}\right)$$

удовлетворяет условиям теоремы, но все точки окружности $|z| = r_0$ являются предельными для тех точек z, в которых $u_0(z) = -\infty$, так как общая формула последних имеет вид

$$z_{n,k} = \left(r_0 + \frac{1}{n}\right)\exp\left(2\pi i\frac{k}{n}\right), \quad n = 3, 4, \ldots, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Поэтому невозможно покрыть эти точки кружками с достаточно малой суммой радиусов и центрами, не сгущающимися хотя бы к одной точке окружности $|z| = r_0$. Однако имеют место следующие теоремы.

Теорема 7. *Если выполнены условия теоремы 6 и множество точек разрыва функции $u(z)$ в открытом круге $|z| < r$ имеет линейную меру нуль, т. е. может быть покрыто кружками с как угодно малой суммой радиусов, то исключительные кружки $|z - z_n| \leqslant \rho_n$, удовлетворяющие условию (55), вне которых выполняется неравенство (56), можно выбрать так, что все предельные точки их центров лежат на окружности $|z| = r$.*

Теорема 8. *Если выполнены условия теоремы 6 и множество точек разрыва функции* $u(z)$ *в замкнутом круге* $|z| \leqslant r$ *имеет линейную меру нуль, то множество исключительных кружков, вне которых выполняется неравенство* (56), *может быть выбрано конечным.*

Докажем теорему 7. Так как $u(z)$ полунепрерывна сверху, то неравенство (56) должно выполняться и на границе исключительных кружков, поэтому последние можно считать открытыми: $|z - z_n| < \rho_n$. Далее, если значение постоянной A взять несколько увеличенным, то неравенство (56) можно записать в виде

$$u(z) > -AM(N - \varepsilon_{N,u}), \tag{59}$$

где $\varepsilon_{N,u} > 0$ зависит от N и от вида функции $u(z)$. Наконец, поскольку в условии (55) стоит знак строгого неравенства, то можно утверждать, что

$$\sum_n \rho_n < r^N \frac{1-r}{1-r^N} - \delta_{N,u}, \quad \delta_{N,u} > 0. \tag{60}$$

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 19. *Пусть множество* $F \subset (|z| < r)$ *таково, что его пересечение с каждым кругом* $|z| \leqslant R < r$ *замкнуто, и пусть существует счетное множество открытых кругов* $Q = \{|z - z_n| < \rho_n\}$, покрывающих F, причем

$$\sum_n \rho_n < \infty. \tag{61}$$

Тогда из Q *можно выделить такое подмножество кругов, также покрывающих* F, *центры которых не имеют предельных точек внутри круга* $|z| < r$.

Доказательство. Нами будет использовано следующее предложение, вытекающее из леммы Гейне—Бореля. Если замкнутое множество C покрыто счетной системой P открытых кругов, содержащей некоторую конечную систему кругов P_0, то из P можно выделить конечную систему кругов, также покрывающую множество C и содержащую систему P_0.

Разобьем множество Q на Q_*-систему кругов, каждый из которых целиком лежит строго внутри $|z| < r$ и Q_{**}-систему кругов, пересекающихся с $|z| = r$. Построим последовательность окружности $|z| = \tau_n$, $\tau_n \nearrow r$ такую, что каждый из кругов системы Q_* пересекает не более одной из них. Такое построение возможно в силу условия (61). По той же причине любой круг $|z| < \tau_n$ пересекается разве лишь с конечным числом кругов системы Q_{**}.

Обозначив

$$F_n = F \cap (|z| \leqslant \tau_n),$$

выделим из системы Q конечную систему кругов Q_1, покрывающую F_1. Затем последовательно выделим конечные системы $Q_2 \supset Q_1$, покрывающую F_2, $Q_3 \supset Q_2$, покрывающую F_3, и т. д. При этом выборе будем соблюдать правила: 1) каждый из кругов системы Q_{**}, пересекающийся с $|z| \leqslant \tau_n$, должен входить в Q_n; 2) система $Q_{n+2} \setminus Q_{n+1}$ не должна содержать кругов, пересекающихся с $|z| \leqslant \tau_n$. Тогда легко проверить, что система $Q_0 = \lim\limits_{n\to\infty} Q_n$ является требуемой. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 7. Исходя из (59) и (60), выберем такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что множество D_* точек круга $|z| \leqslant r$, в которых

$$u(z) \leqslant -AM(N - \varepsilon), \tag{62}$$

может быть покрыто счетным множеством открытых кругов

$$Q = \{|z - z_n| < \rho_n\}, \tag{63}$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < r^N \frac{1-r}{1-r^N} - \delta. \tag{64}$$

Обозначим через B множество всех точек z открытого круга $|z| < r$, в которых

$$\overline{\lim_{\omega \to 0}} \sup_{\zeta_k \in (|\zeta - z| < \omega)} |u(\zeta_1) - u(\zeta_2)| \geqslant AM\varepsilon. \tag{65}$$

Легко проверить, что: 1) B входит во множество точек разрыва функции $u(z)$ в открытом круге $|z| < r$; 2) $B \cap (|z| \leqslant R)$ при любом $R < r$ есть замкнутое множество. Тогда на основании леммы 19 и условия теоремы множество B можно покрыть системой открытых кругов

$$|z - a_n| < s_n, \; n = 1, 2, \ldots,$$

центры которых не имеют предельных точек внутри $|z| < r$ и

$$\sum_n s_n \leqslant \delta. \tag{66}$$

Обозначим

$$C = (|z| < r) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (|z - a_n| < s_n). \tag{67}$$

Из определения множества B легко получить, что

$$\underline{\lim}_{\zeta \to z,\, \zeta \in C} u(\zeta) \geqslant u(z) - AM\varepsilon \text{ для любого } z \in C. \tag{68}$$

Обозначим теперь

$$T = \{u(z) \leqslant -AMN\} \cup \{|z| \leqslant r\}, \; D = C \cap T.$$

Присоединим к множеству D все его предельные точки, лежащие в $|z| < r$, и обозначим полученное множество через $\overline{D}$. Тогда в силу (68)

$$\sup_{z \in \overline{D}} u(z) \leqslant -AM(N - \varepsilon). \tag{69}$$

Положим

$$K = \{|z| = r\} \cap \{u(z) \leqslant -AM(N - \varepsilon)\},$$

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|z - a_n| < s_n\}.$$

Тогда

$$T \subset \overline{D} \cup K \cup L. \tag{70}$$

Множество $\overline{D} \cup K$ в силу определения K и соотношений (69) и (62) может быть покрыто системой кружков (63), подчиненных условию (64), а так как при любом $R < r$ множество

$$(\overline{D} \cup K) \cap (|z| \leqslant R) = \overline{D} \cap (|z| \leqslant R)$$

замкнуто, то, применяя лемму 19, можно эти кружки выбрать так, что их центры сгущаются только к $|z| = r$. Для кружков системы L то же самое установлено выше. Наконец, сопоставляя (66) и (64), мы видим, что множество кружков $Q \bigcup L$ покрывает T и, значит, является искомым. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8 является аналогичным (и более простым), поэтому мы его не приводим.

Приложим доказанные результаты к функциям, аналитическим внутри круга. Из теоремы 6 следует

Теорема 9. *Если $f(z)$ регулярна в $|z| < 1$ и*

$$\sup_{|z|<1} |f(z)| = K, \ 1 < K < \infty,$$

причем

$$|f(0)| \geqslant 1,$$

и если

$$0 < r \leqslant 1, \ 2 < N < \infty,$$

то найдется не более чем счетное множество кружков $|z - z_n| \leqslant \rho_n$, центры которых не имеют предельных точек внутри круга $|z| < 1$, радиусы удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \varphi(r) \equiv r^N \frac{1-r}{1-r^N}, \ \varphi(1) \equiv \varphi(1-0),$$

и вне которых в $|z| \leqslant r$ выполняется оценка

$$\ln |f(z)| \geqslant -AN \ln K, \tag{71}$$

где A — некоторая абсолютная положительная постоянная.

Теорема 9 вытекает из теорем 6 и 7, если учесть, что $\ln|f(z)|$ в $|z| < 1$ может иметь только минус-бесконечные разрывы, множество точек которых имеет точки сгущения разве лишь на окружности $|z| = 1$.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 9, и $r < 1$, то множество исключительных кружков можно выбрать конечным.*

Теорема 10. *Если выполнены условия теоремы 9, и $f(z)$ непрерывна вплоть до $|z| = 1$, а $r = 1$, то множество кружков, вне которых справедливо неравенство* (71), *может быть выбрано конечным.*

В самом деле, в условиях теоремы в круге $|z| \leqslant 1$ функция $\ln|f(z)|$ может иметь только минус-бесконечные разрывы, но множество точек таких разрывов по теореме 6 имеет линейную меру нуль в $|z| \leqslant 1$. Тогда теорема 10 следует из теоремы 8.

Автор благодарен доктору физико-математических наук И. В. Островскому за упрощение доказательства приводящейся в работе теоремы 5 и указание на возможность обобщения результатов, полученных для модуля аналитической функции, на случай субгармонической функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Привалов. Субгармонические функции. Объед. науч.-техн. изд-во, М., 1937.

2. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.

3. W. K. Hayman. Questions of regularity connected with the Phragmen — Lindelöf principle, J. math. pures et app I, **35**, № 2, 1956.

4. L. Ahlfors and M. Heins. Questions of regularity connected with the Phragmen-Lindelöf principle. Ann. math., **50**, 1949.

5. И. В. Ушакова. Некоторые оценки субгармонических функций в круге. Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и ХМО, т. XXIX, 1963.

6. В. С. Азарин. Обобщение одной теоремы Хеймана на субгармонические функции в m-мерном конусе. Матем. сб., 66 (108) : 2, 1965, стр. 248—264.

7. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. ОГИЗ, М.—Л. 1941.

8. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

9. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, 1950.

10. Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман. Проблема Раусса—Гурвица для полиномов и целых функций. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 26, 1949.

11. Н. С. Ландкоф. Емкости и меры Хаусдорфа. Оценки потенциалов. УМН, 20, 1965, стр. 189—195.

Поступила 20 апреля 1967 г.